O základních rovnicích theorie pružnosti.

Napsal

dr. Aug. Seydler.

Experimentalně založena jest nauka o pružnosti hmot tuhých *R. Hooke-em*, jenž vyslovil větou: Ut tensio sic vis, v dodatku ku spisu: Description of Helioscopes and some other Instruments (1676) obsaženou, dle zvyku tehdejšího v anagrammu: *ceiiinosssttuv* skrytou, úměrnosť deformací a deformujících sil (v mezích pružnosti). Základ všeobecné theorie pružnosti (rozumí se samo sebou, že *jednotlivé* problemy, na př. problem *elastické čáry* řešeny již v dobách dřívějších) položen teprv od *Naviera*, jehož pojednání: Mémoire sur les lois de l' équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, čtené r. 1821 v „Académie royale des Sciences", uveřejněno jest teprv r. 1827 v „Mémoires" této akademie, sv. VII. V násl. sv. VIII. (r. 1829) vyšlo neméně důležité pojednání *Poissonovo:* Mémoire sur l' equilibre et le mouvement des corps élastiques; vedle jmenovaných obou mathematiků dlužno dále uvésti zvučná jména *Cauchy-ho*, *Lamé-ho*, *Saint-Venanta* a j. Za východiště při zbudování theorie pružnosti volili tito francouzští učenci názor o *molekularném* neb atomickém ustrojení hmoty t. j. domněnku, že hmota skládá se z částic rozpojitých, nesouvislých a prázdným prostorem oddělených. Pojem těchto částic, molekul neb atomů, zjemněn v pojem *pouhých hmotných, t. j. setrvačností obdařených bodů,* jež na sebe působí silami na vzdálenosti jejich závislými a ve směru této vzdálenosti ležícími, a jež z této příčiny nazývají se někdy *silovými středy* (centres de force, Kraftcentra). K tomuto názoru dospěl v minulém století slovanský fysik a astronom *Bošković* a vyložil jej zejmena ve spise: Philosophiae naturalis Theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentem (1758). Názor ten tvoří v jistém ohledu přechod od atomismu k dynamismu, t. j. k názoru o nepřetržitém vyplnění prostoru hmotou, a přiznávají se k němu čelní fysikové: budiž uveden vedle horlivého obrance jeho *Fechnera* (Über die physikalische und philosophische Atomenlehre, II. vyd. 1864) též i *Faraday*, o němž na mnoze opačná domněnka panuje. Jest ovšem pravda, že se Faraday někdy poněkud neurčitě vyjadřoval vzhledem k této otázce, a že svým názorem o elektřině položil základ k pozdějším theoriím protiatomickým. Lze však zaznamenati od něho výroky zcela určitě tomuto čirému (jak Fechner jej nazývá filosofickému) atomismu svědčící. Faraday obrací se totiž v jeho prospěch proti obyčejnému atomismu, jemuž jest atom částice sice nesmírně malá, mající však proto přece jisté (konečné) rozměry. Charakteristický jest v ohledu tom jeho výrok v Exp. Researches in Electricity, vol. II. p. 289, uvedený v mé loňské přednášce o Boškovići (Čas. r. XVI. str. 292).

Na témž místě praví *Faraday* dále ještě as toto:

„.... Kde jest tudíž nejmenší příčina (vyjma v libovolném tvrzení) předpokládati rozdíl v jakosti (in kind) mezi povahou prostoru právě uprostřed mezi středy dvou sousedních atomů a mezi povahou prostoru kdekoli mezi nimi zvoleného? Rozdíl stupňový, neb i rozdíl v povaze síly, shodný s principem kontinuity mohou připustiti, avšak rozdíl mezi předpokládanou malou tvrdou částicí a mezi silami ji obklopujícími nedovedu si představiti."

Hned na to následuje ovšem místo, které souvislost tohoto pojímání atomismu s dynamismem na mysl uvádí:

„Chci ukázati k některým důležitějším rozdílům mezi domněnkou atomů tvořících pouhé středy silové, jako jsou atomy Boscovichovy, a druhou domněnkou molekul skládajících se z něčeho specialně hmotného, v čem a k čemu jsou síly připojeny."

„Při posledních atomech skládá se hmota z atomů a prostoru je dělícího, při dřívějších jest všude přítomná, a není místa, kterého by nevyplňovala.... Nepochybně středy silové rozeznávají se od sebe svou vzdáleností vzájemnou (vary in their distance one from another), ale co v podstatě činí hmotu atomů, dotýká se hmoty atomů sousedních."

Jest tudíž hmota naskrz *nepřetržitou* a pozorujíce nějakou hmotu nemusíme předpokládati rozdíl mezi jejími atomy a jakýmsi mezi nimi obsaženým prostorem."

Při vší úctě před autoritou Faradayovou nelze upříti, že poslední výrok jest poněkud nejasný. Vzniká totiž dvojsmysl tím, že jednou atomem slove celá soustava sil, se středem silovým spojená, podruhé (správněji) pouze střed těchto sil. Rozdíl mezi tímto středem a ostatním prostorem, silami vyplněným existuje; můžeme jej mathematicky znázorniti rozdílem mezi tím bodem roviny, ve kterém se úkon nějaký stává přetržitým a mezi jinými body roviny, ve které úkon zobrazujeme.

Stůjž zde ještě charakteristický výrok Weberův uvedený ve spisu Fechnerově (str. 88):

„Záleží na tom, v příčinách pohybů takový stálý díl vyloučiti, aby zbytek byl sice proměnný, aby však jeho změny jen na *měřitelných poměrech prostorových a časových* byly závislé. Touto cestou dospíváme ku pojmu hmoty, na které představa prostorového rozsahu nutně nelpí. Důsledně se pak i *velkost* atomů v atomistickém názoru neměří dle rozsáhlosti prostorové, nýbrž dle jejich *hmotnosti*, t. j. *dle poměru při každém atomu stálého, v kterém se při témž atomu síla k urychlení nalezá.* Pojem hmoty jakož i atomů rovněž tak málo jest hrubý a materialistický jako pojem *síly*, nýbrž rovná se mu úplně co do jemnosti a duševní průzračnosti.“

Nemaje v úmyslu, podati zde dějiny neb kritiku atomismu a odpůrných jemu názorů, uvedl jsem několik těchto výroků jen z té příčiny, bych proti zmáhajícímu se výlučnému empirismu, jemuž jest nepřetržité vyplnění prostoru hmotou a nutnost bezprostředného styku při dynamickém působení jakýmsi dogmatem, ukázal, že nezdálo se vynikajícím fysikům nutným neb prospěšným, ba ani ne možným, opustiti názor atomistický při jednotné dedukci úkazů přírodních.

