Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Gebauer
Řady vhodné k použití při přibližné integraci

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 6, 152--166

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123459

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1934

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Řady vhodné k použití při přibližné integraci.

Pplk. *Jan Gebauer*.

(Došlo 15. prosince 1933.)

I. Úvod. V různých početních metodách vnější balistiky užívá se k integraci systému diferenciálních rovnic řady Taylorovy nebo Eulerovy-Mac Laurinovy.

V této své práci hledám jiné řady vhodné k použití při přibližné integraci podobně jako se v balistice užívá řady Eulerovy-Mac Laurinovy v metodě G. H. M.

Sumační vzorec Eulerův-Mac Laurinův je v matematice všude zařazován do integrálního počtu a všecky způsoby jeho odvození užívají integrálního počtu.

Různé řady, jež zde odvodím, vyvodím však jen ryze algebraickým postupem (bez užití integrací) z řady Mac Laurinovy užité na danou funkci a na všechny její derivace. Tento algebraický postup skýtá zajímavý průhled do vzniku vnitřní stavby všech těchto řad (Eulerovy-Mac Laurinovy i řad nových).

Panu prof. dr. Petrovi vděčím za laskavé upozornění, že systém řad 25, který jsem zde odvodil, je totožný s formulí, kterou on bez důkazu, v jiné formě a s jiným zbytkem uveřejnil,[1]) o čemž jsem nevěděl.

Postupným derivováním Mac Laurinovy řady

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} \tag{1}$$

dostaneme řady

$$y^{(l)} = y_0^{(l)} + \sum_{n=l+1}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^{n-l}}{(n-l)!} \quad \text{pro } l = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Omezíme se jen na takový interval argumentu x, v němž y, $y^{(l)}$ jsou spojité a řady (1), (2) stejnoměrně konvergují.

II. Algebraické odvození řady Eulerovy-Mac Laurinovy z řad (1) a (2). Z rovnice (2) plyne

$$\frac{y_0^{(l+1)} x^{l+1}}{(l+1)!} = \frac{x^l}{(l+1)!} (y^{(l)} - y_0^{(l)}) - \frac{1}{(l+1)!} \sum_{n=l+2}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^n}{(n-l)!}, \tag{3}$$

---

[1]) Petr, O jedné formuli pro výpočet určitých integrálů. Časopis *44*, 1915; 454.

a pro $l = 1$ dostaneme

$$\frac{y''_0 x^2}{2!} = \frac{x}{2!}(y' - y'_0) - \frac{1}{2!}\sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^n}{(n-1)!},$$

což dosadíme do (1). Vyjde

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{1}{2!}\sum_{n=3}^{n=\infty}(n-2)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{4}$$

Odtud a z rovnice (3) (pro $l = 2$) vylučme $y_0^{(3)}$; dostaneme

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^2}{12}(y'' - y''_0) + \\ + \frac{1}{12}\sum_{n=5}^{n=\infty}(n-3)(n-4)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5}$$

Z rovnic (3) (pro $l = 4$), (5) vylučme $y_0^{(5)}$, vyjde

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^2}{12}(y'' - y''_0) + \frac{x^4}{720}(y^{(4)} - y_0^{(4)}) + \\ - \frac{1}{720}\sum_{n=7}^{n=\infty}(n-3)(n-5)(n-6)(n+8)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \end{aligned} \tag{6}$$

Odtud a z rovnice (3) (pro $l = 6$) vylučme $y_0^{(7)}$, dostaneme

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^2}{12}(y'' - y''_0) + \frac{x^4}{720}(y^{(4)} - y_0^{(4)}) + \\ - \frac{x^6}{30240}(y^{(6)} - y_0^{(6)}) + \\ + \frac{1}{30240}\sum_{n=9}^{n=\infty}(n-3)(n-5)(n-7)(n-8)(n^2 + 8n + 36)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \end{aligned} \tag{7}$$

