Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vilém Pexider

Znázornění čísel délkami a naopak. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 5, 515--527

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123519

Schmidtovou theorií zabýval se též *Barus*,*) avšak dospěl k náhledu nyní téměř všeobecně přijatému, že příčinu vodivosti vzduchu v okolí fosforu nutno hledati v ionisaci.

Jak patrno z tohoto krátkého vylíčení, není dosud otázka po příčině vodivosti vzduchu při oxydaci fosforu vznikající definitivně a uspokojivě rozřešena, ač nelze popříti, že hlavně polemika vedená o této otázce mezi Schmidtem a Harmsem značnou měrou přispěla k vytříbení názorů, byť i nevedla v každém směru k žádoucímu objasnění. Celkem však kloní se všeobecný úsudek k theorii elektronové.

Znázornění čísel délkami a naopak.

Napsal

Dr. **Jan Vilém Pexider** v Praze.

(Dokončení.)

V geometrii Veroneseově přípustny jsou vedle úseček konečných a aktuálně nekonečně malých ještě délky (ϑ, ϑ', ...) definované tak, že se, značí-li A a B konce konečné úsečky na přímce, nikdy nepřekročí konečné body úseček ϑ, ϑ', ..., nechť se úsečka AB nanese na přímku za sebou kolikrátekoliv. Úsečky toho druhu zovou se aktuálně nekonečně velké. Praktického významu v geometrii nemají; s theoretického stanoviska zajímava jest především ta okolnost, že lze pomocí jich ukázati, že trojúhelníky o stejné základně a stejné výšce nemusí míti v geometrii Veroneseově stejný plošný obsah. Vedle toho používá se jich k důkazu o nezávislosti axiomu Archimedova na ostatních skupinách I—IV. O průkazu objektivné existence úseček aktuálně nekonečně velkých nemůže ovšem býti řeči.

Důkazy existenční nebývají ani v geometrii bez značnějších obtíží; nebylo lze dokázati ani existenci všech „irracionálných" bodů v geometrii Euklidově. Existence „racionálných" bodů byla v 1. odstavci prokázána. Vedle toho lze se ještě přesvěd-

*) *C. Barus*, Drud. Ann. d. Phys. *11*. 1142. 1903.

čiti o existenci „algebraických“ bodů, jimž odpovídají algebraická čísla, utvořená z jedničky pomocí konečného počtu základních operací: sčítání, odčítání, násobení a dělení, a pomocí pátého úkonu $|\sqrt{1+k^2}|$, kdež k značí číslo vzniklé použitím kterýchkoli z těchto pěti uvedených operací (v konečném počtu). Množina všech těchto speciálných „algebraických“ bodů jest spočetně nekonečná*) a tudíž takřka ničím vedle množiny druhé mohutnosti, již při nejmenším má tak zv. lineárné kontinuum. Existenci libovolného „irracionálného“ bodu geometrie zbudovaná na základě axiomů I—IV a VI vůbec nevyžaduje. V geometriích hovících všem těmto zásadám chyběti mohou celé třídy irracionálných bodů; dle toho, které irracionálné body obsahují resp. postrádají, budou se různiti. Jest tedy patrno, že s tohoto hlediska *geometrií euklidických jest nekonečně mnoho.* Všechny jsou částěmi jediné, v niž axiomaticky zavedena jest obapolně jednoznačná korrespondence mezi čísly a body, totiž geometrie Descartovy; a jen tato hoví současně axiomu úplnosti.

Jednotlivá čísla reálná representovati mohou pouze předměty diskrétní, kdežto množina čísel reálných vyčerpává lineárné kontinuum Euklidovo. Logicky přípustno jest však ještě kontinuum jiného druhu, Veroneseovo, jež vyčerpati lze soustavou nearchimedických čísel a v němž kontinuum Euklidovo jest množinou diskrétních bodů. Fakt tento jest nejsilnějším důvodem proti obecnému mínění, že pojem kontinua jest pojem apriorný. Punctum saliens vězí totiž v odpovědi na otázku, co jest to $\lim |\alpha_k - \beta_k|$. Nejjednodušší jest zajisté odpověď, že jest to *v každém případě* určitý bod; a pak lze vztah ten čísti buď mathematicky: *Existuje skutečně každý bod, jenž konvergujícím nekonečným processem jest definován* (Věta Cantorova), aneb geometricky: *Leží-li z nekonečné posloupnosti délek, konvergujících k nule, každá zcela uvnitř předchozí, pak existuje...* (Věta Ascoliova). Avšak tato nejjednodušší odpověď není současně tou

