Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

O vlastnostech nekonečných řad $\varphi(x,a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n-a}$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 2, 65--68

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123509`

O vlastnostech nekonečné řady

$$\varphi(x, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n-a}.$$

Napsal

M. Lerch,

docent při české vysoké škole technické v Praze.

Buď x komplexní proměnná absolutně menší než 1, a pak buď veličina různá od 1, 2, 3, ..., jinak libovolná. Jedná se o propagaci funkce

$$\varphi(x, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n-a} \tag{1}$$

definované touto řadou pro $|x| < 1$. Patrně máme

$$D_x [x^{-a} \varphi(x, a)] = \Sigma x^{n-a-1} = \frac{x^{-a}}{1-x},$$

a tedy integrací:

$$x^{-a} \varphi(x, a) = \int \frac{x^{-a}\, dx}{1-x} + C.$$

Je-li a ve své realné části algebraicky menší než 1, bude možno voliti za dolní mez integrační hodnotu $x = 0$, tak že nalezneme

$$\varphi(x, a) = x^a \int_0^x \frac{z^{-a}\, dz}{1-z},$$

majíce hlavně na zřeteli realné hodnoty x. Substitucí $z = \frac{x}{t}$ obdržíme odtud

$$\varphi(x, a) = x \int_1^{\infty} \frac{t^{a-1}\, dt}{t-x}. \tag{2}$$

Konvergence tohoto integrálu stále ještě vyžaduje, aby a bylo v realné části menším než 1; veličina x předpokládána v mezích $(0 \ldots 1)$. Integrál však existuje pro všecky x vyjímaje kladné realné hodnoty převyšující 1, t. j. mimo *řez* $(1 \ldots \infty)$.

Jestliže jsme se takto zbavili jedné obtíže, obdrževše pro funkci φ výraz platný pro všecka komplexní x mimo řez $(1 \ldots \infty)$, byli jsme obtíženi opět na druhé straně podmínkou real. $a < 1$, která při řadě (1) není nutnou.

Abychom se i této obtíži vyhnuli, nahradíme výraz (2) jiným integrálem, k němuž dospějeme pomocí věty Cauchyovy.

Veďme v rovině komplexní proměnné t jednoduchou čáru uzavřenou C_1, která nemá s řezem $(1 \ldots \infty)$ jiných bodů společných mimo $t = 1$ a uvnitř které leží body 0, x.

Dále sestrojme kruh C_R o středu 0 a poloměru R dosti velikého, tak aby C_1 byla uvnitř C_R. Čáry C_1, C_R pak omezují v rovině (t) věnec, jejž rozkrojme podél $(1 \ldots R)$, rozeznávajíce řezu tohoto břehy levý a pravý. Vzniklý takto v rovině (t) obor Γ jest souvislým a má tu vlastnost, že funkce t^a je v něm jednoznačná a zcela určitá, ustálíme-li její hodnotu na některém místě uvnitř Γ. My volíme $t^a = e^{a \log t}$, při čemž přirozený logarithmus je podél levého břehu řezu $(1 \ldots R)$ realným, na pravém břehu ale jeho pomyslná část $= 2\pi i$.

Opisuje-li bod t obvod oboru Γ ve směru kladném, probíhá nejprvé délku $(1 \ldots R)$ na levém břehu, pak kruh C_R, po té pravý břeh ve směru opačném $(R \ldots 1)$ a po té čáru C_1 ve směru záporném. Jelikož na Γ jest funkce $\dfrac{t^{a-1}}{t-x}$ holomorfní, bude integrál její vzatý podél obvodu Γ rovnati se nulle:

$$\int\limits_{(\Gamma)} \frac{t^{a-1}\,dt}{t-x} = 0.$$

Integrál ten sestává ale z částí

$$\int_1^R \frac{t^{a-1}\,dt}{t-x}, \quad \int\limits_{C_R}, \quad \int_R^1 e^{2a\pi i} \frac{t^{a-1}\,dt}{t-x}, \quad -\int\limits_{C_1} \frac{t^{a-1}\,dt}{t-x},$$

a *předpokládáme-li a realné a menší než* 1, bude

$$\lim_{R=\infty} \int_{C_R} = 0\,;$$

obdržíme tedy z poslední rovnice přechodem k limitě pro $R = \infty$:

$$(1 - e^{2a\pi i}) \int_1^\infty \frac{t^{a-1}\,dt}{t-x} = \int_{C_1} \frac{t^{a-1}\,dt}{t-x}\,,$$

a odtud vůči (2):

$$(3) \qquad \varphi(x, a) = \frac{x}{1 - e^{2a\pi i}} \int_{C_1} \frac{t^{a-1}\,dt}{t-x}.$$