Zmíněný empirismus vzniknul na půdě anglické, a na jeho rozvoj měl Faraday sám celým směrem svým značný vliv. V úkazech, jimiž theorie pružnosti se zanáší, nejeví se jako při gravitaci působení částic prostorově oddělených do dálky, nýbrž spíše působení částic bezprostředně sousedících při samém styku, čímž vzniká pojem *plošných* sil čili *napjetí*, *tahů* a *tlaků*, v průřezech a na povrchu hmot působících. Síly, dle vzoru působení gravitačního mezi jednotlivými hmotnými body (atomy) se vyskytující, mohli bychom obdobně zváti *silami bodovými.* Nelze upříti, že pojem oněch plošných sil, jimiž sami konajíce tělesnou práci vládneme a jichž prospěšný i zhoubný vliv (při chůzi, pádu, plování, jezdění, poranění atd.) stále pocițujeme, jest nám bližší, řekli bychom konkretnější, proti pojmu sil do dálky působících, jež jsme se (jednotlivec i lidstvo) teprv později naučili abstrahovati z úkazů gravitačních, elektrických a magnetických. Nelze dále upříti, že odvození oněch plošných sil pomocí sil, jež jsme nazvali bodovými, tím způsobem, že jen tyto síly pokládáme za reálné a síly prvnější za jejich výslednice, že odvození to jest poněkud umělé. Jest tudíž rozhodnou zásluhou anglické školy empirické (Stokes, Thomson, Maxwell a j.), že s prospěchem pokusila se o výklad úkazů pružnosti ze stanoviska kinematické, na pojmu nepřetržitosti hmoty zbudované theorie *deformací* a *napjetí* (strain and stress), buď bez hlubšího ohledávání otázky, mohou-li tyto kinetické a dynamické prvky dále ještě rozkládány býti, buď s rozhodným odporem proti všelikým dalším pokusům ve směru tom.*)

Spor mezi oběma směry trvá do dnešního dne, situaci nynější lze v hlavních rysech, pokud se týče vědeckých literatur nejvyvinutějších, asi tak charakterisovati, že Francouzové i nyní po výtce stojí na půdě theorie slavnými jejich krajany založené

*) Ve své Theoretické fysice (§. 673.) poznamenávají *Thomson* a *Tait:* „V odstavci o vlastnostech hmoty uvidíme, že *chybná* theorie (Boscovichova) od mathematiků *chybně* vypracovaná, relace mezi koefficienty pružnosti poskytnula, které byly pokusem vyvráceny.“ Tento příkrý výrok zdá se mi býti velmi nespravedlivým. Čím dále tím více utvrzuji se v přesvědčení, že o různých skupinách úkazů přírodních možné jsou výklady *několikeré,* stejně „správné“; t. j. nemohouce v podstatu věcí nás obklopujících vniknouti, můžeme sobě utvořiti různé *obrazy* o nich stejně oprávněné, nezapomínajíce ovšem, co v nich subjektivného. Tomu musíme již zvykati, že *tak,* jak si předměty a jich souvislost v přírodě představujeme, v skutku neexistují, nýbrž že vždy jest v představách našich *nerozlučná* směs živlu objektivného a subjektivného. Za podobenství sloužiž *tatáž* melodie při *různých* hudebních nástrojích. Z toho stanoviska mám za to, že bychom s prohlašováním jedné theorie za „chybnou“ a druhé theorie za „pravdivou“ měli býti velmi opatrnými. Otázka netýká se ani tak *pravdivosti,* jako spíše *vhodnosti* té které theorie. Historie vědy důrazně nás poučuje o tom, kterak hypothesy se střídaly a zamítnuté opět vrchu nabývaly.

(tak nedávno zemřelý Barré de Saint-Venant, Boussinesq, Commines de Marsilly), Angličané výhradně jsou empiriky, kdežto v Německu na př. Fr. Neumann více k prvnímu, Kirchhoff ku druhému směru se kloní.

Těžiště sporu leží nyní v následující otázce. Theorie na molekularném názoru zbudovaná shledává pro hmoty stejnorodé (homogené isotropické) *jediný koefficient pružnosti*, zkušenost a založená na ní ryze empiristická theorie poskytují *dva* takové koefficienty. Prodloužíme-li totiž útvar válcovitý (na př. drát) působením síly vhodně umístěné, slove poměr E síly, na každou jednotku plochy průřezu působící, k prodloužení jednotky délky, *modulem pružnosti.* *) Poměr ten značí tudíž sílu, která by vlákno mající jednotku průřezu o vlastní délku prodloužila, kdyby taková deformace v mezích pružnosti byla možná. Vedle tohoto prodloužení smršťuje se však drát neb vlákno ve směru příčném, poměr μ zmenšení rozměrů příčných ku zvětšení rozměru podélného jest číslo, které abstraktná theorie pružnosti pro *všechny hmoty stejnorodé, stejnotvárné* určuje na $\frac{1}{4}$, kdežto zkušenost poskytuje pro různé hmoty různé hodnoty, asi mezi $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ obsažené. Jest tedy dle abstraktné theorie E jediným koefficientem pružnosti, dle theorie empirické μ koefficientem druhým.

Theorie na molekularném názoru založená může se však hájiti ve dvojím směru.

1. Může se vytknouti, že hmoty skutečné nemohou býti pokládány za přesně (idealně) stejnorodé a stejnotvárné a že se tudíž odchylky od theorie odchylkami neb zvláštnostem jich molekularného ustrojení vyložiti mohou. Toto stanovisko hájí

*) Název ten zaveden jest *Youngem* (modul Youngův); v četných spisech odborných (Wüllner, Violle, Navier), nazývá se E modulem *neb* koefficientem pružnosti. Vhodnějším zdá se mi pro poslední terminus podržeti význam všeobecný, t. j. nazývati koefficienty pružnosti *všechny veličiny* (jichž jest při krystallinických hmotách až i 15 neb dokonce 21), jež chování se hmoty vůči deformujícím silám blíže charakterisují. Dle toho jest poměr μ, ač-li jest na jakosti hmoty závislým, *druhým* koefficientem pružnosti vedle modulu. Nejméně odporučuje se po mém soudu, zaváděti jak se tu a tam děje, *reciprokou hodnotu* modulu pružnosti, tedy prodloužení jednotky délky, způsobené jednotkou síly v jednotce průřezu, co *koefficient pružnosti.*

energicky zejmena *Saint-Venant*,*) poukazuje k tomu, že látky jako kaučuk, bílkovina, rosol z jedné, korek z druhé strany, jež se uváděly co námitka proti abstraktní theorii**), nevyhovují pojmu hmoty stejnorodé a stejnotvárné. První jsou kapaliny ne *stuhlé* nýbrž *sražené* (coagulées) a co takové tvoří bezpochyby soustavu tuhých buniček kapalinou vyplněných, korek naproti tomu jest hmotou houbovitou komplikovaného zřízení molekularného.

Nelze upříti, že vývody Saint-Venantovy mají značnou váhu; ještě důležitější jest však, že novější pokusy na mnoze ve prospěch abstraktní theorie dopadly. *Cornu* nalezl pro sklo zvláštní optickou methodou hodnotu μ v mezích 0·22—0·26, rovněž *Everett, Voigt* hodnotu něco menší, však pro měď galvanicky sraženou přesně 0·25.***) Pro jiné látky, zejmena kovy nalezeny hodnoty μ větší, asi až do 0·35. Nyní uvažme, že ze všech častěji se vyskytujících tuhých látek zajisté sklo neb měď galvanicky, t. j. nepřetržitě stejným molekularným dějem získanou nejspíše smíme pokládati za látku přesně stejnorodou a stejnotvárnou, což o kovech na př. o mosazných tyčích, pro něž *Kirchhoff* nalezl $\mu = 0·3$ neplatí, poněvadž jich obrábění rozmanité zvláštnosti textury (zrnité, vláknité) a tudíž i odchylku od isotropie přivodí.

---

*) Viz: *Navier:* De la résistance des corps solides; III. édition, avec des notes et des appendices par *M. Barré de Saint-Venant* (1864); zejmena: appendice V.

Clebsch: Théorie de l'élasticité des corps solides. Avec des notes étendues de *M. B. de Saint Venant;* p. 67.

