Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 5, 570--594

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123516

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 21.

Rovina stojící kolmo ve středu (tělesné) úhlopříčky krychle seče ji v pravidelném šestiúhelníku; tento jest základnou dvojjehlanu, jehož vrcholy jsou ve vrcholech řečené úhlopříčky. Vypočítejte povrch a obsah tohoto dvojjehlanu, dána-li hrana krychle.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Josef Slovák*, kand. uč. v Kroměříži. Těleso omezeno jest 12ti rovnoramennými trojúhelníky, jejichž půdice $s = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, rameno $r = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, pročež povrch tělesa

$$P = 12 \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} a \sqrt{2} = \frac{9}{2} a^2.$$

Společná základna jehlanů jest pravidelný šestiúhelník o straně $s = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, jehož plocha jest tedy

$$p = 6 \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3};$$

jelikož výška jehlanů

$$v = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

jest obsah tělesa

$$V = 2 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{4} a^3.$$

Poznámka. Poněvadž

$$P = \frac{3}{4} \cdot 6a^2,$$

rovná se povrch tohoto tělesa $\frac{3}{4}$ povrchu, a krychlový obsah $\frac{3}{4}$ obsahu krychle; příčina této úměrnosti jest, že těleso opsáno jest téže kouli jako krychle sama.

Úloha 22.

Nejdelší strana šikmého kužele opsaného kouli jest $AC = 72$, *nejkratší $BC = 58$, spojnice jejich pat $AB = 50$. Vypočítejte krychlový obsah tohoto kužele.*

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Rudolf Marek*, stud. VII. třídy reál. v Náchodě.

Bod F, v němž se koule kuželi vepsaná dotýká elliptické základny, jest ohnisko této křivky, jejíž hlavní osa

$$2a = AB = 50.$$

Zmíněná koule má týž poloměr jako kruh vepsaný trojúhelníku ABC, a ohnisko F dělí osu AB na částky $AF = 32$, $FB = 18$, jakož snadno vypočteme.

Odtud najdeme pro výstřednost

$$c = a - FB = 25 - 18 = 7$$

a za vedlejší poloosu

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Plocha základny jest tedy

$$E = \pi ab = \pi \,.\, 25 \,.\, 24 = 600\pi.$$

Výška kužele srovnává se s výškou trojúhelníka ABC, příslušnou základně AB; tato pak výška rovná se ploše trojúhelníka ABC, dělené polovicí základny jeho AB, pročež dle vzorce Heronova $v = \frac{1440}{25} = \frac{288}{5}$ a obsah kužele

$$V = \frac{1}{3} \,.\, \frac{288}{5} \,.\, 600\pi = 11520\pi.$$

Úloha 23.

Řešiti jest rovnoramenný lichoběžník, jemuž lze vepsati kružnici, dána-li jeho úhlopříčka u a výška v.

$$(\textit{Na př.}\ u = \sqrt{775},\ v = \sqrt{375}).$$

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *Ladislav Stypa*, stud. VII. tř. č. gymn. v Opavě.

Jsou-li a, b půdice lichoběžníka, jest

$$v^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Jsou tedy a, b kořeny rovnice kvadratické

$$x^2 - 2x\sqrt{u^2 - v^2} + v^2 = 0;$$

odtud při $a > b$ ustanovíme

$$a = \sqrt{u^2 - v^2} + \sqrt{u^2 - 2v^2},$$
$$b = \sqrt{u^2 - v^2} - \sqrt{u^2 - 2v^2}.$$

Úhel α při větší z půdic stanoví vzorec

$$\cos\alpha = \frac{a-b}{a+b} = \sqrt{\frac{u^2 - 2v^2}{u^2 - v^2}}.$$

Při daných hodnotách zvláštních obdržíme

$$a = 25, \quad b = 15, \quad \cos\alpha = \frac{1}{4}.$$

Úloha 24.

Rovnoramenný lichoběžník abcd, ve kterém

$$\overline{ab} = 2a, \quad \overline{bc} = \overline{cd} = \overline{da} = a,$$

rozdělen jest úhlopříčkami ve 4 trojúhelníky. Vypočítati obsah a úhly deltoidu, jehož vrcholy jsou ve středech kružnic, těmto trojúhelníkům vepsaných.

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *Josef Klíma*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.

Úhlopříčky $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ protínejtež se v bodě s; středy kružnic vepsaných v trojúhelníky abs, bcs, cds, das nechť jsou po řadě o_1, o_2, o_3, o_4, poloměry kružnic těch ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, $\varrho_4 = \varrho_2$. Potom jest

$$\varrho_1 = a \operatorname{tg} 15^0 = a\,(2 - \sqrt{3}),$$

$$\varrho_2 = (a - \varrho_2) \operatorname{tg} 15^0, \quad \varrho_2 = \frac{a}{6}\,(3 - \sqrt{3}),$$

$$\varrho_3 = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 15^0 = \frac{a}{2}\,(2 - \sqrt{3}).$$

Dále jest, značí-li $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ výšku lichoběžníka,

$$\overline{o_1 s} = \frac{2}{3}\,v - \varrho_1 = \frac{2}{3}\,a\,(2\sqrt{3} - 3),$$

$$\overline{o_3 s} = \frac{1}{3} v - \varrho_3 = \frac{1}{3} a (2\sqrt{3} - 3),$$

$$\overline{o_2 s} = \overline{o_4 s} = \frac{\varrho_2}{\sin 30^0} = \frac{a}{3} (3 - \sqrt{3}).$$

