Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

O ploše kuželové druhého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 2, 55--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123537

O ploše kuželové druhého stupně.

Napsal

A. Strnad v Hradci Králové.

I. V řádcích následujích pokusíme se vyšetřiti, zda-li vůbec aneb za kterých podmínek plocha kuželová 2. stupně obsahuje trojinu přímek vzájemně kolmých, t. j. tři takové přímky, z nichž každá jest kolmá k ostatním dvěma. —

Předpokládejme v rovině R křivku 2. stupně K jakožto křivku řídící a mimo ni bod s jakožto střed plochy kuželové K, a mysleme si v ploše té přímku A. Rovina S jdoucí středem kolmo k přímce A stanoví v ploše dvě ku A kolmé přímky B a C, jichž úhel ovšem nemusí býti pravý; ba přímky ty mohou i v jednu splynouti aneb pomyslnými se státi. Jelikož jest však úhel jich závislý na poloze přímky původní A, naskytá se otázka: lze-li přímku tuto tak určiti, aby druhé dvě přímky byly nejen k ní, ale i k sobě kolmými. Uvažme však, že souhrnu přímek A plochy kuželové K přísluší souhrn kolmých rovin S, obalujících novou plochu kuželovou L též 2. stupně, jejíž křivka řídící v rovině R obsažená jest určitá kuželosečka L. Obě plochy mají společný střed i společné osy a roviny hlavní, každá z nich jest plochou kuželovou normál k druhé.

Kdyby tedy byla taková tečná rovina plochy L možnou, kteráž plochu K ve dvou kolmých přímkách B a C protíná, byla by normála roviny této v bodu s žádanou přímkou A. Stopy a, b, c přímek A, B, C s rovinou R náležely by křivce K, kdežto přímky ab, bc, ca byly by pak tečnami křivky L; čili jinými slovy: trojúhelník abc byl by kuželosečce K vepsán a kuželosečce L opsán. I vysvítá již z rozboru provedeného, že možnost tří vzájemně kolmých přímek v ploše kuželové 2. stupně na tom závisí, lze-li obecně stanoviti trojúhelník dané kuželosečce vepsaný a současně jiné dané kuželosečce opsaný. O tom však snadně rozhodneme užitím věty známé z geometrie polohy: „Dva kuželosečce vepsané trojúhelníky jsou jiné kuželosečce opsány, a naopak,“ —*) z níž jednoduchým spůsobem plyne: „Jsou-li dvě kuželosečky dány, není obecně možným trojúhelník opsaný jedné a vepsaný druhé, aneb při zvláštním vztahu obou kuželoseček jest takových trojúhelníků nekonečně mnoho". Odtud pak, vrátíme-li se k původní své úloze, jsme vedeni k výroku následujícímu:

Plocha kuželová stupně 2. neobsahuje obecně trojinu přímek realných vzájemně kolmých, aneb v případě zvláštním obsahuje trojin takových nekonečně mnoho.

II. Po úvaze předcházející obrátíme se k analytickému řešení dané úlohy, abychom tuto i z jiné strany poznali a zvláště abychom nabyli podrobnější známosti případů pomyslných, k jichž poznání jsme cestou synthetickou přímo vedeni nebyli.

Budiž k tomu cíli plocha kuželová stupně 2. dána rovnicí

$$ax^2 + by^2 - cz^2 = 0; \tag{1}$$

úlohou jest, ustanoviti v ní tři přímky vzájemně kolmé. Jedna z nich, ku př. A, nechať jest vyznačena rovnicemi

$$y = kx, \; z = lx,$$

při čemž k a l vyhověti musí podmínce

$$a + bk^2 - cl^2 = 0. \tag{2}$$

Rovina, jdoucí středem plochy kuželové kolmo ku přímce A, má rovnici

$$x + ky + lz = 0, \tag{3}$$

a stanoví v ploše dvě přímky B a C kolmé ku A. Z rovnice roviny a plochy kuželové obdržíme

$$(bl^2 - ck^2)\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2ck\left(\frac{y}{x}\right) + al^2 - c = 0, \tag{4}$$

odkudž řešením dle $\left(\frac{y}{x}\right)$ následuje $y = m_1 x$ aneb $m_2 x$. Jsou tedy přímky B a C určeny rovnicemi

$$y = m_1 x \qquad\qquad y = m_2 x$$
$$z = -\frac{1 + km_1}{l} x, \qquad z = -\frac{1 + km_2}{l} x,$$

a podmínka jich kolmosti jest

$$k^2 + l^2) m_1 m_2 + k(m_1 + m_2) + l^2 + 1 = 0, \tag{5}$$

kterou ještě jinak upraviti lze, když uvážíme, že jest dle (4)

$$(m_1 + m_2) = \frac{2ck}{bl^2 - ck^2}, \; m_1 m_2 = \frac{al^2 - c}{bl^2 - ck^2}.$$