---

*) Geometrie, obsahující v rovině jen tyto body, má nejmenší počet bodů, jaký nevyhnutelný jest k tomu, aby zůstaly zásady shodnosti i axiom Archimedův ještě v platnosti; geometrie, která by obsahovala méně bodů nežli tato, není již euklidickou. Krom toho má geometrie tato tu vlastnost, že všecky její body konstruovati lze pouhým nanášením úseček a přenášením úhlů v konečném počtu.

jedině přípustnou; proto je možný i jiný názor lineárného kontinua.

Tento druhý názor, Veroneseův, má silnou oporu v stanovisku čisté filosofie. Bod definován jest jakožto něco, co nemá vůbec žádných rozměrů, nýbrž jen polohu v prostoru. Myslímeli si nyní takovýchto elementů bezrozměrných množinu vyšší nežli prvé mohutnosti a sice, jak vše tomu nasvědčuje, množinu druhé mohutnosti, vznikne nám dle obecného názoru, jímž jest názor Euklidův, následkem zásady VI lineárné kontinuum, délka, a tedy rozměr. Z určitého, vymezeného množství něčeho, z čeho rozměrnost jest vyloučena, skládá se rozměr. Jak to filosoficky ospravedlniti a vysvětliti, k tomu ovšem — pomoz si každý sám. Proto Veronese přímo popírá správnost Archimedova axiomu, proto zbudoval geometrii na zásadě této nezávislou a konstruoval v důsledku toho délky resp. čísla „aktuálně nekonečně malá resp. velká“, jichž uvedení do geometrie a tím v názor náš zdá se na poprvé snad přímo illogickým, poněvadž geometři navykli si po tisíciletí operovati jen s délkami konečnými. Tu však vysvítá již dosti jasně, v jak velké míře úvaha o základních větách geometrických jest logickou analysou naší schopnosti nazírací, a jak značně názory naše na prostor mohou se různiti právě v principielních otázkách.

V tomto ohledu pokusil se Russell v [3] vytknouti z našeho názoru na prostor ty nejjednodušší a hlavní, základní pravdy, v nichž nelze se různiti a bez nichž by již zkušenost lidská nebyla ani možna. Našel tři takové základní pravdy, nutné pro naši zkušenost, udal důvod jich nutnosti a vytkl, že jen ty jsou apriorné. Třebas bychom připustili, že se v aprioritě nezmýlil, lze rozřešení to — třebas jen pro projektivnou geometrii — považovati za definitivní? Byl by v tom zajisté skrytě obsažen předpoklad, že soustavou axiomů geometrických ovládnuta jest veškerá věda geometrická, že všecky ať známé, neb v budoucnu nalezené věty a všecky geometrické poznatky jsou a budou jen logickými důsledky zprvu vzpomenutých axiomů. Jest tomu skutečně tak, či mohou naše vědomosti geometrické se rozmnožiti o podstatné části takové, že tyto nové poznatky nebudou regulovány dosud známými zásadami? Jak se podařilo ukázati, stačí systém dosavadní k důkazům a odvození elementárních pravd geometrických, k zbudování planimetrie atd; v něm máme úplný systém pro elementárnou geometrii. Avšak jsou i jiné partie, jež se shrnují obvykle pod název „analyse situs" a v nichž základní věty nepodařilo se dedukovati ze soustavy axiomů geometrie Descartovy.

Analyse situs pojednává o všeobecných vlastnostech spojitosti křivek, ploch a prostoru, ale uvažuje je dosud tak, jak jsou dány naším názorem v prostoru. Jest však názor náš ve všem všude logický? Lze to sice předpokládati, ale pak jest to patrně nové, samostatné tvrzení, jež by se muselo předem důkladně doložiti (viz paradoxon shora uvedené). Analyse situs jedná na př. o rodu mnohonásobně souvislých ploch tak, jak tyto dány jsou pouhým názorem. Chceme-li však vlastnosti takových ploch stanoviti přesně, mathematickými vztahy, musíme místo ploch (i ostatních útvarů), názorem pouze approximativně daných, míti přesně definované geometrické útvary v té geometrii, v níž naopak úvahy mathematické nejlépe a nejjednoduševji lze učiniti názornými, v analytické geometrii Descartově. Tímto způsobem arithmetisujeme analysi situs dosahujíce toho, že lze operovati s útvary přesně definovanými a že možno i spojitost jich vhodně definovati ve smyslu Jordanově; tímto způsobem můžeme však veškeren obsah analyse situs arithmetisovati a základní věty tak vzniklé analysovati na jich jednoduchost a dokazatelnost či nedokazatelnost z axiomů elementárné geometrie. A tu právě se počíná ukazovati, že uvedený systém nedostačuje k odvození všech těchto arithmetisovaných vět. Avšak bude to ještě delší dobu trvati, nežli umožněno bude k dosavadnímu systému připojiti nové základní věty, zásady, jež pak ovládnou nejen elementárnou geometrii, ale i partie vyšší, shrnuté v analysi situs, ve všeobecné nauce o spojitosti geometrických útvarů.