Při této příležitosti budiž upozorněno na toto výtečné spracování Clebschova známého spisu o pružnosti, jehož objem se ve francouzském překladu připojením na nejvýš *cenných* poznámek a dodatků Saint-Venantových více než zdvojnásobnil.

**) Viz *Thomson* a *Tait*, l. c. §. 684., 685. Angličtí fysikové, rozeznávajíce v kinematice útvarů proměnných změnu *objemu* a změnu *tvaru*, přisuzují každé hmotě zvláštní míru stlačitelnosti: *compressibility*, a zvláštní míru odporu proti změně tvaru: *rigidity*. Hmoty jako rosol při malé stlačitelnosti snadno mění tvar, blížíce se v tom kapalinám, hmoty jako korek při malé deformabilitě dovolují značné stlačení. Poměr obou vlastností jest tedy *nestejný*.

***) Viz: *Fr. Neumann*: Vorlesungen über die Theorie der Elasticität (1885), §. 77. Též *Violle*, Cours de Physique (1883): §. 152—162.

2. Jiný způsob obhájení theorie v tom záleží, že se upraví neb pozmění molekularná theorie tak, aby vedla též ku dvěma koefficientům pružnosti při hmotách stejnotvárných. Nezdá se mi to možné, pokud se předpokládají *síly bodové* (v. str. 99.) obyčejným způsobem, t. j. tak, že působení vyskytuje se vždy mezi dvěma hmotnými body, leží ve směru přímky je spojující a jest pouze na jejich vzdálenosti závislé. V pojednání, předloženém v pros. 1886 Společnosti nauk *) pokusil jsem se o to, vzdělati a podrobnějším rozborem ze stanoviska mechanického odůvodniti myšlenku vyslovenou *Fechnerem* ve spisu shora uvedeném (str. 196: Hypothese über das allgemeine Kraftgesetz der Natur), dle které vedle sil binarnými skupinami podmíněných též i takové síly se vyskytují, které na seskupení *tří částic* jsouce závislé, ku společnému jejich středu hmotnému jsou namířeny, dále i takové síly, jež závisly jsouce na seskupení *čtyr částic* ku středu hmotnému těchto částic jsou namířeny atd. Předpokládaje existenci takových sil, jež lze zváti ternarnými, quaternarnými atd., ukázal jsem, že theorie pružnosti na tomto širším základě založená v skutku vede ke *dvěma* koefficientům pružnosti při látkách isotropických. Při té příležitosti musil jsem uvažovati o způsobu, jakým se z původní hypothesy *sil bodových* odvozuje důležitý pro theorii pružnosti pojem sil plošných, jakož i o poměru v jakém k sobě se nalezají *kinetická* a *statická* stránka dotyčných úkazů; musil jsem objasniti sobě různé otázky, o nichž jsem nenašel poučení náležitého v odborných spisech, zejmena co se zmíněného poměru týče. O otázkách těch zmínil jsem se sice dle příležitosti stručně v uvedeném pojednání; pokládám však za prospěšné, poněkud důkladněji a souvisleji stanovisko, ku kterému jsem se vzhledem k naznačeným otázkám propracoval, tuto vyložiti. Vedle jiných věcí poskytne výklad ten též sloučení rozboru *Navierova* a *Poissonova*, které se posud podávaly jakoby byly bez souvislosti ano v jistém ohledu sobě odporovaly. Pro snadnější porovnání volím tudíž označení, jehož užil *Fr. Neumann* v uve-

*) Untersuchungen über verschiedene mögliche Formen des Kraftgesetzes zwischen Massentheilchen. Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. VII. T. I. B. (1887). V. referát na str. 92 t. r.

deném shora (str. 106.) spise při výkladu methody Navierovy (kap. 6.).

Dříve však nežli přikročím k odvození základních rovnic theorie pružnosti, zdá se mi potřebným předeslati výklad některých zvláště důležitých pojmů mechanických.

II.

Rozvoj kinematiky v našem století měl ten přirozený následek, že zřetele *kinetické* (pohybové) vždy více nabývaly v mechanice převahu nad zřetely *statickými* (klidovými), že se mechanika vždy více redukovala na pouhou náuku o pohybu, k níž tvořila statika dodatek vždy podřízenější. Připomínám jen známý výrok *Kirchhoffův* v jeho Mechanice. „Mechanika jest naukou o pohybu; co úlohu její označujeme: popsati pohyby v přírodě se vyskytující *úplně* a *způsobem co nejjednodušším.*"

Proti tomuto, v jistých ohledech snad oprávněnému, ale nepopíratelně jednostrannému směru musí po mém soudu nastati reakce a dostaviti se poznání, že zřetele statické mají v mechanice stejnou důležitost a oprávněnost jako zřetele kinetické. Ze stanoviska geometrického jest porovnání určitého seskupení (configurace) hmotných částic s jiným za základ voleným, které při studiu trvalých (statických) deformací provádíme, stejně důležité jako stopování různých změn poloh, jež při studiu časově proměnných pohybů podnikáme. Ze stanoviska dynamického tážeme se stejným právem po těch silách (napjetích), které při trvalé deformaci hmoty nutně musíme předpokládati, jako se při pohybu tážeme po síle (hmotnosti násobené urychlením), která týž pohyb způsobiti může. Z téhož stanoviska mluvíme obrátíme-li zřetel k jinému pojmu mechaniky, se stejným právem o *statické* (potencialné) energii dané polohy hmoty a její částic, s jakým mluvíme o *kinetické* (aktualné) energii jejího pohybu.

Z toho následuje patrně dualná přiřaděnost statiky ku dynamice (kinetice), nikoli podřaděnost její; můžeme v skutku tvrditi, že vyjma zcela jednoduché, abstraktné, v skutečnosti se nevyskytující případy v každém mechanickém úkazu dlužno vedle kinetické šetřiti i statickou stránku: vedle pohybu i okamžitou polohu, vedle síly urychlující též napjetí ve hmotě, vedle její energie pohybu též její obsah energie statické (potencialné).

Tuto dualnou přiřaděnost naznačil jsem ve svém článku o základních druzích pohybu (Čas. r. XVI. str. 51.) rozlišováním těch dvou případů, kdy pošinutí (u, v, w) pokládáme za úkon souřadnic původních (x, y, z) — problem statický — a kdy je pokládáme za úkon času (t) — problem kinetický; v skutečnosti jsou oba problemy smíseny, t. j. u, v, w jsou úkony čtyr veličin x, y, z, t.

Že i v pojmu síly obě stránky jsou zastoupeny, uzná každý, kdo si vzpomene, že jednou měříme sílu kineticky součinem hmoty s urychlením, podruhé staticky tlakem, jímž se tlak silou vykonávaný vyváží.

Mysleme si hmotnou částici, na kterou působí v opačných směrech dvě stejně velké síly. Částice ta jest v klidu, neb lépe řečeno nemá urychlení, nýbrž snad jen přímý stejnoměrný pohyb právě tak, jako kdyby na ni nepůsobily žádné síly. Kdyby mechanika byla naukou o prostém pohybu, nemohla by mezi oběma případy činiti rozdílu. Po mém názoru jest tu však rozdíl podstatný, ovšem jen rozdíl v ohledu statickém; v případě prvním způsobují obě stejné opačné síly v bodu hmotném *napjetí*, kterého v druhém případě není. Namítne se, že rozdílu mezi *vnitřním stavem* hmotné částice v obou případech nemůžeme postřehnouti i kdyby takový rozdíl v skutku byl; to platí však pouze o *jednotlivé, isolované částici.* Co jediné pozorujeme, jsou polohy a pohyby hmotných útvarů, t. j. souboru jistého množství částic; a v takovém případě *není jednostejné,* zda-li útvar žádným silám není podroben, neb silám, jež se udržují v rovnováze.