Po snadném zjednodušení najdeme totiž

$$l^2[(a + b) l^2 + (a - c) k^2 + (b - c)] = 0$$

*) Viz: Dr. Em. a Ed. Weyr, Základové vyšší geometrie díl. II. str. 89.

a nahradíme-li l hodnotou z rovnice (2), přijdeme konečně k podmínce

$$[a + b - c]\,[a + bk^2]\,[(a + c) + (b + c)\,k^2] = 0. \tag{6}$$

III. Není zajisté nesnadno poznati geometrický význam této rovnice, vzpomeneme-li, že hodnotou k jest poloha přímky A v ploše kuželové a tudíž i celé trojiny žádané dvojznačně určena. Jsou pak v rovnici té zahrnuty tři případy, jež jest nám vyšetřiti.

1. Jest-li

$$a + b - c = 0, \tag{7}$$

nezávisí jsoucnost tří vzájemně kolmých přímek na hodnotě k, a v tomto zvláštním případě obsahuje tedy plocha kuželová nekonečně mnoho takých trojin. Rovina kolmá ku *kterékoliv* přímce této plochy protíná ji ve dvou nejen k ní, ale i vespolek kolmých přímkách. A co znamená ona podmínka ve smyslu geometrickém? Znamená, — což snadně pochopiti lze — že plocha kuželová obsahuje přímku $x = y = z$. Lze tedy říci:

Obsahuje-li plocha kuželová 2. stupně přímku, která se všemi třemi osami jejími stejné úhly tvoří, obsahuje též nekonečně mnoho realných trojin přímek vzájemně kolmých.

Taková plocha kuželová zobrazena v obrazci připojeném 10., kterýž, tuším, zvláštního výkladu nevyžaduje. Jen tolik budiž mimochodem připomenuto, že — z důvodu jednoduchého — s_1 jest průsečíkem výšek trojúhelníků $a_1\ b_1\ c_1$ i ${}^1a_1\ {}^1b_1\ {}^1c_1$.

2. Jest-li

$$a + bk^2 = 0. \tag{8}$$

a tedy současně $l = 0$, jest druhým spůsobem vyhověno podmínce v rovnici (6) vyjádřené. Případ tento vztahuje se patrně k pomyslným přímkám

$$y = + kx = + x\sqrt{-\frac{a}{b}},$$

$$y = - kx = - x\sqrt{-\frac{a}{b}},$$

v nichž hlavní rovina $z = 0$, kolmá k realné ose plochy kuželové, tuto protíná. Ohledáme-li však blíže rovnici (8), shledáme, že není vždy dostatečným důvodem pro žádanou kolmost všech tří příslušných přímek. Neboť rovina kolmá ku př. k přímce $y = kx$, majíc rovnici

$$x + ky = 0,$$

stanoví v ploše kuželové dvě přímky

$$y = -\frac{1}{k}x = -x\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

$$z = +\frac{x}{k}\sqrt{\frac{ak^2+b}{c}} = +x\sqrt{\frac{a^2-b^2}{ac}},$$

$$y = -\frac{1}{k}x = -x\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

$$z = -\frac{x}{k}\sqrt{\frac{ak^2+b}{c}} = -x\sqrt{\frac{a^2-b^2}{ac}},$$

pro jichž kolmost jest nutnou i dostatečnou podmínka

$$1 - \frac{b}{a} - \frac{a^2-b^2}{ac} = 0$$

čili

$$(a + b - c)(a - b) = 0.$$

Následovně jsou přímky ty k sobě kolmými jen tehdy, když buď $a + b - c = 0$ aneb $a - b = 0$. Co první podmínka znamená, jest již známo; druhá pak vyžaduje, aby daná plocha kuželová byla *kruhovou*, a souvisí s případem posledním, jejž zbývá vyšetřiti.

3. Jest-li

$$a + c + (b + c)k^2 = 0, \tag{9}$$

lze této podmínce při *každé* ploše kuželové příhodnou volbou k vyhověti. Neboť jest pak

$$k = \pm\sqrt{-\frac{a+c}{b+c}} = \pm\varkappa$$

$$l = \pm\sqrt{\frac{a-b}{b+c}} = \pm\lambda$$

a rovnicemi

$$y = \pm\varkappa x, \quad z = \pm\lambda x$$

určeny jsou 4 přímky souměrné k hlavním rovinám. Jelikož jsou a, b, c veličiny kladné, jest $\varkappa$ pomyslné a tudíž i přímky tyto jsou pomyslné. Všimněme si té okolnosti, že jest

$$1 + \varkappa^2 + \lambda^2 = 0 \tag{10}$$

a poznáme, že přímky tyto směřují k oněm bodům plochy kuželové, pro které jest

$$x^2 + \varkappa^2 x^2 + \lambda^2 x^2 = 0$$

čili

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

t. j. bodům společným ploše kuželové a nekonečně vzdálené pomyslné křivce kruhové.*) Jsou to tedy přímky cyklické čili dle Laguerrea isotropické, jichž zvláštní vlastnosti jsou známy; každá z nich jest sama k sobě kolmou a rovina k přímce takové kolmá ji zároveň obsahuje.