Z rovnic (3) (pro $l = 8$), (7) vylučme $y_0^{(9)}$, vyjde nám

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^2}{12}(y'' - y''_0) + \frac{x^4}{720}(y^{(4)} - y_0^{(4)}) + \\ - \frac{x^6}{30240}(y^{(6)} - y_0^{(6)}) + \frac{x^8}{1209600}(y^{(8)} - y_0^{(8)}) + \\ - \frac{1}{1209600}\sum_{n=11}^{n=\infty}(n-3)(n-5)(n-7)\,. \\ .\,(n-9)(n-10)(n^3 + 6n^2 + 40n + 128)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \end{aligned} \tag{8}$$

Tak jsme tu postupným vylučováním $y_0^{(2)}, y_0^{(3)}, y_0^{(5)}, y_0^{(7)}, y_0^{(9)}$ odvodili řady (5), (6), (7), (8), jejichž první členy jsou prvními členy známé řady Eulerovy-Mac Laurinovy

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) + \sum_{k=1}^{k=p} a_{2k} x^{2k} (y^{(2k)} - y_0^{(2k)}) + R_{2p+3}, \quad (9)$$

jejíž zbytek R_{2p+3} je v rovnicích (5), (6), (7), (8) nově vyjádřen ve tvaru

$$R_{2p+3} = -a_{2p} \sum_{n=2p+3}^{n=\infty} \mathrm{P}_{2p}(n) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}, \quad (10)$$

kde $P_{2p}(n)$ je polynom, jenž je v n stupně $2p$-tého.

O řadě Eulerově-Mac Laurinově je dokázáno jinými důkazy,[2] že má tvar rovnice (9), proto můžeme hodnoty jejích dalších koeficientů a_{2k} pro $k = 5, 6, \ldots$ vyšetřiti snáze aplikací řady 9 na některé jednoduché funkce.

Pro celistvou funkci $y = x^{2p}$ dostaneme tak rekursní vzorec

$$a_{2(p-1)} = -2\left[\frac{p-1}{(2p)!} + \frac{a_2}{[2(p-1)]!} + \frac{a_4}{[2(p-2)]!} + \ldots + \frac{a_{2(p-2)}}{(2.2)!}\right], \quad (11)$$

platný pro $p = 2, 3, \ldots$

Pro $y = x^{2p+1}$ dostaneme jiný rekursní vzorec

$$a_{2p} = -\left[\frac{2p-1}{2(2p+1)!} + \frac{a_2}{(2p-1)!} + \frac{a_4}{(2p-3)!} + \ldots + \frac{a_{2p-2}}{3!}\right], \quad (12)$$

platný pro $p = 1, 2, 3, \ldots$

Pro $y = \sin 2x$ nebo $y = \cos 2x$ vyjde nám

$$x\frac{\cos 2x + 1}{\sin 2x} = x\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = x \cot g\, x = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k 2^{2k} a_{2k} x^{2k}. \quad (13)$$

$$\text{Avšak } x \cot g\, x = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} b_{2k} x^{2k} = 1 - \left[\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{45} + \ldots \text{ in inf.}\right], \quad (13')$$

Z porovnání řad (13), (13') plyne

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{b_{2k}}{2^{2k}}, \quad (14)$$

kterýmž vzorcem (14) vypočteme koeficienty a_{2k} nejsnáze z koeficientů b_{2k} známé řady (13'). Pro $y = e^{2x}$ dostaneme

[2]) Viz na př. Petr, Počet integrální, str. 134.

$$x \operatorname{Cotg} x = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k b_{2k} x^{2k} \tag{15}$$

a opět přijdeme k rovnici (14).

III. Odvození nové řady

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{k=p} a_{2k-1} x^{2k-1} (y^{(2k-1)} + y_0^{(2k-1)}) + R_{2p+1} \text{ pro } p = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Vyjdeme z výše odvozené rovnice (4), jež již má tvar rovnice (16) pro $p = 1$.

