

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Josef Studnička

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 2, 144--145

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123471>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1873

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech.

(Podává dr. F. J. Studnička.)

(Pokračování).

Na str. 74. tohoto časopisu vyložen jest přímý způsob, jakým možná ustanoviti obsah čtyrstěnu, znají-li se souřadnice jeho rohů. Ač způsob tento jest zcela přirozený a přímý, jest v celku dosti rozvláčný, pročež zasluhuje povšimnutí i každý jiný rychleji, byť i nepřímé k cíli vedoucí.

Spůsobů takových podáno již několik, jak *R. Baltzer* nedávno vyložil *), chtěje jednoduchý způsob svůj odporučiti. K těmto pak připojití sluší i následující:

Značí-li x_k, y_k, z_k souřadnice bodu B_k a B_1 prozatím bod počáteční, takže

$$x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$$

a spustíme-li z bodu B_2 — obr. 8. — kolmou $B_2 P$ na rovinu $B_1 B_3 B_4$, bude pro $B_1 B_k = r_k$

$$\begin{aligned} 2 B_1 B_3 B_4 &= r_3 r_4 \sin a_{34}, \\ B_2 P &= r_2 \sin a_{23} \sin (P_2 P_4), \end{aligned}$$

kdež význam jednotlivých písmen podle článku uvedeného jest patrný; i jest tudíž

$$6T = r_2 r_3 r_4 \sin a_{23} \sin a_{34} \sin (P_2 P_4),$$

aneb zavedeme-li rožný sinus **)

$$6T = r_2 r_3 r_4 \sin O; \tag{1}$$

a poněvadž, jak známo, též platí

$$\sin^2 O = \begin{vmatrix} 1 & , \cos a_{23} & , \cos a_{24} \\ \cos a_{23} & , 1 & , \cos a_{34} \\ \cos a_{24} & , \cos a_{34} & , 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

obdržíme z tohoto vzorce, zavedeme-li $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ co kosinusy úhlů, jež uzavírá r_k s osami souřadnicovými, podle poučky

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 &= 1, \\ \alpha_k \alpha_i + \beta_k \beta_i + \gamma_k \gamma_i &= \cos a_{ki}, \end{aligned}$$

*) Viz „Berichte über die Verhandlungen der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig,“ 1870. pag. 97—98.

**) Viz *Studnička* „Základové sférické trigonometrie“ pag. 10.

$$\sin^2 O = \begin{vmatrix} \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, & \alpha_2\alpha_4 + \beta_2\beta_4 + \gamma_2\gamma_4 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2, & \alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4 + \gamma_3\gamma_4 \\ \alpha_2\alpha_4 + \beta_2\beta_4 + \gamma_2\gamma_4, & \alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4 + \gamma_3\gamma_4, & \alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2 \end{vmatrix}$$

a tudíž podle známého pravidla o násobení determinantů platí

$$\sin^2 O = \begin{vmatrix} \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, \\ \alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4, \end{vmatrix}^2,$$

načež poslední vzorec pro $6T$ se promění v

$$6T = \begin{vmatrix} r_2\alpha_2, & r_2\beta_2, & r_2\gamma_2 \\ r_3\alpha_3, & r_3\beta_3, & r_3\gamma_3 \\ r_4\alpha_4, & r_4\beta_4, & r_4\gamma_4 \end{vmatrix};$$

povážíme-li pak, že tu všeobecně

$$r_k\alpha_k = x_k, \quad r_k\beta_k = y_k, \quad r_k\gamma_k = z_k,$$

obdržíme pro obsah čtyřstěnu, jehož roh leží v bodu počátečním, vzorec

$$6T = \begin{vmatrix} x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

z něhož povstane vzorec známý

$$6T = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1, & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1, & y_4 - y_1, & z_4 - z_1 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

má-li bod B_1 souřadnice x_1, y_1, z_1 .

Ještě rychleji se přijde k cíli, užije-li se normálního tvaru rovnice roviny $B_1 B_3 B_4$ a vyjádří-li se vzdálenost bodu B_2 od této roviny vzorcem

$$B_2 P = x_2 \cos \alpha + y_2 \cos \beta + z_2 \cos \gamma;$$

abychom určili tyto kosinusy, promítněme plochu $B_1 B_3 B_4$, jak *Baltzer* v uvedeném pojednání činí, na jednotlivé roviny souřadnicové, načež snadno obdržíme, značí-li p ploský obsah tohoto trojúhelníku.

$$\cos \alpha = \frac{p_{yz}}{p}, \quad \cos \beta = \frac{p_{zx}}{p}, \quad \cos \gamma = \frac{p_{xy}}{p};$$

dosadíme-li pak tyto hodnoty do vzorce předešlého, bude

$$6T = 2x_2 p_{yz} + 2y_2 p_{zx} + 2z_2 p_{xy},$$