Jsou tedy úhlopříčky deltoidu $o_1 o_2 o_3 o_4$

$$\overline{o_1 o_3} = a (2\sqrt{3} - 3), \quad \overline{o_2 o_4} = \frac{2}{3} a (3 - \sqrt{3}),$$

pročež obsah jeho

$$\varDelta = \frac{1}{2} \overline{o_1 o_3} \,.\, \overline{o_2 o_4} = a^2 (3\sqrt{3} - 5).$$

Označíme-li úhly deltoidu

$$\sphericalangle\, o_2 o_1 o_4 = \alpha, \quad \sphericalangle\, o_1 o_2 o_3 = \sphericalangle\, o_1 o_4 o_3 = \beta, \quad \sphericalangle\, o_2 o_3 o_4 = \gamma,$$

jest

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{o_2 s}{o_1 s} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{o_2 s}{o_3 s} = 1 + \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3} (3 + \sqrt{3}), \quad \operatorname{tg} \gamma = -\frac{2}{3} (3 - \sqrt{3});$$

ze vzorce

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

vypočítáme

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}.$$

Úloha 25.

V pravidelném osmistěnu o hraně a vepsány kruhy do dvou protějších stěn. Který jest obsah válce, jehož základnami jsou tyto kruhy? Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *Alois Kvapil*, stud. VII. třídy gymn. v Olomouci.

Základny válce jsou kruhy o poloměrech

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{6} \sqrt{3},$$

výška válce jest průměr koule vepsané osmistěnu, tedy

$$v = \frac{a}{3} \sqrt{6}.$$

Jest proto obsah válce

$$V = \pi r^2 v = \frac{\pi}{36} a^3 \sqrt{6}.$$

Obsah koule osmistěnu vepsané jest

$$K = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{27} a^3 \sqrt{6},$$

pročež

$$V : K = 3 : 4.$$

Úloha 26.

Do koule vyvrtána jest kuželovitá dutina tak, že vrchol tohoto dutého kužele jest na povrchu koule a osa jeho splývá s průměrem koule. Jak veliký musí býti úhel osového řezu kužele, aby obsah dutiny rovnal se polovině obsahu koule?

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *Aug. Štícha*, stud. VII. tř. r. v Praze-III.

Je-li r poloměr koule, ϱ poloměr hrany kruhové, v výška příslušné úseče, jest obsah dutiny

$$D = \frac{\pi}{3} \varrho^2 (2r - v) + \frac{\pi}{3} v^2 (3r - v) = \frac{2\pi}{3} r^3.$$

Odtud vyplývá

$$2r^3 = \varrho^2 (2r - v) + v^2 (3r - v),$$

a protože

$$\varrho^2 = v (2r - v),$$

jest

$$2r^3 = v (2r - v)^2 + v^2 (3r - v).$$

Z toho jde rovnice kvadratická

$$v^2 - 4rv + 2r^2 = 0,$$

tudíž

$$v = r (2 - \sqrt{2}).$$

Je-li α žádaný úhel, jest

$$\cos \alpha = \frac{r - v}{r},$$

z čehož

$$\cos \alpha = \sqrt{2} - 1; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Úloha 27.

Kruhový kužel obsahu K jest naplněn vodou. Postavíme-li jej na vrchol tak, aby jedna povrchová přímka byla svislou, zůstane v něm množství vody k. Který jest úhel osového řezu kužele?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *Ed. Brzobohatý*, stud. VIII. tř. gymn. v Brně.

Značí-li r poloměr, v výšku kužele, jest

$$K = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

Strana s nechť svírá se základnou úhel α; potom jest úhel osového řezu

$$\beta = 2(R - \alpha).$$

Postavíme-li kužel tak, že jedna strana s má polohu svislou, vyplňuje voda kužel elliptický. Poloosy základny jsou

$$a = r \sin\alpha, \quad b = r\sqrt{\cos\beta}.$$

Jest proto

$$k = \frac{1}{3}\pi ab s \cos\beta$$

čili
$$k = \frac{1}{3}\pi r^2 s \sin\alpha \cos\beta \sqrt{\cos\beta};$$

poněvadž pak
$$K = \frac{1}{3}\pi r^2 s \sin\alpha,$$

jest
$$\frac{k}{K} = \cos\beta\sqrt{\cos\beta},$$

pročež
$$\cos\beta = \sqrt[3]{\left(\frac{k}{K}\right)^2}.$$

Úloha 28.

Na které zeměpisné šířce jest v době rovnodennosti v pravé poledne vržený stín koule na rovinu vodorovnou roven a) povrchu té koule, b) polovici tohoto povrchu?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *Jan Štojdl*, stud. VII. třídy reál. v Budějovicích.

Je-li φ zeměpisná šířka místa, α výška slunce v pravé poledne o rovnodennosti, jest

$$\alpha = 90^0 - \varphi.$$

Stín koule poloměru r jest ellipsa poloos

$$a = \frac{r}{\sin\alpha}, \quad b = r,$$

tudíž obsah stínu

$$S = \pi ab = \frac{\pi r^2}{\sin\alpha} = \frac{\pi r^2}{\cos\varphi}.$$

Má-li býti $S = 4\pi r^2$,

jest $\cos\varphi = \frac{1}{4}, \quad \varphi = 75^0 27' 21'';$

při $S = 2\pi r^2$

jest $\cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^0.$

Úloha 29.

Sestrojiti jest úhel φ vyhovující rovnici

$$a \cos\varphi + b \sin\varphi = c.$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Frant. Grössl*, stud. VII. tř. reál. na Král. Vinohradech.