Snadným výpočtem přesvědčíme se, že rovina

$$x + \varkappa y + \lambda z = 0$$

kolmá k přímce $y = \varkappa x$, $z = \lambda x$ obsahuje tuto přímku a mimo to protíná plochu kuželovou v přímce druhé, taktéž pomyslné, a dané rovnicemi

$$y = \frac{-a + b + c}{a - b + c}\varkappa x, \quad z = \frac{a + b + c}{a - b + c}\lambda x$$

Touto cestou dospěli jsme tudíž k následující větě:

V obecné ploše kuželové 2. stupně vyskytují se 4 pomyslné trojiny přímek vzájemně kolmých. Trojiny tyto jsou vespolek souměrné k rovinám hlavním, a každá skládá se z jedné cyklické přímky dvojnásob počítané a z další přímky pomyslné.

V ploše kuželové kruhové, kde jest $a = b$ a $\lambda = 0$, jsou jen 2 přímky cyklické, obsažené v hlavní rovině kolmé k realné ose této plochy.

IV. Zakončíme úvahy své tím, že ukážeme, jak lze výsledků dosažených užiti při plochách stupně druhého. Předpokládáme-li totiž kteroukoli obecnou plochu 2. stupně (ku př. plochu trojosého ellipsoidu) a bod mimo ni, jest bodem tím nekonečně mnoho tečen plochy určeno, jichž souhrn tvoří plochu kuželovou 2. stupně. Jelikož, jak bylo ukázáno, taková plocha kuželová jen výminečně obsahuje tři realně vzájemně kolmé přímky, následuje z toho, že nelze každým bodem v prostoru stanoviti tři k sobě kolmé tečny plochy 2. stupně. Jen určité, ač v nekonečném počtu se vyskytující body touto vlastností se vyznačují, a které jest tedy jich geometrické místo? Netřeba o této otázce zde dále se šířiti, jelikož — pokud se trojosého ellipsoidu týče — byla předmětem math. úlohy 7. dané v lonském ročníku tohoto „Časopisu“ a řešené v čísle 3. letošního ročníku od Dra. B.**) Dovolíme si však k té, pokud nám

---

*) Viz: Dr. Em. Weyr, Určování nekonečně vzdálených prvků prostorových útvarů geometrických (Časopis, ročn. II., str. 117.)

**) Viz též: Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie des Raumes, I. díl, str. 156.

známo, nepovšimnuté okolnosti poukázati, že každým bodem onoho geom. místa jest možno *nekonečně mnoho* trojin tečen vzájemně kolmých.

Ku každé ploše stupně 2. (vyjímaje plochy válcové a kuželové) náleží jiná téhož stupně jakožto geom. místo bodů, z nichž každým lze stanoviti nekonečně mnoho trojin vzájemně kolmých tečen plochy prvé.

O plochách rozvinutelných.

Napsal

V. Řehořovský v Praze.

(Pokračování).

Konečně jsou přímky obrysové pro rovinu YZ dány rovnici

$$3t^2 - 1 = 0,$$

t. j.

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}},\ t = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

kterýmž hodnotám přísluší přímky

$$4y + (3\sqrt{3} - 1)z - (3a\sqrt{3} - b) = 0,$$
$$4y + (3\sqrt{3} + 1)z + (3a\sqrt{3} + b) = 0.$$

Určením hodnot α, β, γ, δ pro tyto zvláštní hodnoty t obdrželi bychom též ostatní průměty těchto přímek na rovinách XY a XZ.

Abychom určili asymptoty křivky vratu, přihlížejme k tomu, zda-li a mnoho-li má křivka (12) bodů v nekonečnu: shledáváme, že pouze pro

$$t = 1$$

stávají se souřadnice křivky vratu a sice všechny tři nekonečně velkými; křivka má tedy jediný bod v nekonečnu. Pro hodnotu tu jest

$$\alpha = 1,\ \beta = a - b,\ \gamma = -1,\ \delta = b$$

a tedy rovnice asymptoty

$$y = x + a - b,$$
$$z = -x + b;$$