Integrál v pravo jest jednoznačnou analytickou funkcí proměnné a, a sice stále konečnou; pro realná $a < 1$ shoduje se pravá strana s levou a tedy poskytuje propagaci této funkce vůči a. Zároveň vidíme, že pravá strana poskytne funkci $\varphi(x, a)$ též pro všecka x obsažená uvnitř čáry C_1. Odtud lze ale obdržeti výraz platný pro všecka x. Je totiž

$$\int_{C_1} \frac{dt}{t-x} = 2\pi i$$

a následkem toho

$$(4)\ \varphi(x, a) = \frac{2\pi i\, x^a}{1 - e^{2a\pi i}} + \frac{x}{1 - e^{2a\pi i}} \int_{C_1} \frac{t^{a-1} - x^{a-1}}{t-x}\, dt;$$

jelikož integrovaná funkce je nyní konečná pro $t = x$, nemění se hodnota integrálu i když cesta C_1 přestoupí místo x, t. j. *výraz (4) definuje funkci $\varphi(x, a)$ pro všecky hodnoty x, a.*

Je-li a kladným v části realné, bude lze voliti za C čáru složenou z úseku $(1 \ldots \varepsilon)$, kruhu $|t| = \varepsilon$, a úseku $(\varepsilon \ldots 1)$ a bude lze přejíti k limitě pro $\varepsilon = 0$. Tím obdržíme

$$\int_{C_1} \frac{t^{a-1}\,dt}{t-x} = (e^{2a\pi i} - 1) \int_0^1 \frac{t^{a-1}\,dt}{t-x}\,,$$

předpokládajíce, že x neleží na úseku $(0 \ldots 1)$. Bude tedy dle (4):

$$\text{(4a)} \qquad \varphi(x, a) = \frac{2\pi i\, x^a}{1 - e^{2a\pi i}} - x \int_0^1 \frac{t^{a-1}\, dt}{t - x},$$

poněvadž integrál

$$\int_{C_1} \frac{x^{a-1}\, dt}{t - x}$$

mizí dle věty Cauchyovy, jakmile x leží zevně C_1.

Srovnáme-li poslední tvar funkce φ s tvarem (2), shledáváme, že pro hodnoty a o realné části v mezích $(0 \ldots 1)$ platí známý vzorec

$$\text{(5)} \qquad \int_0^\infty \frac{t^{a-1}\, dt}{t - x} = \frac{2\pi i\, x^{a-1}}{1 - e^{2a\pi i}},$$

kde ovšem x není realné a kladné, aby integrál vůbec existoval. Při tom dlužno připomenouti, že x^{a-1} značí hodnotu $\frac{1}{x}\, e^{a \log x}$, kde pomyslná část logarithmu je v mezích $(0 \ldots 2\pi)$.

Jelikož integrál v pravo (4a) lze uvésti na tvar

$$\frac{1}{x} \int_1^\infty \frac{t^{-a}\, dt}{\frac{1}{x} - t} = -\varphi\left(\frac{1}{x}, 1 - a\right),$$

máme vztah

$$\text{(6)} \qquad \varphi(x, a) - x\, \varphi\left(\frac{1}{x}, 1 - a\right) = \frac{2\pi i\, x^a}{1 - e^{2a\pi i}},$$

který pro $x = e^{2u\pi i}$ v případě realného u z mezery $(0 \ldots 1)$ obdrží tvar známého rozvoje

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{n - a} = 2\pi i \frac{e^{2au\pi i}}{1 - e^{2a\pi i}}.$$

Že tu dlužno voliti u v mezeře $(0 \ldots 1)$, plyne odtud, že $x^a = e^{a \log x}$, kde $\log x = 2u\pi i$ má míti pomyslnou část v mezích $(0 \ldots 2\pi)$, což nastane při $0 < u < 1$.