V pravoúhlé soustavě souřadnic sestrojme kružnici středu (0, 0) a poloměru c; bodem $x = a$, $y = b$ stanovme ke kružnici té tečnu. Úhel, jejž příslušná normála tvoří s X, jest žádaný úhel φ. Neboť normálná rovnice tečny sestrojené jest

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = c$$

a poněvadž tečna jde bodem (a, b), jest

$$a \cos\varphi + b \sin\varphi = c.$$

Úloha 30.

V přímce $P \equiv 2x + 3y - 18 = 0$
ustanoviti jest bod mající od bodů

$$a(13, 6), \quad b(2, 9)$$

a) největší rozdíl vzdáleností, b) nejmenší součet vzdáleností.

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Viktor Trkal*, stud. VI. tř. gymn. ve Vys. Mýtě.

a) Jelikož body a, b leží na stejné straně přímky P, jest bodem c majícím největší rozdíl vzdáleností $\overline{ac} - \overline{bc} = r$ průsečík přímky P s přímkou $\overline{ab}$.

Rovnice přímky $M \equiv ab$ jest však

$$M \equiv 3x + 11y - 105 = 0,$$

pročež souřadnice bodu c

$$x_1 = -9, \quad y_1 = 12;$$
$$r = \overline{ab} = \sqrt{130}.$$

b) Abychom v přímce P ustanovili bod d, pro který součet $\overline{ad} + \overline{bd} = s$ má hodnotu co nejmenší, ustanovme k bodu a dle přímky P souměrný bod a', načež spojnice $\overline{a'b}$ určuje v P bod žádaný d.

Přímka $\overline{aa'}$, jejíž rovnice jest

$$3x - 2y - 27 = 0,$$

protíná P v bodě p o souřadnicích

$$x = 9, \quad y = 0;$$

nazveme-li x', y' souřadnice bodu a', jest tedy

$$\frac{x' + 13}{2} = 9, \quad \frac{y' + 6}{2} = 0,$$

z čehož $\qquad x' = 5, \quad y' = -6.$

Spojnice $N \equiv a'b$ má pak rovnici

$$N \equiv 5x + y - 19 = 0,$$

tudíž průsečík její d s přímkou P má souřadnice

$$x_2 = 3, \quad y_2 = 4;$$

mimo to jest

$$s = \overline{ad} + \overline{bd} = \overline{a'b} = \sqrt{234},$$
$$r : s = \sqrt{5} : 3.$$

Jiné řešení. Zaslal p. *J. Skolil,* stud. VII. tř. r. v Žižkově.

Souřadnice bodů hledaných vyhoví rovnici

$$\sqrt{(x-13)^2 + (y-6)^2} \pm \sqrt{(x-2)^2 + (y-9)^2} = N_{1,2},$$

kdež N_1 značí hodnotu minima součtu, N_2 hodnotu maxima rozdílu.

Z podmínky $\quad 2x + 3y - 18 = 0$

vyjádřeme x a dosaďme do rovnice prvé. Dvakráte zdvojmocnivše obdržíme rovnici

$$13(117 - N^2)y^2 - 78(78 - N^2)y + N^4 - 364N^2 + 6084 = 0,$$

jejíž diskriminant jest

$$39^2(78 - N^2)^2 - 13(117 - N^2)(N^4 - 364N^2 + 6084)$$
$$= 13N^2(N^4 - 364N^2 + 30420).$$

Z rovnice $N^4 - 364 N^2 + 30420 = 0$
ustanovíme $N_1 = \sqrt{234}$, $N_2 = \sqrt{130}$,
k čemuž příslusí body

$$d(3, 4), \quad c(-9, 12).$$

Úloha 31.

Kterou křivku značí v pravoúhlé soustavě rovnice

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{a} \ ?$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Václav Urbánek*, stud. VIII. tř. gymn. v Ml. Boleslavi.

Upravíme-li danou rovnici na tvar racionálný, obdržíme

$$y^2 = ax - \frac{a^2}{4} = a\left(x - \frac{a}{4}\right).$$

Značí tedy rovnice daná parabolu, jejíž vrchol jest v bodě

$$x = \frac{a}{4}, \ y = 0$$

a jejíž parametr $p = \frac{a}{2}$; osa Y jest přímkou řídící.

Úloha 32.

V které vzájemnosti jsou křivky dané rovnicemi

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{y-9} = \sqrt{x+y-1}$$
$$\sqrt{x-4} + \sqrt{y-9} = \sqrt{x+y-25} \ ?$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Bohuslav Nič*, stud. VII. tř. reál. v Lounech.

Rovnicím daným lze dáti tvar racionálný, když každou z nich dvakráte zdvojmocníme; po prvém zdvojmocnění obdržíme

$$\sqrt{(x-4)(y-9)} = \pm 6,$$

po druhém zdvojmocnění v obou případech přijdeme k témuž výsledku $xy - 9x - 4y = 0$;
pročež *obě rovnice značí tutéž křivku.*

Píšeme-li rovnici její v podobě

$$(x-4)(y-9)=36,$$

poznáme ihned, že jest to pravoúhlá hyperbola středu s (4, 9) a výstřednosti $e=12$; asymptoty její jsou rovnoběžny k osám souřadným.

Úloha 33.

O rovnoramenný trojúhelník opsána parabola, jejíž vrchol jest v temeni trojúhelníka. Plocha omezená parabolou a rameny trojúhelníka rovná se obsahem čtverci vepsanému v trojúhelník rovnoramenný a spočívajícímu na jeho půdici. Které jsou úhly trojúhelníka?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *Josef Ševčík*, stud. VII. tř. r. v Jevíčku.

Vrchol o paraboly budiž temenem rovnoramenného trojúhelníka aob vepsaného parabole; výška jeho $oc \perp ab$ leží v ose paraboly. Označme $\overline{oc}=x$, $\overline{ac}=y$.