Z rovnic (3) (pro $l = 3$), (4) vylučme $y_0^{(4)}$. Vyjde nám

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^3}{24}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) + \\ + \frac{1}{24} \sum_{n=5}^{n=\infty} (n-2)[n(n-1) - 12] \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{17}$$

Odtud a z rovnice (3) (pro $l = 5$) vylučme $y_0^{(6)}$. Dostaneme

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^3}{24}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) + \frac{x^5}{240}(y^{(5)} + y_0^{(5)}) + \\ - \frac{1}{240} \sum_{n=7}^{n=\infty} (n-2)[n(n-1)(n-3)(n-4) + \\ - 10\{n(n-1) - 12\}] \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{18}$$

Z rovnic (3) (pro $l = 7$), (18) vylučme $y_0^{(8)}$, vyjde

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^3}{24}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) + \\ + \frac{x^5}{240}(y^{(5)} + y_0^{(5)}) - \frac{17x^7}{40320}(y^{(7)} + y_0^{(7)}) + R_9, \tag{19}$$

kde tvar zbytku R_9 vyjde obdobně jako tvary zbytkových řad R_5, R_7 v rovnicích (17), (18). Rovnice (4), (17), (18), (19) mají tvar rovnice (16). Podobně jako u řady (9), též u řady (16) odvodíme hodnoty dalších koeficientů a_{2k-1} snáze aplikací řady (16) na některé jednoduché funkce.

Užijeme-li řady (16) na celistvou funkci $y = x^{2p}$, dostaneme vzorec

$$a_{2p-1} = \frac{1}{(2p)!} - \left[\frac{a_1}{(2p-1)!} + \frac{a_3}{(2p-3)!} + \ldots + \frac{a_{2p-3}}{3!}\right]. \tag{20}$$

Užijeme-li řady (16) na celistvou funkci $y = x^{2p-1}$, vyjde nám rovnice

$$a_{2p-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2p-1)!} - \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{a_{2k-1}}{[2(p-k)]!}\right]. \tag{21}$$

Rekursní vzorce (20), (21) platí pro libovolné $p = 1, 2, \ldots$ in inf. Pro $y = \sin 2x$ dostaneme

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} = \operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1}\, 2^{2k-1} a_{2k-1} x^{2k-1}, \tag{22}$$

což porovnejme s řadou

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{k=\infty} b_{2k-1} x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots \text{ in inf.} \tag{22'}$$

Dostaneme

$$a_{2k-1} = (-1)^{k+1} \frac{b_{2k-1}}{2^{2k-1}}, \tag{23}$$

kterýmž vzorcem vypočteme koeficienty a_{2k-1} nejsnáze z koeficientů b_{2k-1} známé řady (22'). Pro $y = e^{2x}$ vyjde nám

$$\operatorname{Tg} x = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1}\, b_{2k-1} x^{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \ldots \text{ in inf.} \tag{24}$$

a zase dospějeme k rovnici (23).

IV. Odvození nekonečného počtu ($k = 1, 2, \ldots$ in inf.) řad tvaru

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{i=k} a_{k,i} \left(\frac{x}{2}\right)^i (y^{(i)} + [-1]^{i+1} y_0^{(i)}) + \\ - \left(\frac{1}{2}\right)^k a_{k,k} \sum_{n=2k+1}^{n=\infty} \frac{(n-k-1)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{25}$$

Z řady (25) dostaneme řady (4), (5) pro $k = 1, 2$. Přes to odvodím řadu (5) znovu způsobem, jehož v dalším užiji k odvození dalších řad (25) pro $k = 2, 3, 4, \ldots$

Užijme označení

$$g_{2,n} = -\frac{n-2}{2} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} : \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} = -\frac{x^2}{2} \frac{n-2}{n(n-1)}. \tag{26}$$