V posledním případě bude nejen *poloha* a *orientace* tělesa co celku jiná nežli v případě prvém, nýbrž i seskupení jeho hmotných částic a následkem toho i *objem* a *tvar* jeho. Tento statický účinek jest právě tak následek oněch kineticky bezvýznamných, v rovnováze se nalezajících sil, jako jest urychlení kinetickým účinkem urychlujících výslednic.

Z tohoto stanoviska můžeme též *větu o rovnoběžníku sil*, tuto základní poučku geometrie sil rozšířiti. Mysleme si hmotný bod m a bodem tím položenou libovolnou rovinu (A). Následkem konfigurace hmoty na *jedné* straně roviny obdržel by bod

m urychlení a_1, následkem konfigurace hmoty na *druhé* straně roviny urychlení $\overline{a_2}$. Říkáme, že na hmotný bod působí dvě síly:

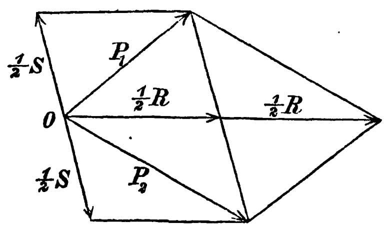
$$\overline{P_1} = m\overline{a_1}, \quad \overline{P_2} = m\overline{a_2},$$

a skládáme je dle zmíněné věty ve výslednici, rovnající se jejich geometrickému součtu:

$$\overline{R} = \overline{P_1} + \overline{P_2}.$$

Tato výslednice poskytuje však jen *jednu*, totiž *kinetickou* část celého působení sil; vedle ní vyskytuje se ještě část statická, t. j. *napjetí*. Napjetí to nalezneme takto: Položme (srv. výkres):

$$\overline{P_1} = \tfrac{1}{2}\overline{R} + \tfrac{1}{2}\overline{S}, \quad \overline{P_2} = \tfrac{1}{2}\overline{R} - \tfrac{1}{2}\overline{S}$$



t. j. rozložme síly $\overline{P_1}$ a $\overline{P_2}$ ve dvě složky ve směru obou úhlopříčen rovnoběžníku sil. Složky ve směru úhlopříčny jedné jsou stejně velké a *stejného směru*, a poskytují výslednici $\overline{R}$; složky ve směru druhé úhlopříčny jsou stejně velké, avšak *opačného směru*, a říká se tudíž, že se ruší, t. j. že nejsou *kineticky* působivé. Síly ty způsobují však *napjetí* v bodu hmotném, účinkují tedy *staticky*; mírou jich působení může býti algebraický rozdíl obou oněch složek, tedy druhá úhlopříčna rovnoběžníku sil:

$$\overline{S} = \overline{P_1} - \overline{P_2}.$$

Můžeme tudíž vysloviti větu:

Působí-li na hmotnou částici dvě síly, každá z jedné strany roviny částicí tou procházející, dává jedna úhlopříčna rovnoběžníku sil obyčejnou čili kinetickou výslednici oněch sil; druhá úhlopříčna určuje svým směrem a velkostí svou napjetí v hmotné částici a může

se tudíž zváti statickou výslednicí sil v částici té a vzhledem k oné rovině. Dodatek „vzhledem k oné rovině“ jest nutný a tají se v něm podstatný rozdíl mezi kinetickou a statickou resultantou. Položíme-li totiž hmotným bodem jinou rovinu (B), působí z obou stran této roviny na hmotnou částici jiné síly $\overline{Q}_1$ a $\overline{Q}_2$, poněvadž jsme řezem (B) okolní hmotu jinak rozdělili než-li řezem (A); výslednice kinetická obou sil musí však opět býti:

$$\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 = \overline{R},$$

poněvadž částice $\overline{m}$ nemůže míti než jediné urychlení. Naproti tomu bude však výslednice statická:

$$\overline{T} = \overline{Q}_1 - \overline{Q}_2$$

svou velkostí i směrem svým od síly $\overline{S}$ rozdílná, měříc napjetí v bodu m vzhledem k rovině (B). Vzhledem k rovině volené může býti *výsledné urychlení* buď kladné, buď záporné, buď nejetné čili tangencialné, t. j. může býti namířeno buď na jednu, neb na druhou stranu roviny, neb ležeti konečně v rovině samé. Podobně může býti výsledné napjetí buď kladné, buď záporné, buď tangencialné. Za kladné pokládá se obyčejně *tah*, t. j. ten případ, kdy jest částice z obou stran tažena, kdy hmota po každé straně roviny hledí ji k sobě přitáhnouti; záporným jest potom *tlak*, při kterém částice z obou stran jest tlačena, kdy ji hmota z každé strany roviny pudí na druhou stranu. Tangencialné napjetí padá ve směr roviny samé a může se pokládati za tah neb za tlak.

Při této úvaze vyšli jsme od *kinetického* pojmu síly způsobující urychlení a dospěli jsme ku *statickému* pojmu napjetí, t. j. tahů neb tlaků, můžeme však naopak vyjíti od pojmu posledního. V prvním případě jsme přirozeným způsobem vedeni ku názoru o molekularném ustrojení hmoty a o bezprostředném působení do dálky (actio in distans), a to z následujících příčin. Kinetický rozbor vede konečně vždy k posledním (elementarným) pojmům *rychlosti* a *urychlení*, jež se týkají jednotlivých bodů. Urychlení každého bodu závisí na konfiguraci všech ostatních — výrazem toho jest ona záhadná actio in distans; zároveň stává se nám celý děj mechanický názorným, předpokládáme-li *konečný* počet hmotných bodů, kdežto by nám jejich nekonečný počet byl nepochopitelným — odtud molekularný názor.

Vycházejíce od statického pojmu napjetí plošných vedeni jsme naopak ku názoru o nepřetržitém vyplnění prostoru hmotou a o bezprostředném působení sil ve styku. Statický pojem deformace vztahuje se v první řadě k *plochám,* jako kinetický pojem rychlosti a urychlení k *bodům.* Buďtež u, v, w složky pošinutí bodu v čase t, z jakési polohy x, y, z, kterou by zaujímal ve stavu volném. Pak jest:

$$u = \varphi\,(x, y, z, t),$$
$$v = \chi\,(x, y, z, t),$$
$$w = \psi\,(x, y, z, t).$$

Složky *rychlosti bodu* (x, y, z) jsou:

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Naproti tomu znamenají na př.:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$$

složky *deformace* též sice v místě (x, y, z), tyto složky vztahují se však k *plošným částicím* v tomto místě, původně s rovinou YZ rovnoběžným. První z nich značí totiž *elongaci* ve směru osy X, t. j. značí, oč dvě takové plošné částice původně o jednotku délky od sebe vzdálené, vzdálenosť svou zvětšily. Druhá a třetí znamená podobně dilaci ve směrech Y a Z, t. j. oč jedna z oněch částic proti druhé ve směrech těch se pošinula. Rychlosti bodu hmotného jest úměrná kinetická veličina: *velkosť pohybu*; deformacím hmotných, t. j. ve hmotě sestrojených ploch úměrné jsou (jak shledáme) statické veličiny: *napjetí.* Urychlující síla jest *a)* buď změna *velkosti pohybu* v jednotce času, *b)* buď změna *napjetí* v jednotce délky (jak později dokázáno bude).