Plocha paraboly položená vně trojúhelníka aob jest

$$P=\frac{4}{3}xy-xy=\frac{1}{3}xy.$$

Je-li s strana čtverce vepsaného v trojúhelník aob, jest

$$x:(x-s)=2y:s,$$

pročež
$$s=\frac{2xy}{x+2y}.$$

Dle podmínky má býti $P=s^2$, tudíž

$$\frac{4x^2y^2}{(x+2y)^2}=\frac{xy}{3};$$

odtud plyne rovnice

$$4y^2-8xy+x^2=0,$$

z níž
$$\frac{y}{x}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Jest však
$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha,$$

značí-li $\alpha=\sphericalangle coa$; má tudíž α dvé hodnot, při kterých

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}75^0,\quad \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}15^0.$$

Úloha 34.

Na ose paraboly dány body a, b; ustanoviti jest na parabole bod m, aby paprsek $\overline{am}$ v bodě m od paraboly odražený procházel bodem b.

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Karel Hejl*, stud. VIII. tř. g. v Brně.

Rovnice paraboly budiž

$$y^2 = 2px;$$

dané body určeny úsečkami

$$\overline{oa} = a, \quad \overline{ob} = b,$$

bod hledaný m měj souřadnice x, y.

Značí-li A, A_1, A_2 směrnice tečny T v bodě m, spojnice $\overline{am}$ a spojnice $\overline{bm}$, jest

$$A = \frac{p}{y}, \quad A_1 = \frac{y}{x-a}, \quad A_2 = \frac{y}{x-b}.$$

Spojnice $\overline{am}$ svírá s tečnou T úhel α, $\overline{bm}$ a T tvoří úhel β; oba úhly tyto jsou ostré a jest $\alpha = \beta$.

Jelikož jest při $a < b$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{p}{y}}{1 + \frac{p}{x-a}}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{p}{y} - \frac{y}{x-b}}{1 + \frac{p}{x-b}},$$

dospějeme k rovnici podmínečné

$$\frac{y^2 - p(x-a)}{x-a+p} = \frac{p(x-b) - y^2}{x-b+p}$$

čili $\quad (x+a)(x-b+p) + (x+b)(x-a+p) = 0.$

Rovnice tato po náležité úpravě jeví se ve tvaru

$$x^2 + px - ab + \frac{1}{2}(a+b)p = 0,$$

odkud řešením ustanovíme

$$x = \sqrt{\left(a - \frac{p}{2}\right)\left(b - \frac{p}{2}\right)} - \frac{p}{2}.$$

K druhému kořenu rovnice netřeba přihlížeti; jsa záporným, nenáleží realnému bodu paraboly.

Dle výsledku počtem nabytého lze bod m na parabole snadně sestrojiti. Je-li f ohnisko paraboly, rovná se úsečka bodu m střední měřické úměrné délek $\overline{fa}$, $\overline{fb}$ zmenšené o délku $\overline{of}$.

Poznámka redakční. Aby úloha měla realné řešení, jest vyhověti těmto podmínkám:

$$(a-\frac{p}{2})(b-\frac{p}{2})>0, \quad x<0.$$

Druhá z těchto podmínek může býti psána ve tvaru

$$(a-\frac{p}{2})(b-\frac{p}{2})>\frac{p^2}{4},$$

pročež zahrnuje v sobě též první. Plyne pak z ní

$$p<\frac{2ab}{a+b},$$

čehož geometrický význam jest tento: Sestrojíme-li k vrcholu o paraboly bod c harmonicky sdružený dle bodů a, b, vyžaduje realnost řešení úlohy, aby byl parametr $p<\overline{oc}$. Dle podmínky prvé jest patrno, že při tom musí býti

$$a>\frac{p}{2}, \quad b>\frac{p}{2},$$

t. j. oba dané body leží od ohniska na té straně osy, která neobsahuje vrchol paraboly.

Úloha 35.

Která jest číselná výstřednost ellipsy, má-li se strana čtverce vepsaného ku straně čtverce opsaného jako 2 : 3?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *Methoděj Straka*, stud. VII. tř. reál v Hodoníně.

Budiž osová rovnice ellipsy

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2;$$

položíme-li $x=y$, ustanovíme

$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

načež strana s_1 vepsaného čtverce určena výrazem

$$s_1=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Jedna ze stran opsaného čtverce má rovnici tvaru

$$x+y=c;$$

hledáme-li body společné této přímce a ellipse, obdržíme — vyloučíce y — rovnici

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2a^2cx + a^2(c^2 - b^2) = 0.$$

Má-li přímka býti tečnou ellipsy, musí rovnice tato míti dva stejné kořeny; k tomu nutnou jest podmínka

$$a^4c^2 - a^2(a^2 + b^2)(c^2 - b^2) = 0,$$

z níž vypočítáme $\qquad c^2 = a^2 + b^2.$

Je-li s_2 strana čtverce ellipse opsaného, jest tudíž

$$s_2 = c\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Dle podmínky v úloze má býti

$$s_1 : s_2 = 2 : 3,$$

což vyjadřuje úměra

$$2ab : (a^2 + b^2)\sqrt{2} = 2 : 3$$

aneb rovnice $\qquad 2b^2 - 3ab\sqrt{2} + 2a^2 = 0,$

z níž ustanovíme $\qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Číselná výstřednost ellipsy jest pak

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Úloha 36.

V kterém poměru k ploše ellipsy

$$x^2 + 9y^2 = 18y$$

jest plocha kruhu určeného průsečíky této ellipsy s konfokálnou rovnoosou hyperbolou?