Poněvadž

$$g_{2,3} = g_{2,4} = -\frac{1}{1\,.\,3}\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

jest $$-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{n=4} (n-2) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} = -\frac{1}{1\,.\,3}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{n=3}^{n=4} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!},$$

což dosaďme do rovnice (4). Poněvadž řada (2) pro $l = 2$ dává

$$\sum_{n=3}^{n=4} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} = y'' - y''_0 - \sum_{n=5}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!},$$

dostaneme ihned řadu (5), kterou pišme ve tvaru

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{1}{1 \,.\, 3}\left(\frac{x}{2}\right)^2 (y'' - y''_0) +$$
$$+ \frac{1}{2^2 \,.\, 3} \sum_{n=5}^{n=6} (n-3)(n-4) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} + \tag{5'}$$
$$+ \frac{1}{2^2 \,.\, 3} \sum_{n=7}^{n=\infty} (n-3)(n-4) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}.$$

Užijme označení

$$g_{3,n} = \frac{(n-3)(n-4)}{2^2 \,.\, 3} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} : \left[-\frac{n-4}{2} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} \right] = \\ = -\frac{x^2}{2 \,.\, 3} \frac{n-3}{n(n-1)}. \tag{27}$$

Poněvadž $g_{3,5} = g_{3,6} = -\frac{1}{3 \,.\, 5}\left(\frac{x}{2}\right)^2$, platí

$$\frac{1}{2^2 \,.\, 3} \sum_{n=5}^{n=6} (n-3)(n-4) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} =$$
$$= -\frac{1}{3 \,.\, 5}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \left[-\frac{1}{2} \sum_{n=5}^{n=6} (n-4) \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} \right],$$

což dosaďme do rovnice (5′). Všimneme-li si zároveň, že řada (4) (užita na funkci y'' místo y) dává

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=5}^{n=6} (n-4) \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} = y'' - y''_0 - \frac{x}{2}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=7}^{n=\infty} (n-4) \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!},$$

vypočteme

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \left[\frac{1}{1 \,.\, 3} + \frac{1}{3 \,.\, 5}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^2 (y'' - y''_0) +$$
$$+ \frac{1}{3 \,.\, 5}\left(\frac{x}{2}\right)^3 (y^{(3)} + y_0^{(3)}) - \frac{1}{2^3 \,.\, 3 \,.\, 5} \sum_{n=7}^{n=\infty} \frac{(n-4)!}{(n-7)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}, \tag{28}$$

což je řada (25) pro $k = 3$. Porovnáme-li ji s předešlou ($k = 2$) řadou (5), vidíme, že koeficient u x^2 se změnil, přistoupil člen obsahující $x^3 (y^{(3)} + y_0^{(3)})$ a zbytek je v x řádu 7.

Podobně dále užijeme označení

$$g_{4,n} = -\frac{\dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} \dfrac{y_0^{(n)} x^n}{n!}}{\dfrac{(n-5)(n-6)}{2^2 \cdot 3} \dfrac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!}} = -\frac{x^2}{2 \cdot 5} \frac{n-4}{n(n-1)}. \quad (29)$$

Zase jest $g_{4,7} = g_{4,8} = -\frac{1}{5 \cdot 7}\left(\frac{x}{2}\right)^2$, tedy

$$-\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} \sum_{n=7}^{n=8} (n-4)(n-5)(n-6) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} =$$

$$= -\frac{1}{5 \cdot 7}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{2^2 \cdot 3} \sum_{n=7}^{n=8} (n-5)(n-6) \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!},$$

což dosaďme do rovnice (28) a zároveň si všimněme, že řada (5′) (užita na funkci y'' místo y) dává

$$\frac{1}{2^2 \cdot 3} \sum_{n=7}^{n=8} (n-5)(n-6) \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} = y'' - y''_0 - \frac{x}{2}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 3}\left(\frac{x}{2}\right)^2 (y^{(4)} - y_0^{(4)}) - \frac{1}{2^2 \cdot 3} \sum_{n=9}^{n=\infty} (n-5)(n-6) \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!};$$

vyjde nám

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^2 (y'' - y''_0) +$$

$$+ \left[\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^3 (y^{(3)} + y_0^{(3)}) - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{x}{2}\right)^4 (y^{(4)} - y_0^{(4)}) +$$

$$+ \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \sum_{n=9}^{n=\infty} \frac{(n-5)!}{(n-9)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \quad (30)$$