To vše jest vážnou námitkou proti Russellovu řešení a proti všem podobným pokusům, snažícím se stanoviti jednou pro vždy pro názor náš na prostor *nejmenší* počet základních zásad. Jeť v tom implicite zahrnut předpoklad, že názor ten jest hotov, kdežto dějiny geometrie učí spíše opak, že se totiž názor náš vyvíjí a stále tříbí. Byl zprvu jediný, Euklidův, od Lobačevského a Bolyaie byly dva, od Riemanna trojí a konečně se ukázalo, že nejen těchto nových jest nekonečně mnoho, nýbrž že i euklidických geometrií jest počet nekonečný. Nelze tedy jen tak upříti našemu názoru na prostor schopnost vývoje a míti za to, že onen minimální problém jest nebo bude definitivně řešen. Muselo by se současně dokázati, že názor, jenž se analysuje, jest hotový a neschopný dalšího vývoje. Mathematicky by se důkaz ten musel vésti tak, že by se ukázalo, že systém zásad, vystihujících onen názor, jest v sebe uzavřený, t. j. že nepřipouští rozšíření o žádnou nezávislou novou větu, aniž by současně některá ze zásad systému následkem toho pozbyla své platnosti. A není snad hřešeno, tvrdí-li se, že toho jsme ještě dosti daleko.

Jest zajisté vhodné vyjíti raději od geometrie projektivné, jež nemá zapotřebí čísel, metrických vztahů, a přejíti pak ku geometrii metrické a analytické. Neboť systém reálných čísel konstruován jest uměle, nezávisle na názoru, jsa založen na pojmu limity, jenž jest pojem konvencionálný, stejně jako i celá „vyšší mathematika", pokud jest založena na pojmu limity (počet differenciálný, integrálný, . . .) jest konvencionálnou. Proto vycházejí novější analysté od geometrie projektivné; tak to učinil Russell, tak podány jsou elementy geometrie od Enriqua v [1]. Přechod k metrické geometrii jest pak již snadný. Stačí k systému základních vět geometrie projektivné adjungovati jistou imaginárnou kuželosečku („kulový kruh") a geometrie metrická objeví se jako souhrn všech projektivných vlastností, jež mají útvary geometrické, precisují-li se vlastnosti tyto s ohledem na onu pomocnou imaginárnou kuželosečku. Obdobně vyjíti lze od analyse situs, ale pak použíti dlužno za příčinou nutné přesnosti k definicím křivých čar, ploch atd., pojmů vzatých z Cantorovy theorie množin (pokusy od Enriqua).

Vzájemné postavení těchto tří geometrií pochopí se pak velice snadno se stanoviska theorie transformací. Neboť metrická geometrie jest, jak známo, invariantní theorií „hlavní grupy" (G_7), projektivná invariantní theorií jisté patnáctičlenné grupy (G_{15}), utvořené kollineacemi prostoru*), a analysis situs inva-

*) V elementárné geometrii zůstanou vlastnosti útvarů nezměněny při pohybu a při transformacích podobných; nové koordinaty lze pak vy-

riantní theorií všech spojitých transformací bodových, jichž jest ovšem nekonečně mnoho (G_∞).