Jan. Schüller, posl. filosof. v Praze.

Řešení. Zaslal p. *Ferd. Březina*, stud. VIII. tř. gymn. v Jindř. Hradci.

Daná ellipsa má střed $s\,(0, 1)$ a poloosy $a = 3$, $b = 1$. Konfokálná s ní hyperbola má s ní společná ohniska; pročež výstřednost obou bude

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}.$$

Realná poloosa a' hyperboly vyhovuje podmínce

$$e = a'\sqrt{2}, \quad a' = 2$$

a rovnice hyperboly jest

$$x^2 - (y-1)^2 = 4$$

čili
$$x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0.$$

Průsečíky obou křivek jsou body

$$P_1\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_2\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$P_3\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_4\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2},\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right),$$

jimiž prochází kružnice
$$x^2 + (y-1)^2 = 5.$$

Jest tedy obsah ellipsy $E = \pi ab = 3\pi$, obsah kruhu $K = \pi r^2 = 5\pi$, pročež
$$E : K = 3 : 5.$$

Úloha 37.

Jak velká jest část kruhu
$$x^2 + y^2 - 2y\sqrt{3} - 9 = 0$$
obsažená vně ellipsy
$$4x^2 + 9y^2 = 144?$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Josef Hušek*, stud. VII. tř. reál. v Pardubicích.

Daný kruh má střed $s\ (0, \sqrt{3})$ a poloměr $r = 2\sqrt{3}$; reálné jeho průsečíky s ellipsou jsou body
$$m\ (3,\ 2\sqrt{3}),\quad n\ (-3,\ 2\sqrt{3}).$$

Část P kruhu obsažená vně ellipsy jest rozdílem úseče kruhové U_1 a úseče elliptické U_2 na společné tětivě $\overline{mn}$,
$$P = U_1 - U_2.$$

Označíme-li $\sphericalangle\, msn = 2\alpha$, jest
$$\sin\alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ pročež } \alpha = 60^\circ;$$
$$U_1 = \frac{r^2}{2}(\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha) = 4\pi - 3\sqrt{3}.$$

Elliptická úseč U_2 má obsah
$$U_2 = \frac{a^2}{2}(\operatorname{arc} 2\beta - \sin 2\beta)\,.\,\frac{b}{a},$$

značí-li a, b poloosy ellipsy a 2β úhel $m_1 o n_1$; $\overline{m_1 n_1}$ jest tětiva v kruhu nad hlavní osou sestrojeném, rovná a rovnoběžná s tětivou mn.

Jelikož jest $a = 6$, $b = 4$,

$$\sin\beta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\ \beta = 30^0,$$

jest
$$U_2 = 4\pi - 6\sqrt{3};$$
proto plocha hledaná
$$P = U_1 - U_2 = 3\sqrt{3}.$$

Poznámka redakční. Zajímavo jest, že tato plocha omezená obloukem kruhovým a obloukem elliptickým rovná se obsahem trojúhelníku msn; jestiť obsah jeho

$$\varDelta = \frac{1}{2} r^2 \sin 120^0 = 3\sqrt{3} = P.$$

Kružnicí dělí se plocha ellipsy ve dvě části, z nichž P_1 jest vnitř kružnice, P_2 vně kružnice. Jest pak

$$P_1 = 12\pi - 3\sqrt{3},\ P_2 = 12\pi + 3\sqrt{3},$$

pročež
$$P_2 - P_1 = 6\sqrt{3} = 2P = 2\varDelta.$$

Úloha 38.

Jak velká jest část ellipsy

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

obsažená vně kruhu

$$x^2 + y^2 - 15y + 8\frac{1}{4} = 0?$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Frant. Kvasnička,* stud. VII. tř. reál. v Jičíně.

Rovnici daného kruhu lze psáti

$$x^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = 48;$$

poznáváme odtud střed $s\left(0, \frac{15}{2}\right)$ a poloměr $r = 4\sqrt{3}$.

Poloosy ellipsy jsou $a = 4$, $b = 3$. Průsečíky obou křivek určeny souřadnicemi

$$m\left(2\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right), \quad n\left(-2\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right).$$

K tětivě $\overline{mn}$ přiléhá úseč kruhová U_1 a úseč elliptická U_2; z celé elliptické plochy E leží vně kruhu část

$$P = E - (U_1 + U_2),$$

kterou jest stanoviti.

Je-li $\sphericalangle msn = 2\alpha$, jest

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^0$$

a obsah úseče

$$U_1 = \frac{r^2}{2}(\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha) = 4(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Nad hlavní osou ellipsy sestrojme kruh a v něm tětivu

$$\overline{m_1 n_1} = \overline{mn}, \quad \overline{m_1 n_1} \parallel \overline{mn};$$

budiž pak $\quad \sphericalangle m_1 o n_1 = 2\beta,$

pročež $\quad \sin\beta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta = 60^0.$

Obsah úseče elliptické vyjádříme

$$U_2 = \frac{a^2}{2}(\operatorname{arc} 2\beta - \sin 2\beta) \cdot \frac{b}{a} = 4\pi - 3\sqrt{3},$$

odkud dále ustanovíme

$$U_1 + U_2 = 12\pi - 15\sqrt{3},$$
$$P = 12\pi - (12\pi - 15\sqrt{3}) = 15\sqrt{3}.$$

Poznámka redakční. Plocha P jest výraz neracionálný, ale nikoli transcendentní; neobsahuje π. Ustanovíme-li v ose Y bod p mající od $\overline{mn}$ vzdálenost $v = \frac{15}{2}$, jest obsah trojúhelníka mnp

$$\Delta = \frac{1}{2}\overline{mn} \cdot v = 2\sqrt{3} \cdot \frac{15}{2} = 15\sqrt{3};$$

jest tedy $\quad P = \Delta.$

Úloha 39.