Mysleme si hmotnou částici, jakoukoli plochou omezenou, a předpokládejme v plošných částicích jejího povrchu síly plošné. Síly ty jeví se *staticky* co tlak a protitlak neb co tah a protitah, a jsou dle principu stejné akce a reakce stejné, ale směru opačného; (při silách bodových t. j. mezi hmotnými body se vyskytujících přichází týž princip *kineticky* k platnosti, jelikož jsou urychlující síly podmíněné vzájemnou polohou dvou hmotných bodů též stejné ale opačné). Vezmeme-li v úvahu *jednostranné* plošné síly na hmotnou částici ze vnější strany povrchu působící (t. j. nehledíme-li k silám, jimiž hmotná částice reaguje, čili na vnější hmotu působí), poskytuje nám výslednice těchto sil kinetickou sílu, totiž sílu způsobující urychlení částice samé.

Jako při silách bodových působení statické, jest tudíž při silách plošných zase působení kinetické zjevem odvozeným, sekundarným. Rozdíl mezi bezprostředným působením do dálky při silách bodových a působením ve styku při silách plošných jest ostatně více zdánlivý než skutečný. Výrazem skutečnosti v obou případech jest jen tolik: v každém bodě hmoty vyskytuje se určité *urychlení*, závislé na konfiguraci celé hmoty, tedy na poloze její částic vzhledem ku zvolenému bodu; v každé plošné částici hmoty vyskytuje se určité *napjetí*, závislé taktéž na konfiguraci celé hmoty, tedy na poloze její částic vzhledem ku zvolené ploše. Záhadná, od některých empiriků tak rozhodně popíraná „actio in distans" není tudíž silami plošnými odstraněna. Napjetí na určitém místě hmoty jest od vzdálených hmotných částic a jejich uspořádání právě tak nepochopitelným způsobem závislé, jako urychlení na témž místě.

Názory o rozpojitém neb nepřetržitém bytu hmoty v prostoru mají pro mechaniku podřízenější význam; oba názory lze sloučiti s pojmem bodových neb plošných sil. Rozpojitosť (diskretnosť) při hypothese sil bodových vede k názoru molekulárnému; rozpojitosť při silách plošných vedla by k názoru tuším nikdy ještě nevyslovenému,*) dle něhož by měla hmota ustrojení buňkovité, tak že by se každá hmotná částice pojímala obrazem buňky.

Z předcházejícího seznáváme, že nelze ze stanoviska věcného rozhodnouti o oprávněnosti hypothesy sil bodových neb sil plošných; t. j. my můžeme, vycházejíce buď od jedné buď od druhé hypothesy, vystihnouti úplně i kinetickou i statickou

---

*) *Dellinghausen* ve svých Grundzüge einer Vibrationstheorie, (Reval. 1872) udílí hmotě ovšem zmíněné ustrojení buňkovité, ale bez náležitého podkladu mechanického. Jeho názor jest ryze kinetický, autor jde ve směru tom tak daleko, že substratem pohybu jest mu pouhé „nic", kteréžto „nic" pohybem svým vytvořuje svět! Přechody mezi názorem molekularným a cellularným (jak bychom názor druhý zváti mohli) kmitají se v některých myšlenkách Faradayem pronešených,

stránku zjevů mechanických, ovšem tak, že v jednom případě počínajíce první postupujeme ku druhé, v případě druhém však naopak.*) Jinak ze stanoviska formalného; tu po mém soudu vždy budou zasluhovati síly bodové přednosť *pro větší svou jednoduchost.* Jsouť síly bodové jednoduché *vektory*, t. j. dynamické útvary, velkostí a směrem, tedy *třemi parametry* určené. Síly plošné na určitém místě jsou složitějšími útvary dynamickými, jsouce závislé na *šesti parametrech* a vyžadujíce k znázornění svému plochu 2. stupně, tak že bychom je i *vektory druhého stupně* zváti mohli.

Vedle toho nesmíme i zapomenouti, že dle historického rozvoje mechaniky stránka kinetická vždy více nabývala vrchu proti stránce mechanické, tak že se nám stala přístupnější kinetická definice síly jakožto „příčiny“ urychlení. Jest tudíž pochopitelno, že v uvedených (na str. 97.) klassických pracích zakladatelů theorie pružnosti jsou východištěm síly bodové; při tom se obě práce ty na vzájem doplňují tak, že *Navier* se obmezuje na odvození výslednic kinetických, *Poisson* na odvození výslednic statických (sil plošných).

Po předeslaném poněkud obšírném úvodu, jimž jsem hleděl přispěti k objasnění základních pojmů našeho problemu, budiž mi dovoleno přistoupiti k řešení jeho, t. j. k odvození základních rovnic theorie pružnosti pomocí hypothesy molekularného ustrojení hmoty.

III.

Předpokládejme, že hmotný útvar, jehož mechanický stav vyšetřujeme, se skládá z jednotlivých hmotných bodů (středů silových), jež na sebe působí (silami bodovými). Na každou hmotnou částici m_0 působí předně *síly vnější* (na př. gravitace), jichž výslednice má složky:

*) S tím budiž srovnán starší a novější názor o elektřině, první založený na pojmu sil bodových, druhý na pojmu sil plošných. Oba názory jsou *aequivalentní*: první jest jednodušší tam, kde jde více o kinetickou stránku působení elektrostatického, t. j. o vzájemné přitahování a odpuzování vodičů elektrovaných (Coulombovy pokusy), druhý lépe se hodí tam, kde jde o statickou stránku působení elektrostatického, t. j. o vystihnutí toho zvláštního stavu, v nějž jest uvedeno ústředí dielektrické takovýmto působením (Faradayovy pokusy).

$$m_0X,\ m_0Y,\ m_0Z;$$

dále *síly vnitřní*, ostatními částicemi téže hmoty podmíněné, jejichž výslednice (kinetická) má složky:

$$m_0A,\ m_0B,\ m_0C.$$

Úlohou naší jest, určiti urychlení bodu m_0. Předpokládejme nejprvé, že jest hmotný útvar ve stavu *nenuceném* neb, jak se méně vhodně říká, *přirozeném*, ve kterém žádná jeho částice nepodléhá síle nějaké. Souřadnice bodu m_0 buďtež x, y, z; souřadnice jiného bodu m: $x+a$, $y+b$, $z+c$, a

$$r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

vzdálenosť obou bodů. Síla, s jakou m na m_0 působí, má směr přímky $\overline{m_0m}$ a jest úkonem vzdálenosti r; úkonu tomu smíme vždy dáti tvar:

$$r\varphi(r^2).$$

O úkonu $\varphi(r^2)$ víme na základě zkušenosti pouze tolik, že má jen pro nesmírně malé hodnoty r hodnotu od nuly patrně rozdílnou, tak že můžeme po překročení jisté meze pro r úkon $\varphi(r^2)$ prakticky za nulu pokládati. Utvořme složky urychlení na základě působení mezi m_0 a m, podobně i pro všechny ostatní hmotné body m útvaru daného, a sečtěme; poněvadž předpokládáme stav nenucený, rovnají se součty ty nule, t. j.

$$\begin{aligned} A_0 &= \Sigma\, ma\, \varphi(r^2) = 0 \\ B_0 &= \Sigma\, mb\, \varphi(r^2) = 0 \qquad (1) \\ C_0 &= \Sigma\, mc\, \varphi(r^2) = 0. \end{aligned}$$

Součet vztahuje se k té části prostoru kolem m_0, která obsahuje všechny na m_0 vskutku působící hmotné body m, a která má v případě hmoty stejnorodé a stejnotvárné sférický tvar (sféra působivosti — Wirkungssphäre). Vzhledem k tomu, že pro hodnoty r větší než-li jest poloměr této sféry, $\varphi(r^2)$ bez toho rovná se nule, smíme však i do nekonečna sčítati, což může při některých úvahách býti prospěšné.