Jest možno též nezávisle na geometrii Descartově a následkem toho nezávisle na určitém systému souřadnic pojednávati o útvarech geometrických a operovati přímo s invarianty grupy potřebné právě k dedukcím vyvozovaným; úvahy tohoto rázu, zvané „přirozená geometrie", geometria intrinseca, pocházejí hlavně od E. Césara [1]. Snaha emancipovati geometrii zcela od čísel nemůže však míti úspěchu; neboť pojem čísla dostaví se ihned do geometrie, jakmile se jen jedna a táž konstrukce opakuje. Proto bylo a jest vždy prospěšné, uvésti do geometrie čísla způsobem nejen jednoduchým, ale i rigorosně přesným, a postaviti se na stanovisko ryze formální. Základním větám mezi body (A), přímkami (a), rovinami (α) odpovídají pak určité jednoduché vztahy mezi A, a, α, a tyto mohou i jinak býti interpretovány, čímž geometricky provedeno jest zobrazení prostoru na jiné předměty. Tím vznikne nový druh geometrie, tak zv. inversní, jež se stanoviska theorie transformací jest*) invariantní theorií grupy o deseti elementech (G_{10}).

Z úvah těchto i předchozích vysvítá však dosti jasně velká důležitost problému geometrického znázornění čísel (a naopak), problému zdánlivě nepatrného. Jsou to pak hlavně výsledky školy Veroneseovy a Hilbertovy, jimž věda geometrická děkuje za definitivní vyjasnění.

---

jádřiti jako lineárné funkce původních:

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2$$
$$z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3.$$

Z těchto koeficientů a_1, a_2, ... jest však pouze sedm na sobě nezávislých, šest pro pohyb a jeden pro transformaci na podobné útvary.

V projektivné geometrii vyjádřena jest nejvšeobecnější transformace vzorci

$$\varrho\, x_i = \sum_1^4 k\ aik\ xk, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Z šestnácti koefficientů a_{11}, a_{12}, ... jest však jen patnácte libovolných.

Analysis situs jedná o takových vlastnostech křivek, ploch a částí prostorových, které se nemění při žádné spojité deformaci. Takovýchto deformací jest patrně nekonečně mnoho.

*) V konkrétním případě.

Poznámka k Hilbertově soustavě geometrických axiomů.

Zásada V 2 jest logickým důsledkem zásad I—IV a V1, rozumí-li se axiomu III 6 tak, že se v trojúhelnících ABC a $A'B'C'$ připustí kterýkoliv smysl oběhu od vrcholu A resp. A' k B resp. B', odtud k C resp. C' a zpět k A resp. A', vzhledem k uzavřeným takto plochám (III 6 „v širším pojetí"). Předpokládá-li se však tentýž smysl oběhu pro oba trojúhelníky (III 6 „v užším pojetí"), pak zůstává V 2 na ostatních zásadách nezávislý axiom. Kde v úvaze mluveno bylo o zásadě III 6, vždy byla míněna „v širším pojetí"; omeziti ji na III 6 „v užším pojetí" a připojiti pak k systému větu V2 má význam jen tehdy, jedná-li se o geometrii nepythagorejskou, nazvanou tak dle toho, že v ní planimetrická věta Pythagorova neplatí. Geometrie tato jest nearchimedickou. K vůli úplnosti budiž uvedeno, že geometrie nepythagorejské jsou vlastně dvě; v prvé z nich neplatí žádný axiom spojitosti, v druhé však vyhověno jest zásadě V2.

Literatura.

Literatura o základech geometrie a jednotlivých základních větách geometrických jest neobyčejně rozsáhlá. Poukázáno budiž najmě na význačná díla a pojednání: *Pasch* [1], *Killing* [2] a [3], *Hilbert* [4], *Veronese* [1] a [2], *Levi-Cività* [1] a [2], *Enriques* [1]; k tomu pak, v ohledu na arithmetisování pojmů geometrických, na spisy: *Cantor* [1], [6], [9] a [10], *Lie* [1] a [2]. S hlediska noetického a psychologického důležitější jsou práce: *Milhaud* [1], *Poincaré* [1] a [3], *Russell* [3], *Hölder* [1], *Mach* [1]. Historie a bibliografie obsažena jest částečně v dílech: *Stäckel* a *Engel* [1], *Russell* [3] franc. překlad, *Enriques* [2]. V dalším uvedena literatura příslušná, jen pokud jest v nějakém, třeba nepřímém vztahu s rozborem článku tohoto*).

Andrade, [1] *Les bases expérimentales de la Géometrie euclidienne.* Revue philosophique, 1890 (II). — [2] dto. 1891 (I).

Ascoli, C. G. [1] *I fondamenti dell' algebra.* Rendiconti di reale Istituto lombardo di scienze e lettere. Sér. II. Vol. **27**, Milán 1895.

Ball, R. [1] *Theory of the Content.* Transactions of the Royal Irish Academy 1889.