K hyperbole rovnoosé dané rovnicí $xy = k^2$ sestrojena v bodě n normála N protínající křivku v dalším bodě n_1; v tomto zřízena normála N_1 stanovící nový průsečík n_2 atd. Které jsou souřadnice těchto průsečíků?

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Bedřich svob. p. Procházka,* stud. VIII. tř. gymn. v Praze-III.

Tečna k dané hyperbole v bodě $n\,(x_0, y_0)$ má rovnici

$$y_0 x + x_0 y = 2k^2,$$

pročež rovnice normály v témž bodě jest

$$y - y_0 = \frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Poněvadž jest $x_0 y_0 = k^2$, lze rovnici tuto upraviti na tvar

$$x_0^3 x - k^2 x_0 y = x_0^4 - k^4.$$

Body společné této normále a hyperbole jsou $n\,(x_0, y_0)$ a $n_1\,(x_1, y_1)$; úsečky obou jsou kořeny rovnice

$$x_0^3 x^2 - (x_0^4 - k^4)\, x - k^4 x_0 = 0.$$

Jest však $\qquad x_0 x_1 = -\dfrac{k^4}{x_0^2},$

tudíž $\qquad x_1 = -\dfrac{k^4}{x_0^3};$

vynecháme-li nyní pro pohodlnější psaní ukazatele 0, obdržíme

$$x_1 = -\frac{k^4}{x^3}, \quad y_1 = -\frac{k^4}{y^3}.$$

Souřadnice dalších průsečíků $n_2\,(x_2, y_2)$, $n_3\,(x_3, y_3)$ atd. ustanovíme dle obdoby takto

$$x_2 = -\frac{k^4}{x_1^3} = \frac{x^9}{k^8}, \quad x_3 = -\frac{k^4}{x_2^3} = -\frac{k^{28}}{x^{27}}, \ldots$$

Pro x obdržíme tudíž řadu

$$-\frac{k^4}{x^3}, \quad \frac{x^9}{k^8}, \quad -\frac{k^{28}}{x^{27}}, \quad \frac{x^{81}}{k^{80}}, \quad -\frac{k^{244}}{x^{243}}, \ldots$$

a obdobně pro y.

Poznámka redakční. Členy těchto řad lze obecně vyjádřiti výrazem

$$x_n = (-1)^n . k \left(\frac{x}{k}\right)^{(-3)^n},$$

$$y_n = (-1)^n . k \left(\frac{y}{k}\right)^{(-3)^n}.$$

Úloha 40.

Za podmínek úlohy předešlé sestrojena jest k hyperbole v bodě n kružnice křivosti, protínající hyperbolu v bodě m. Dokažte, že body m, n_1 jsou sdruženy souměrně dle středu hyperboly.

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Vilém Rychlík*, stud. VII. tř. akad. gymn. v Praze.

Kuželosečka $\quad S - kLM = 0$

protíná dle principu Laméova kuželosečku $S = 0$ v bodech, ve kterých ji protínají přímky $L = 0$, $M = 0$. Je-li M tečnou křivky S v bodě (x_0, y_0), splynou v něm dva průsečíky, kuželosečky se v bodě tom dotýkají. Prochází-li též L bodem (x_0, y_0), mají v něm obě kuželosečky styk trojbodový, a čtvrtý průsečík kuželoseček je druhý průsečík čar S a L.

V daném případě jest

$$S \equiv xy - k^2 = 0,$$

$$M \equiv y_0 x + x_0 y - 2k^2 = 0,$$

$$L \equiv A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Stálé A, B lze tak ustanoviti, aby rovnice

$$S - LM = 0$$

značila kruh; tu musí býti

$$A = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad B = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

a

$$L \equiv x_0 x + y_0 y - x_0^2 - y_0^2 = 0.$$

Průsečík $m(x', y')$ přímky L s hyperbolou S má souřadnice

$$x' = \frac{y_0^2}{x_0}, \quad y' = \frac{x_0^2}{y_0};$$

souřadnice bodu n_1 jsou dle úlohy předešlé

$$x_1 = -\frac{k^4}{x_0^3} = -\frac{y_0^2}{x_0},$$

$$y_1 = -\frac{k^4}{y_0^3} = -\frac{x_0^2}{y_0},$$

tudíž

$$x' = -x_1, \quad y' = -y_1.$$

Tím dokázáno, co tvrzeno.

Sluší poznamenati, že přímka $L = \overline{mn}$ stojí kolmo na $\overline{on}$.

Poznámka redakční. Kružnice

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

protíná hyperbolu $xy = k^2$
obecně ve 4 bodech, jichž úsečky x, x', x'', x''' jsou kořeny rovnice $x^4 + ax^3 + cx^2 + bk^2x + k^4 = 0$;
jest tedy $x\,x'\,x''\,x''' = k^4$.

Kružnice křivosti sestrojená v bodě n má na tomto místě s hyperbolou tři body společné

$$x = x'' = x'''$$

a protíná ji v dalším bodě m, pro který tudíž

$$x' = \frac{k^4}{x^3}.$$

Dle úlohy předešlé jest pro bod n_1

$$x_1 = -\frac{k^4}{x^3},$$

tudíž $x' = -x_1$;
tím dokázáno, že body m a n_1 jsou sdruženy souměrně dle středu hyperboly.

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Balcar Otakar, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 40.

Barbořík Arnošt, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 21., 23. až 26., 28. až 37.