Předpokládejme nyní, že útvar jest nesmírně málo deformován. Souřadnice bodu m_0 stanou se:

$$x+u,\quad y+v,\quad z+w;$$

souřadnice bodu m:

$$x+u+a+\Delta u,\quad y+v+b+\Delta v,\quad z+w+c+\Delta w,$$

tak že relativné souřadnice jeho vzhledem k m_0 vzrostly o Δu, Δv, Δw. Zde jest patrně:

$$
\begin{aligned}
\Delta u = {} & \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial u}{\partial y} b + \frac{\partial u}{\partial z} c \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} c^2 \\
& + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} bc + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} ca + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} ab + \ldots,
\end{aligned}
$$

a výrazy pro Δv, Δw obdržíme prostou záměnou písmena v neb w za u. Veličina r^2 promění se v:

$$
r^2 + 2(a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w) + (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2)
$$

a místo veličiny $\varphi(r^2)$ lze tudíž klásti:

$$
\varphi(r^2) + 2\varphi'(r^2)(a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w) + \ldots.
$$

Jsou-li pošinutí u, v, w, tudíž i jejich diff. poměry dle x, y, z veličiny nesmírně malé, lze přibližně jejich čtverce, tudíž i čtverce veličin Δu, Δv, Δw vynechati. Substituce těchto výrazů do součtů (1) dává složky hledaného urychlení: A, B, C.

Veličiny ty obsahují části, jež se rovnají nule (na př. výrazy samy: A_0, B_0, C_0), tak že bychom mohli příslušné výrazy valně zjednodušiti; se zřetelem ku dalším vývodům uvedeme však úplný výraz pro A, upravený následujícím způsobem:

Koefficienty diff. poměrů veličin u, v, w dle x, y, z jsou součty, místo nichž zavedeme zkrácené označení patrné z následujících rovnic:

$$
\begin{aligned}
(a) &= \Sigma m a \varphi(r^2) & [a^3] &= \Sigma m a^3 \varphi'(r^2) \\
(a^2) &= \Sigma m a^2 \varphi(r^2) & [b^2 c] &= \Sigma m b^2 c \varphi'(r^2) \\
(bc) &= \Sigma m b c \varphi(r^2) & [abc] &= \Sigma m a b c \varphi'(r^2) \\
[a^4] &= \Sigma m a^4 \varphi'(r^2) & [a^2 bc] &= \Sigma m a^2 b c \varphi'(r^2) \\
[b^3 c] &= \Sigma m b^3 c \varphi'(r^2) & [b^2 c^2] &= \Sigma m b^2 c^2 \varphi'(r^2) \text{ atd.}
\end{aligned}
$$

Pak jest:

$$
\begin{aligned}
A = {} & (a)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + (b)\frac{\partial u}{\partial y} + (c)\frac{\partial u}{\partial z} \\
& + \frac{1}{2}(a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
& + (bc)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + (ca)\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + (ab)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
& + 2[a^3]\frac{\partial u}{\partial x} + 2[a^2 b]\frac{\partial u}{\partial y} + 2[a^2 c]\frac{\partial u}{\partial z} \\
& + 2[a^2 b]\frac{\partial v}{\partial x} + 2[ab^2]\frac{\partial v}{\partial y} + 2[abc]\frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned}
$$

$$+2[a^2c]\frac{\partial w}{\partial x}+2[abc]\frac{\partial w}{\partial y}+2[ac^2]\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$+[a^4]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+[a^2b^2]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+[a^2c^2]\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+[a^3b]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+[ab^3]\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+[abc^2]\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$
$$+[a^3c]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[ab^2c]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+[ac^3]\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$
$$+2[a^2bc]\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+2[a^3c]\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}+2[a^3b]\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$
$$+2[ab^2c]\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+2[a^2bc]\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}+2[a^2b^2]\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$
$$+2[abc^2]\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}+2[a^2c^2]\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}+2[a^2bc]\frac{\partial^2 x}{\partial x\,\partial y}+\ldots$$

Podobné výrazy zjednali bychom si pro B a C. Uvažme nyní, že jsou hmotné částice nedeformované hmoty stejnorodé a stejnotvárné vzhledem k jakémukoli směru symmetricky uspořádány; t. j. ku každé částici m, mající souřadnice a, b, c, můžeme nalézti částici m' buď *skutečně* buď *průměrně* stejně velkou,*) mající souřadnice a, b, $-c$. Každý koefficient, který jest vzhledem k souřadnici c lichého řádu, na př.:

$$(bc),\ [a^2c],\ [a^2bc],\ [ac^3]$$

obsahuje pak dvě stejně velké, avšak opačně označené části, podmíněné působením hmoty m a hmoty m'. Poněvadž se tudíž části oněch koefficientů vždy po dvou ruší, lze říci, že se koefficienty takové rovnají nule, a zbývají (ve výrazech pro složky urychlení) pouze takové koefficienty, které jsou *vzhledem ku každé souřadnici zvlášť* sudého řádu. Ve výrazu pro A jsou to pouze veličiny 2. a 7. řádky, a třetí člen předposlední i druhý člen poslední řádky. Dále plyne z úplné souměrnosti hmoty vzhledem k jakémukoli směru, že jest

---

*) Můžeme, jak zejmena *chemie* ráda činí, hmoty posledních částic hmotných pokládati za stejné. Můžeme je však pokládati též za nestejné; potom musí však, aspoň při stejnorodé stejnotvárné hmotě, alespoň *průměrně* býti stejné. Tento poslední názor vyskytuje se častěji ve *fysice*.

$$
(2) \quad \begin{aligned}
(a^2) &= (b^2) = (c^2) = \frac{1}{3}(r^2) = G_0 \\
[a^4] &= [b^4] = [c^4] = G \\
[b^2c^2] &= [c^2a^2] = [a^2b^2] = H.
\end{aligned}
$$

Zavedeme-li jinou soustavu souřadnic, ve které má bod m souřadnice α, β, γ, jest vzhledem ku zmíněné souměrnosti též:

$$
\begin{aligned}
[\alpha^4] &= [\beta^4] = [\gamma^4] = G \\
[\beta^2\gamma^2] &= [\gamma^2\alpha^2] = [\alpha^2\beta^2] = H.
\end{aligned}
$$

Položme do výrazu $[\alpha^4]$

$$\alpha = \varkappa a + \lambda b + \mu c;$$

po náležité redukci vzhledem k rovnicím (2) a po vyloučení členů lichého stupně obdržíme:

$$G = (\varkappa^4 + \lambda^4 + \mu^4)\, G + 6\,(\lambda^2\mu^2 + \mu^2\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda^2)\, H.$$

Zároveň jest:

$$1 = \varkappa^4 + \lambda^4 + \mu^4 + 2\,(\lambda^2\mu^2 + \mu^2\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda^2),$$

tudíž:

$$(3) \qquad G = 3\,H.$$

Z rovnic (2) plyne též:

$$3\,G + 6\,H = [r^4],$$

tedy konečně:

$$G_0 = \frac{1}{3}\Sigma m r^2 \varphi(r^2), \quad G = \frac{1}{5}\Sigma m r^4 \varphi'(r^2), \quad H = \frac{1}{15}\Sigma m r^4 \varphi'(r^2).$$