*) Několik spisů z r. 1903, zařazených do literatury, jest vložkou z konce r. 1903.

Balser, L. [1] *Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.* Mathem. Ann. 55 (1901), str. 293—300.

Beltrami, E. [1] *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea.* Giornale di Battaglini, sv. 6 (1868), str.. 284-312. — [2] *Teoria generale degli spazii di curvatura constante.* Annali di Matematica, Ser. 2, sv. 2 (1869), str. 232—255; franc. překlad v Annales scient. de l'École normale sup., sv. 6 (1869), str. 251—288 od Hoüela.

Bois-Reymond, P. du [1] *Die allgemeine Funktionentheorie.* Tübingen, 1882.

Bolyai, J. [1] *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei independentem* (1832); vyšlo jako přídavek k F. Bolyaiově Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva introducendi, Máros-Vásárhely; německy od J. Frischaufa 1872; italsky „Sulla Scienza dello spazio assolutamente vera" od Battagliniho v Giornale di Battagl. sv. 6. (1868), str. 97—115; francouzsky od Hoüela 2. vyd. Paříž 1892; nejnověji v Pešti 1897.

Bonnel, [1] *Les hypothèses dans la Géométrie.* Paříž 1897.

Bosworth, L. [1] *Begründung einer vom Parallelenaxiom unabhängigen Streckenrechnung.* Dissertation, Göttingen 1900.

Calinon, [1] *Les espaces géométriques.* Revue philosophique, 1889 (I) — [2] dto. 1891 (II).

Cantor, G. [1] *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.* Mathem. Annal. sv. 5 (1872), str. 123—132; též Acta mathem. II (1883), str. 336—348. — [2] *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten.* Mathem. Annal. 15 (1879), str. 1—7. — [3] Pokrač., Mathem. Ann. 17 (1880), str. 355—358. — [4] Pokrač., Math. Ann. 20 (1882). str. 113—121. — [5] Pokrač. Math. Ann. 21 (1883), str. 51—58 a 545—586. — [6] *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.* Lipsko 1883. — [7] *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* Journal für Mathem. 77 (1874), str. 258—262. — [8] *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journal für Mathem. 84 (1877), str. 242—258. — [9] *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Math. Ann. 46 (1895), str. 481—512. — [10] Pokrač., Mathem. Ann. 49 (1897), str. 207—246.

Cassani, [1] *Geometria rigorosa.* Benátky 1892.

Cayley, A. [1] *On the Non-Euclidian Geometry.* Mathem. Ann. 5 (1872), str. 630—634.

Cèsaro, E. [1] *Geometria intrinseca.* Neapol 1896; něm. překlad „Vorlesungen über neueste Geometrie," Lipsko 1901.

Darboux, G. [1] *Leçons sur la théoric générale des surfaces,* sv. III. Paříž 1894.

Dedekind, R. [1] *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Brunšvík 1872.

Dehn, M. [1] *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck.* Mathem. Ann. 53 (1900). str. 404—439.

Delboeuf, [1] *Prolégomènes philosophiques de la Géométrie.* Paříž, 1860. — [2] *L'ancienne et les nouvelles Géométries.* Revue philosophique, t. 36—39, 1893—1895. — [3] *La géométrie euclidienne sans le postulatum d'Euclide.* Paříž 1897.

Duhamel, [1] *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.* Paříž 1866.

Engel, F. [1] *Zur Nichteuclidischen Geometrie.* Leipz. Berichte (1898), str. 181 a n. — [2] *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. I. N. I. Lobatschewskij.* Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers. Lipsko I. díl 1898, II. díl 1899. — [3] Viz Stäckel. — [4] Viz Stäckel.

Enriques, E. [1] *Lezioni di geometria projettiva.* Bologna 1898. — [2] *Questioni riguardanti la geometria elementare.* Bologna 1900.

Erdmann, B. [1] *Die Axiome der Geometrie.* Lipsko 1877.

Euclides, [1] *Stoicheia* (300 př. Kr.); nové vydání od Heiberga, Lipsko 1872.

Frischauf, J. [1] *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai bearbeitet.* Lipsko 1872. — [2] *Elemente der absoluten Geometrie.* Lipsko 1876. — [3] *Elemente der Geometrie.* Lipsko 1877.

Gauss, C. F. [1] *Grundlagen der Geometrie.* Gesammelte Werke sv. 8 (1900), str. 157—268.