Boček Oldřich, stud. VII. tř. r. v Praze (Ječná ul.), úl. 23., 30., 32.

Brzobohatý Ed., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 40.

Březina Ferdinand, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 21. až 25., 28., 29., 31., 32., 33., 35., 36.

Čermanović Milivoje, stud. med. ve Vídni, úl. 21. až 25., 29. až 32., 35.

Čihák Otakar, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 23., 31.
Cupr Karel, stud. VIII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 21. až 40.
Daněk Slavomil, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21., 23. až 36., 39., 40.
Dašek Václav, stud. VI. tř. r. v Náchodě, úl. 21. až 40.
Duřpek Antonín, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 21. až 25., 28., 29., 31., 33. až 38.
Eliáš Filip, bohoslovec v Olomouci, úl. 21., 23. až 26., 28. až 36.
Frank Karel, stud. VII. tř. r. v Praze (Ječná ul.), úl. 21., 22., 25., 26., 30.
Františk Matouš, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21., 23. až 26., 28., 29., 31. až 36., 39
Gause Karel, stud. VI. tř. r. na Žižkově, úl. 21. až 29., 31., 32., 33.
Grössl František, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 21. až 40.
Hacar Bohumil, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 21., 23., 25.
Hejl Karel, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 38.
Hořejší Jan, stud. VI. tř. g. v Rokycanech, úl. 21., 23., 24., 25.
Hrachovina František, stud. VII. tř. g. v Rychnově nad Kn., úl. 21., 23. až 26., 28., 32., 33., 36.
Hraše Josef, stud. V. tř. g. v Praze-III., úl. 21., 22., 25. až 30., 36., 39.
Hrubíšek Otakar, stud. V. tř. g. v Kyjově, úl. 21., 23, 25.
Hruška Václav, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 21., 22., 23., 25.
Hušek Josef, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 21. až 26., 28. až 39.
Hýsek Miloslav, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 26., 29., 31. až 34., 36., 37., 38.
Charfreitág Vratislav, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 21. až 40.
Chmelař Josef, stud. VII. tř. r. v Náchodě, úl. 21., 23., 24., 25., 28. až 33., 35. až 38.
Janoušek Jan, stud. VII. tř. g. ve Strážnici, úl. 21. až 33.
Joklík Abdon, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 29., 31., 33., 36., 37., 38.
Kettner Jan, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 21. až 40.
Kladivo Bohumil, stud. V. tř. g. v Brně, úl. 21. až 38.
Klíma Josef, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 21. až 33., 35. až 40.

Kosmák František, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21., 23. až 28., 30. až 40.

Křeček Karel, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 21., 22., 23., 25.

Kučera Rudolf, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 21., 22., 23., 25. až 29.

Kvapil Alois, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 25., 27. až 29., 31. až 33., 35. až 38.

Kvasnička František, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 21., 22., 23., 25. až 38.

Lísek František, stud. VI. tř. g. v Kyjově, úl. 21., 23., 25.

Livora Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 21., 22., 24.

Loštický Cyrill, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 33.

Ludvík Josef, stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 21., 23. až 40.

Mach František, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 21. až 31., 33. až 39.

Marek Rudolf, stud. VII. tř. r. v Náchodě, úl. 21. až 33., 35. až 38.

Michl Julius, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 21. až 28.

Mikyska Josef, stud. VI. tř. r. v Kostelci n. Orlicí, úl. 21., 22., 23., 25. až 29., 31.

Morávek Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 22., 24. až 27., 30., 33.

Múčka František, stud. VII. tř. g. ve Strážnici, úl. 21. až 26., 28., 29., 30.

Mudruňka Vincenc, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 21., 23. až 26., 30., 31., 36.

Němec Alois, stud. V. tř. g. v Brně, úl. 21., 25.

Němec Bohuslav, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 21. až 39.

Nič Bohuslav, stud. VII. tř. r. v Lounech, úl. 21. až 36.

Novák Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 21. až 28., 30. až 40.

Papež František, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 21. až 31., 33. až 39.

Papřok Josef, stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 21. až 40.

Paukert Robert, stud. VI. tř. g. v Hradci Králové, úl. 21. až 40.

Píč Josef, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. O., úl. 21. až 29., 31. až 40.

Pluhař Vojtěch, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 21., 22., 23., 25., 27., 28., 29., 31. až 39.

Procházka svob. p. Bedřich, stud. VIII. tř. g. v Praze-III., úl. 21., 22., 25. až 28., 30., 34., 36., 39.

Přibyl František, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 21. až 29.

Quadrát Otakar, stud. VII. tř. r. v Praze-III., úl. 21., 22., 23, 25., 27. až 34., 36.

Regentík Miroš, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 21., 23. až 26., 28. až 36., 39.

Rejholec Václav, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 21. až 35.

Roček Josef, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 21. až 28., 30. až 33., 35. až 38.

Rozkošný František, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 25., 29., 30., 31.

Rychlík Vilém, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 21. až 40.

Schmied Vilém, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 21., 22., 23., 25., 26., 31.

Schneider Rudolf, stud. VI. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 21. až 31., 33. až 39.

Segeta Jan, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 21., 22., 23., 26.

Seifert Miloš, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 21. až 31., 33. až 36.

Simandl Václav, stud. VI. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 21. až 29., 31., 33., 35., 36.

Skolil Josef, stud. VII. tř. r. na Žižkově, úl. 21. až 40.

Slovák Josef, kand. učitelství v Kroměříži, úl. 21. až 37.

Smékal Alois, stud. VI. tř. r. v Jevíčku, úl. 21., 22., 25.