Po těchto redukcích obdržíme :

$$
(4) \quad \begin{aligned}
A &= (G_0 + H)\, \Delta^2 u + 2\, H \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\
B &= (G_0 + H)\, \Delta^2 v + 2\, H \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\
C &= (G_0 + H)\, \Delta^2 w + 2\, H \frac{\partial \Theta}{\partial z},
\end{aligned}
$$

kdež jest operační symbol

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

a veličina

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Odvození fundamentalných rovnic (4), provedené *Navierem* v pojednání shora (str. 97.) uvedeném, liší se od přítomného rozboru — vyjma formálné rozdíly — jen v tom, že Navier pouze *změnu délky* původní vzdálenosti hmotných částic, ve stavu nedeformovaném r nazvanou, za příčinu vzniku molekularných sil pokládá. Právem bylo mu tudíž vytýkáno, že zanedbává *změnu směru* téže vzdálenosti (v. na př. F. Neumann, str. 66. uvedeného dříve spisu), aniž dokázal, že zanedbání takové jest dovoleno. V přítomném rozboru bylo k této změně přihlíženo, a rozdíl jeví se tím, že se vyskytuje v rovnicích (4) koefficient G_0, kdežto obsahují rovnice Navierovy jen koefficient H.

Po této opravě mohlo by se zdáti, že ony rovnice poskytují v skutku dva samostatné koefficienty pružnosti, a že tím kýžený souhlas mezi theorií a empirií (v. str. 101.) jest dosažen. Úspěch tento jest však jen zdánlivý, seznáme totiž, že koefficient G_0 rovná se nule.*) A v případě tom obdržíme pro poměr příčné kontrakce ku podélné elongaci stálé číslo 0·25.

Veličiny A, B, C násobené hmotou m_0, jsou složky kinetické výslednice molekularných sil v bodu m_0; můžeme však v témž bodě určiti též složky statické výslednice čili napjetí vzhledem k různým rovinám, bodem tím položeným. Z analytického stanoviska mají pro nás důležitosť jen ta napjetí, jež se vztahují k rovinám souřadnic. Napjetí vzhledem k jakýmkoli jiným rovinám lze z těchto jednoduchým způsobem odvoditi.

Ve výrazech pro ony složky nutno jest určiti síly působící z jedné strany roviny a odečísti síly působící ze strany druhé. Hledáme-li na př. napjetí v bodu m_0 vzhledem k rovině YZ, musíme určiti síly:

$$m_0 A_{+x}, \quad m_0 B_{+x}, \quad m_0 C_{+x}$$

podmíněné částicemi na *kladné* straně roviny té položenými, a podobně i síly:

$$m_0 A_{-x}, \quad m_0 B_{-x}, \quad m_0 C_{-x}$$

*) Důkaz této věty lze podati ovšem jen, předpokládáme-li pouze takové síly bodové, jež nazýváme *binarnými*, a které jsou závisly vždy jen na vzájemné konfiguraci *dvou* částic m_0 a m. První myšlenka, že by mohli existovati též síly vyšších stupňů, *ternarné, quaternarné* atd., které jsou závislé na vzájemné konfiguraci vždy tří, čtyr neb více hmotných částic, vyslovena, jak již shora (str. 103.) bylo řečeno, nejprvé od *Fechnera*. Předpokládáme-li existenci takových sil, nelze více dokázati, že G_0 se rovná nule a tím dokázána možnosť dvou samostatných koefficientů pružnosti ze stanoviska hypothesy molekularné. V. pojednání tamtéž (str. 103.) citované.

vycházející od částic na záporné straně. Rozdíly:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
m_0 A_{+x} - m_0 A_{-x} &= m_0 A_x \\
m_0 B_{+x} - m_0 B_{-x} &= m_0 B_x \\
m_0 C_{+x} - m_0 C_{-x} &= m_0 C_x
\end{aligned}
$$

značí složky výsledného napjetí v bodu m_0 vzhledem k rovině YZ neb ve směru X.

Ve výrazech pro tyto síly vyskytnou se nám součty tvaru $(a) . [a^3]$ atd., leč *jednostranné*, t. j. táhnoucí se vždy jen k hmotným částicím na jedné straně roviny YZ (vlastně roviny rovnoběžné bodem m_0 procházející) položeným; budeme je rozeznávati příponami, ku př.:

$$(a)_{+x} = \sum_{+x} m\, a\, \varphi(r^2), \quad (a)_{-x} = \sum_{-x} m\, a\, \varphi(r^2).$$

Při rozdílech těchto součtů platí následující pravidla:

a) rozdíly ty rovnají se nule, jsou-li součty *lichého* stupně vzhledem k souřadnicím b a c;

b) rozdíly ty rovnají se též nule, jsou-li součty zároveň vzhledem k souřadnicím b a c i vzhledem k souřadnici a *sudého* stupně;

c) rozdíly ty jsou od nuly rozdílné, jsou-li vzhledem k souřadnicím b a c *sudého*, vzhledem k souřadnici a *lichého* stupně.

Důkaz těchto vět podaří se nám snadno, uvážíme-li, že součty jsou v případě našem jednostranné jen vzhledem ku směru X, avšak oboustranné vzhledem ku směrům Y a Z. Mutatis mutandis platí ovšem podobné věty pro směry Y a Z.

Z výrazu pro A (str. 112.) patrno, že takovým způsobem vchází do výrazu pro A_x pouze první člen 1. a 4. řádky, druhý člen 5. a třetí 6. řádky.

Ostatně lze první člen vynechati, poněvadž se rovná nule. Ve stavu nedeformovaném, kde jest:

$$u = v = w = \text{Const.}$$

zbývá totiž pro A_x výraz:

$$(a)_{+x} - (a)_{-x} = (a)_x.$$

Právě tak, jako neexistuje v stavu nedeformovaném žádné urychlení, neexistuje též žádné napjetí, a onen výraz rovná se tudíž nule.

Jest tedy

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}_x = 2\,[a^3]_x \frac{\partial u}{\partial x} + 2\,[ab^2]_x \frac{\partial w}{\partial y} + 2[ac^2]_x \frac{\partial w}{\partial z}\\
(6)\qquad &\mathrm{B}_x = 2\,[ab^2]_x \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
&\mathrm{C}_x = 2\,[ac^2]_x \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).
\end{aligned}
$$

Rovnici druhou a třetí obdržíme podobným způsobem z výrazů pro B a C jež si dle analogie výrazu pro A sestrojíme. Výrazy (6) znamenají složky napjetí v *bodu* m_0, nesmějí se tudíž stotožňovati s *plošnými* silami, jež v theorii pružnosti se zavádějí. Tyto plošné síly vyhledáme na základě *daných* sil bodových následovně.