Geissler, K. [1] *Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie.* Lipsko 1902. — [2] *Die geometrischen Grundvorstellungen und Grundsätze und ihr Zusammenhang.* Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, sv. 12 (1903), str. 265—288.

Hamel, G. [1] *Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind.* Dissertation, Göttingen 1901. — [2] *Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind.* Mathem. Ann. 57 (1903), str. 231—264.

Helmholtz, H. v. [1] *Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie.* Verhandlungen d. naturhistor. mediz. Vereines zu Heidelberg 1866, neb Wissenschaftl. Abhandl. II. Lipsko (1883), str. 610—617. — [2] *Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.* Göttinger Nachrichten (1868), str. 193—221, neb Wissenschaftl Abhandl. II. Lipsko (1883), str. 618—639. — [3] *Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome.* Vortrag 1870; nové vyd. 1896. — [4] *Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze.* Mind, 1878.

Hilbert, D. [1] *Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.* Mathem. Annal. 46 (1895), str. 91—96. — [2] *Grundlagen der Geometrie.* Lipsko 1899; franc. překlad od p. Laugela v Annales scient. de l'École normale sup., Sér. 3, sv. 17 (1900), str. 103—209; anglický překlad v Chicagu 1902. — [3] *Über den Zahlbegriff.* Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, sv. 8 (1900), str. 180—184. — [4] *Grundlagen der Geometrie.*

Vorträge im Sommersemester 1902, Göttingen. — [5] *Über die Grundlagen der Geometrie.* Nachrichten der königl. Gesellsch. zu Göttingen (1902), str. 233—241. — [6] *Über die Grundlagen der Geometrie.* Mathem. Annal. **56** (1903), str. 381—422. — [7] *Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewsky'schen Geometrie.* Mathem. Annal. **57** (1903), str. 137—150. — [8] *Grundlagen der Geometrie.* 2. vyd. Lipsko, 1903.

Hölder, O. [1] *Anschauung und Denken in der Geometrie.* Lipsko 1900.

Ingrami, [1] *Elementi die Geometria per le scuole secondarie superiori.* Bologna 1899.

Kant, E. [1] *Prolegomena zur jeder künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können.* Riga 1783.

Killing, W. [1] *Die nicht-euclidischen Raumformen in analytischer Behandlung.* Lipsko 1885. — [2] *Einführung in die Grundlagen der Geometrie.* Padeborn I. (1893). — [3] dto. díl II. (1898).

Klein, F. [1] *Über die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie.* Mathem. Ann. **4** (1871), str. 573—625. — [2] Pokrač., Mathem. Ann. **6** (1873) str. 112—145. — [3] Dodatek, Math. Ann. **7** (1874), str. 531—537. — [4] *Zur Nichteuclidischen Geometrie.* Math. Ann. **37** (1890), str. 544—572. — [5] *Höhere Geometrie.* Autograph. Vorlesungen. I. Teil 1892—3, II. Teil 1893, Göttingen-Leipzig. — [6] *Nicht Euclidische Geometrie.* Autograph. Vorlesungen, I. Teil 1889—90, II. Teil 1890. Göttingen-Leipzig. — [7] *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie.* Ausgearb. von F. Tägert (1895), Lipsko. — [8] *Zur ersten Verteilung des Lobatschewskij-Preises,* Nachrichten d. Univ. Kasan 1897; Mathem. Annal. **50** (1898), str. 583—600. — [9] *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie eine Revision der Principien.* Autograph. Vorlesungen, Lipsko 1902.

Knorr, [1] *Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie.* 1849.

Lambert, [1] *Theoria parallelarum.* Paříž 1766.

Legendre, A. [1] *Éléments de Géométrie.* Paříž 1794; nové vydání Paříž 1894.

Lechalas, [1] *La Géométrie générale.* Critique philosophique 1889. — [2] *La Géométrie générale et l'intuition.* Annales de Philosophie chrétienne, 1890.

Lerch, M. [1] *Pojem čísla iracionálného.* Časopis pro pěst. mathem. a fys., roč. **15** (1886) str. 178—182 a 229—235. — [2] *Základové ryze arithmetické teorie veličin.* Athenaeum 1886.

Levi-Civitá, P. [1] a [2] *Sui numeri transfiniti.* Rend. della reale Academia dei Lincei. Sér 5, sv. **7**, str. 91—96 a 113—121. Řím 1898.