Snížek Bohumil, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 23., 24., 29.

Sova František, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 21.

Spáčil Josef, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 22., 23.

Straka Methoděj, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 21. až 40.

Stypa Ladislav, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 21. až 26., 29., 30.

Suchánek Josef, kand. učit. v Srchu u Pardubic, úl. 21., 23. až 26., 28., 29., 31. až 40.

Suczek Jindřich, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 25.

Šejna Josef, stud. VI. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 21., 22., 23., 25., 29.

Ševčík Josef, stud. VII. tř. r. v Jevíčku, úl. 21., 23., 24., 25., 28. až 40.

Šlégr Josef, stud. VII. tř. r. v Lounech, úl. 21. až 23., 25. až 29., 31. až 36.

Štícha Augustin, stud. VII. tř. r. v Praze-III., úl. 21. až 38.

Štojdl Jan, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 21. až 28., 31., 33., 36.

Šubrt Jaroslav, stud. VI. tř. g. v Místku, úl. 21.

Šudoma Bohumil, stud. VIII. tř. g. v Benešově, úl. 21., 23. až 37., 39., 40.

Šváb Václav, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 21. až 25., 27., 28.

Tichý Emanuel, stud. VII. tř. r. na Žižkově, úl. 21. až 29., 31. až 36., 39.

Trkal Viktor, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 21., 23. až 26, 30. až 33., 35. až 39.

Trnka František, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 38.

Ullrich August, stud. VII. tř. r. v Praze-III., úl. 21. až 38.

Urbánek Václav, stud. VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, úl. 21., 23. až 26., 28., 30. až 34.

Vavrouch Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 29.

Veber Bohumil, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 21., 23., 24., 25., 29., 31.

Weger Ladislav, stud. VI. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 21., 25.

Veverka Václav, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 21. až 31., 33., 35.

Zástěra Josef, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 21. až 25., 27., 28., 29., 33., 36.

Zgusta Ladislav, stud. VI. tř. g. v Kyjově, úl. 21., 23., 25.

Žáček Augustin, stud. VII. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 21., 23. až 26., 28., 30. až 35., 37., 39., 40.

Živanský Vladimír, stud. V. tř. g. v Brně, úl. 21. až 28., 31. až 40.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za řešení úloh obsažených v tomto ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1904) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků obdrželi tito řešitelé:

I. Ceny první.

(Za správné a úplné řešení všech 40 úloh.)

1. *Balcar Otakar*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
2. *Cupr Karel*, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.
3. *Dašek Václav*, stud. VI. tř. r. v Náchodě.
4. *Grössl František*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.
5. *Charfreitág Vratislav*, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl.
6. *Kettner Jan*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.
7. *Papřok Josef*, stud. VII. tř. g. v Místku.
8. *Paukert Robert*, stud. VI. tř. g. v Hradci Králové.
9. *Rychlík Vilém*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze.
10. *Straka Methoděj*, stud. VII. tř. r. v Hodoníně.

II. Ceny druhé.

(Za správné a úplné řešení 37 až 39 úloh.)

1. *Hejl Karel*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
2. *Hušek Josef*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
3. *Klíma Josef*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.
4. *Kosmák František*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
5. *Ludvík Josef*, stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě.
6. *Novák Jaroslav*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.
7. *Píč Josef*, stud. VII. tř. r. v Kostelci nad Orlicí.
8. *Suchánek Josef*, kand. učit. v Srchu u Pardubic.
9. *Šudoma Bohumil*, stud. VIII. tř. g. v Benešově.
10. *Trnka František*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.

III. Ceny třetí.

(Za správné a úplné řešení 33 až 36 úloh.)

1. *Barbořík Arnošt*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.
2. *Daněk Slavomil*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
3. *Dařpek Antonín*, stud. VII. tř. r. v Prostějově.
4. *Eliáš Filip*, bohoslovec v Olomouci.
5. *Frantík Matouš*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
6. *Chmelař Josef*, stud. VII. tř. r. v Náchodě.
7. *Mach František*, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl.
8. *Marek Rudolf*, stud. VII. tř. r. v Náchodě.
9. *Němec Bohuslav*, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech.
10. *Nič Bohuslav*, stud. VII. tř. r. v Lounech.
11. *Regentík Miroš*, stud. VII. tř. g. v Kroměříži.
12. *Schneider Rudolf*, stud. VI. tř. r. v Kostelci n. Orl.

13. *Školil Josef*, stud. VII. tř. r. v Žižkově.
14. *Slovák Josef*, kand. učit. v Kroměříži.
15. *Ševčík Josef*, stud. VII. tř. r. v Jevíčku.
16. *Ullrich August*, stud. VII. tř. r. v Praze III.
17. *Trkal Viktor*, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě.
18. *Urbánek Václav*, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.
19. *Žáček Augustin*, stud. VII. tř. g. v Č. Budějovicích.
20. *Živanský Vladimír*, stud. V. tř. g. v Brně.

Oznámení.

Oznamuji tímto, že vzdávám se redakce „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky“, jemuž za nynějších poměrů nemohu věnovati své síly v té míře, jak bych si přál.

Vzdávaje se redakce, kterou jsem vedl počínaje ročníkem třináctým až po dnešní dobu, pronáším vřelé přání, aby Časopis, který jest nám všem tak milým, i na dále víc a více zkvétal a tak vždy zůstal i cizině svědkem našich vážných snah vědeckých.

Rukopisy, k jichž uveřejnění nemohl jsem dosud přikročiti, odevzdám nové redakci, jakmile tato od Jednoty českých mathematiků bude jmenována.

V Praze dne 23. června 1904.

Augustin Pánek.