Mysleme si plošnou částici $d\sigma$. Hmota na jedné straně její působí na hmotu na druhé straně; složky výsledného působení můžeme nazvati:

$$X_n d\sigma,\quad Y_n d\sigma,\quad Z_n d\sigma,$$

značí-li n normalu plošky $d\sigma$. Složky ty obdržíme následující úvahou, ve které pro jednoduchosť plošku $d\sigma$ volíme kolmou na osu X. Na bod m_0 působí bod m, na kladné straně plošky $d\sigma$ položený, ve směru osy X intensitou:

$$m_0 m \mathrm{U},$$

kdež jest jak z výrazu pro A neb předcházejících úvah patrno, U komplikovaným úkonem vzdálenosti r a souřadnic a, b, c. Sestrojme si bodem m_0 a bodem m v záporném směru přímky rovnoběžné s osou X, a vnesme na ně délku a. Na těchto přímkách bude ležeti větší počet bodů, po dvou tak k sobě položených, jako body m_0 a m, tak že poskytnou ku hledané výslednici $X_x d\sigma$ týž příspěvek jako zmíněné body. (Větší délku nesmíme oněm přímkám uděliti, poněvadž bychom na přímce bodem m položené přešli již na zápornou stranu plošky $d\sigma$, kdežto hledáme působení bodů m na kladné straně položených). Budiž ε počet bodů, *průměrně* v jednotce délky obsažených. Počet bodů, uvedenou shora intensitou na hmotu na záporné straně položenou působících, jest tudíž $a\varepsilon$, a soubor jich působení

$$\varepsilon\, m_0\, m\, a\, \mathrm{U}.$$

Počet bodů, podobně jako m_0 v plošné částici $d\sigma$ položených, jest $\varepsilon^2 d\sigma$; násobíme-li a sečteme-li vzhledem k různým kladným hodnotám souřadnice a, obdržíme

$$X_x d\sigma = \varepsilon^3 m_0 d\sigma \sum_{+x} m a U.$$

Obdržíme tudíž k utvoření složek X_x, Y_x neb Z_x pravidlo: Volme příslušný výraz (v. str. 112.) pro A, B neb C; nahraďme každý koefficient jiným, v němž jest o faktor a více, vezměme však jen jednostranný, na kladné souřadnice a obmezený součet; výraz takto zjednaný, veličinou $\varepsilon^3 m$ násobený, jest hledanou složkou napjetí.*)

Podobně museli bychom si počínati, kdybychom hledali složky X_y, Y_y, Z_y neb X_z, Y_z, Z_z; jen že bychom v prvním případě v každém koefficientu museli přidati faktor b a v druhém případě faktor c.

Vyhledejme hodnotu napjetí X_x ve stavu nedeformovaném, kterážto hodnota ovšem se musí rovnati nule, poněvadž v stavu tom žádné napjetí se nevyskytuje. Z toho následuje

$$(a^2)_{+x} = 0,$$

zároveň jest však

$$(a^2)_{+x} = (a^2)_{-x},$$

tudíž i

$$G_0 = (a^2) = (a^2)_{+x} + (a^2)_{-x} = 0,$$

čímž dokázán výrok dříve (str. 115.) učiněný.

Hledáme-li nyní X_x ve stavu deformovaném, a obmezíme-li se na členy obsahující *první* differencialné poměry veličin u, v, w dle x, y, z, obdržíme koefficienty tvaru:

$$2[a^4]_{+x} = [a^4] = G$$

uvážíme-li, že jest:

$$[a^4]_{+x} = [a^4]_{-x}, \quad [a^4] = [a^4]_{+x} + [a^4]_{+x}.$$

Položíme-li dále

$$h = \varepsilon^3 m_0,$$

akožto výraz pro hustotu, t. j. hmotu v jednotce objemu obsaženou, obdržíme konečně:

---

*) Odvození zde podané plošných sil z bodových jest věcně obsaženo již v Poissonově na str. 97. citovaném pojednání (srv. *F. Neumann*, Vorl. über Elasticität, str. 69.); formalně jest však podstatně rozdílné a jak se mi zdá mnohem jednodušší.

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
X_x &= h\left(G\frac{\partial u}{\partial x} + H\frac{\partial v}{\partial y} + H\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
Y_x &= hH\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
Z_x &= hH\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).
\end{aligned}
$$

Rovnice ty určují složky *plošného napjetí* v jednotce plochy, bodem x, y, z proložené a na osu X kolmé; jsou v úplném souhlase s rovnicemi (4), určujícími *bodové urychlení* bodu x, y, z. Síla způsobující urychlení hmoty v jednotce objemu obsažené, má složky, jež přímo obdržíme, násobíme-li výrazy (4) hustotou čili číslem h. Složky ty můžeme však též na základě výrazů (7) pro plošná napjetí určiti. Mysleme si hmotnou částici $h\,dx\,dy\,dz$; na jednotlivé hmotné body její působí síly, vycházející jednak z hmotných bodů uvnitř rovnoběžnostěnu $dx\,dy\,dz$ položených, jednak z bodů vnějších. Hmotná částice neobdrží co celek od prvních *vnitřních* sil žádného urychlení, poněvadž se síly ty po dvou ruší; zbývá tedy působení sil *vnějších*, jichž výslednice lze pojímati co plošné síly na povrchu částice působící. Pro určení postupného urychlení hmotné částice jest tento způsob pojímání sil dovolen, poněvadž můžeme při tomto určení hmotnou částici pokládati za neproměnnou, t. j. způsob souvislosti jednotlivých v ní obsažených bodů za nezměnitelný. Jakožto složky urychlující síly na jednotku objemu působící obdržíme v tomto případě dle známého odvození:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z},\\
&\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z},\\
&\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Vložíme-li do těchto výrazů hodnoty (7) a obdobné hodnoty pro ostatní složky napjetí, obdržíme po vykonané redukci co aequivalentní veličiny výrazy:

$$hA,\quad hB,\quad hC$$

t. j. tytéž složky urychlující síly jako prvé úvahou přímou.

Z toho patrno, že můžeme způsobem zcela bezpečným, vycházejíce od existence sil bodových, dospěti k pojmu sil plošných a kinetické působení v hmotné částici pojímati buď co přímý výsledek jednotlivých bodových sil (kinetických) neb co odvozený výsledek působení plošných sil (statických). A kdežto jest *urychlení* hmotného *bodu* podmíněno *oboustranným* působením bodových sil, *napjetí* v témž bodě podmíněno působením *jednostranným* týchž sil, jest naopak napjetí v povrchu hmotné, touto *plochou* určené částice podmíněno *oboustranným* působením sil plošných, urychlení téže částice naproti tomu jen *jednostranným* působením týchž sil; tak totiž, že pouze akce vnější hmoty na částici se tu jeví, nikoli reakce této částice na vnější hmotu.

Při předcházející dedukci obmezili jsme se při silách urychlujících, na členy obsahující druhé diff. poměry veličin u, v, w dle x, y, z a při napjetích na členy obsahující jen první diff. poměry týchž veličin. Není pochyby, že vztah mezi urychlením a napjetím, právě blíže určený, by zůstal nezměněným i kdybychom pokročili ku členům vyšší diff. poměry obsahujícím. Že se tak neděje, toho příčinou jest poznání, že koefficienty těchto diff. poměrů jsou u porovnání s koefficienty jedině určenými (G a H) nesmírně malé. Poloměr sféry působivosti jest totiž při molekularných silách velmi malý; v součtech (a), (a^2), $[a^4]$ atd. jsou souřadnice patrně malé veličiny téhož řádu i lze tudíž součty vyššího stupně u porovnání se součty stupně nižšího zanedbati, ač nejsou-li tyto součty absolutně rovny nule, jako (a) neb (a^2).

Tím jest obmezení se na první členy nekonečných řad, pro složky urychlení neb napjetí platících, ospravedlněno.

O nejnovějších pracích v oboru zářivé energie.

Napsal

Dr. Jos. A. Theurer,

assistent fysikalního ústavu v Praze.

(Pokračování.)

I. O záření ultrafialovém.

(Methoda fotografická.)

Ultrafialová část spektra stala se již za dob starších předmětem hojných prací, a to hlavně proto, že bylo lze buď fosfo-