Liard, [1] *Des définitions géométriques et des définitions empiriques,* 2. éd. Paris 1888.

Lie, S. [1] *Grundlagen der Geometrie* I. a II. díl. Leipziger Berichte 1890. — [2] *Theorie der Transformationsgruppen.* III. díl Lipsko 1893.

Lobačewskij, N. [1] *Exposition succinte des principes de la géométrie;* předloženo r. 1826 Uč. Spol. Kazaňské, ale netištěno. — [2] *O načaluch geometrij.* Kasaňský Věstník 1829—30. — [3] *Novyje načala geometrij.* Kasan. Uč. Spol. 1835—37; něm. překlad od Engla v Lipsku 1898 (viz Engel). — [4] *Géométrie imaginaire.* Journal für Mathem. sv. **17** (1837), str. 295—320. — [5] *Geometrische Untersuchungen über die Theorie der Parallellinien.* Berlín 1840. — [6] *Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles.* Kasan 1856; něm. překlad od Liebmanna v Ostwaldově klassicích č. 130, Lipsko 1902; italsky od Battagliniho v Giornale di Matematiche (1867).

Mach, E. [1]. *Die Analyse der Empfindungen.* Jena, 3. vyd. 1902.

Mansion, [1] *Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie.* Paříž 1893 — [2] *Premiers principes de la Métagéométrie ou géométrie générale.* Revue néo-scolastique, 1896.

Milhaud, [1] *La Géométrie non-euclidienne et la théorie de la connaissance.* Revue philosophique, 1888 (I).

Minkowski, H. [1] *Geometrie der Zahlen.* Lipsko 1896.

Pasch, M. [1] *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Lipsko 1882. — [2] *Über die uneigentlichen Geraden und Ebene.* Math. Ann. **32** (1888), str. 159—160.

Peano, G. [1] *Sui fondamenti della Geometria* Rivista di Matematica, Vol IV. (1894), str. 55 a n.

Pieri, [1] *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo.* Memor. della Accademia di Torino, 1899.

Poincaré, H. [1] *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.* Bulletin d. l. Société math. de France **15** (1887), str. 203—216. — [2] *Les Géométries non-euclidiennes.* Revue générale des Sciences pures et appliquées. 2e ann. Nr. **23** (1891). — [3] *L'espace et la géométrie.* Revue de Métaphysique et de Morale, (Novembre) 1895. — [4] *Réponse à quelques critiques.* Revue de Métaphysique et d. Morale, (Janvier) 1897.

Reyes y Prósper, V. [1] *Sur la géométrie non-Euclidienne.* Mathem. Annal. **29** (1887), str. 154—156. — [2] *Sur les propriétés graphiques des figures centriques.* Mathem. Ann. **32** (1888), str. 157—158.

Riemann, B. [1] *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Gesamm. Werke (Weber), Lipsko 1876, str. 254—269.

Russell, B. A. W. [1] *Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?* Revue de Metaphysique et de Morale. Novembre 1898. — [2] *Sur les axiomes de la Géométrie.* Revue de Metaphys. et de Mor., Novembre 1899. — [3] *An Essay on the Foundations of Geometry.* Cambridge 1797; *Essai sur les fondements de la Géométrie* Traduction par A. Cadenat, Paříž 1901.

Sacheri, G. [1] *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia.* Milán 1733.

Schlegel, V. [1] *System der Raumlehre.* Nach den Principien der Grassmann'schen Raumlehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt. I. díl. Lipsko 1872. — [2] II. díl 1875.

Schultze, [1] *Psychologie der Axiome.* Göttinky 1899.

Schur, F. [1] *Über den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen.* Mathem. Annal. **27** (1886), str. 537—567. — [2] *Über die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie.* Mathem. Ann. **39** (1891), str. 113—124. — [3] *Lehrbuch der analytischen Geometrie.* Lipsko 1898. — [4] *Über den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie.* Mathem. Annal. sv. **51** (1899), str. 401—409. — [5] *Über die Grundlagen der Geometrie.* Mathem. Annal. **55** (1901), str. 265—292.

Simon, [1] *Euklid und die sechs planimetrischen Bücher.* Lipsko, 1901.

Sorel, [1] *Sur la Géométrie non-euclidienne.* Revue philosophique, 1891 (I.).

Stäckel und Engel, [1] *Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuclidischen Geometrie.* Lipsko 1895. — [2] *Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuclidische Geometrie.* Mathem. Annal. **49** (1897), str. 149—206.

Staudt, v. [1] *Beiträge zur Geometrie der Lage.* Nürnberg 1856.

Tannery, P. [1] *Théorie de la connaissance mathématique.* Revue philosophique, 1894 (II.).

Thomae, S. [1] *Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage.* Halle 1873.

Tilly, de [1] *Recherches sur les éléments de la Géométrie.* Bruxelles 1860. — [2] *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique.* Bordeaux 1879. — [3] *Essai de Géométrie analytique générale.* Mathesis 1893.

Veronese, G. [1] *Fondamenti di Geometria.* Padua 1891; něm. překlad od Scheppa, Lipsko 1894. — [2] *Elementi di Geometria.* Verona-Padua 1897.

Whitehead, [1] *Universal Algebra.* I. Cambridge 1898.

Wiener, H. [1] *Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. sv. **1.** (1892), str. 45—48. — [2] Pokračov. v sv. **3.** (1894), p. 70—80.

Chronologický přehled.

— Euklides [1].
1763. Saccheri [1].
1766. Lambert [1].
1794. Legendre [1].
1826. Lobačevskij [1].
1829. Lobačevskij [2].
1832. Bolyai [1].
1835. Lobačevskij [3].
1837. Lobačevskij [4].
1840. Lobačevskij [5].
1849. Knorr [1].
1856. Lobačevskij [6], Staudt [1].

1860. Delboeuf [1], Tilly [1].
1866. Duhamel [1], Helmholtz [1].
1868. Beltrami [1], Helmholtz [2].
1869. Beltrami [2].
1870. Helmholtz [3].
1871. Klein [1].
1872. Cantor [1], Cassani [1], Cayley [1], Dedekind [1], Frischauf [1], Schlegel [1].
1873. Cantor [7], Klein [2], Thomae [1].
1874. Klein [3].
1875. Schlegel [2].
1876. Frischauf [2], Riemann [1].
1877. Cantor [8], Erdmann [1], Frischauf [3].
1878. Helmholtz [4].
1879. Cantor [2], Tilly [2].
1880. Cantor [3].
1882. Bois-Reymond [1], Cantor [4], Pasch [1].
1883. Cantor [5], [6].
1885. Killing [1].
1886. Lerch [1], [2], Schur [1].
1887. Poincaré [1], Reyes [1].
1888. Liard [1], Milhaud [1], Pasch [2], Reyes [2].
1889. Ball [1], Calinon [1], Lechalas [1].
1890. Andrade [1], Klein [4], [5], Lechalas [2], Lie [1].
1891. Andrade [2], Calinon [1], Poincaré [2], Schur [2], Sorel [1], Veronese [1].
1892. Wiener [1].
1893. Delboeuf [2], Killing [2], Klein [5], Lie [2], Mansion [1], Tilly [3].
1894. Darboux [1], Peano [1], Tannery [1], Wiener [2].
1895. Ascoli [1], Cantor [9], Hilbert [1], Klein [7], Poincaré [3], Stäckel u. Engel [1].
1896. Mansion [2], Minkowski [1].
1897. Bonnel [1], Cantor [10], Klein [8], Poincaré [4], Stäckel u. Engel [2], Veronese [2], Delboeuf [3], Russell [3].
1898. Engel [1], Killing [3], Levi-Cività [1], [2], Russel [1] Schur [3], Whitehead [1].
1899. Engel [2], Hilbert [2], Ingrami [1], Pieri [1], Russell [2], Schur [4], Schultze [1].
1900. Bosworth [1], Dehn [1], Gauss [1], Hilbert [3], Hölder [1].
1901. Balser [1], Hamel [1], Schur [5], Simon [1].
1902. Geissler [1], Hilbert [4], [5], Klein [9], Mach [1].
1903. Geissler [2], Hamel [3], Hilbert [6], [7], [8].

Göttinky, 1902.

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Výroční zpráva reálky v Hradci Králové. *Příspěvek k rovnoběžnému osvětlení rotačních ploch 2. stupně v centrálné projekci.* Napsal *Čeněk Nevečeřal.*

Předmětem uvedené práce jest v prvé řadě vyjádření mezi stínu vlastního ploch rotačních 2. stupně průměty centrálnými při osvětlení parallelním, když plocha leží souměrně vzhledem ke průmětně. Zdařilá práce tato, která se vesměs opírá o příslušné práce p. prof. K. Pelze, svědčí o tom, že si pan autor