Řada (30) má tvar (25) (pro $k = 4$). Porovnáme-li ji s předešlými řadami (28) ($k = 3$), (5′) ($k = 2$), vidíme, že s rostoucím k se stále mění všecky koeficienty $a_{k,i}$ kromě prvního ($a_{k,1} = 1$). (U řady E. M. L. (5) i u řady (16) s přistupujícími dvojčleny se neměnily koeficienty dvojčlenů předešlých.)

Dokážeme nyní, že tímto postupem možno odvodit nekonečný počet řad, jež mají tvar (25), a zároveň odvodíme vztahy určující koeficienty $a_{k,i}$ všech těchto řad. Zde k značí pořadové číslo řady, i značí exponent argumentu x a zároveň řád derivací $y^{(i)}$, $y_0^{(i)}$ obsažených v dvojčlenu, jenž má koeficient $a_{k,i}$.

Při odvození řad (25) pro $k = 2, 3, 4$ jsme měli odvozeny řady, jež nazveme poslední a předposlední, a hledali jsme řadu následující.

Řady předposlední jsme užili na y'' (místo y) a z této řady pro y'' a z poslední řady pro y jsme *vždy rázem* vyloučili *oba* první členy druhé sumy na pravé straně rovnice (25). To nám bylo umožněno stejností podílů

$$g_{k,2k-1} = g_{k,2k} \tag{31}$$

pro $k = 2, 3, 4$ [rovnice (26), (27), (29)]. Dokažme, že (31) platí pro každé celé $k \geqq 2$. Podle rov. (26), (27), (29) pro $k = 2, 3, 4$ jest

$$g_{k,n} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{2\,(n-k)}{(2k-3)\,(n-1)\,n}. \tag{32}$$

Označíme-li $\qquad q_{k,n} = \dfrac{n\,(n-1)}{2\,(n-k)},$

jest

$$g_{k,n} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(2k-3)q_{k,n}}. \tag{33}$$

Se zřetelem na (33) podmínka (31) žádá, aby bylo

$$q_{k,2k-1} = q_{k,2k} = 2k-1 = q_k, \tag{34}$$

což platí identicky pro každé celé k.

Vidíme (34), že hodnoty tyto tvoří řadu lichých čísel a proto pro ně postačí kratší označení q_k jen s jedním indexem k, jímž jsou určeny. Podle rovnic (31), (33), (34) pro $k = 2, 3, 4$ jest

$$g_{k,2k-1} = g_{k,2k} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{q_{k-1}q_k} = g_k$$

(s kratším označením g_k).

Porovnáme-li rovnice (25), (4), (5), (28), (30), vidíme, že:

$$a_{1,1} = a_{2,1} = a_{3,1} = a_{4,1} = 1 = \frac{1}{q_1};$$

$$a_{2,2} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{q_1 q_2} = -\frac{a_{1,1}}{q_2}, \quad a_{3,2} = \frac{-2}{5} = a_{2,2} - \frac{1}{q_2 q_3},$$

$$a_{4,2} = \frac{-3}{7} = a_{3,2} - \frac{1}{q_3 q_4};$$

$$a_{3,3} = \frac{1}{15} = \frac{1}{q_1 q_2 q_3} = -\frac{a_{2,2}}{q_3}, \quad a_{4,3} = \frac{2}{21} = a_{3,3} + \frac{1}{q_3 q_4},$$

$$a_{4,4} = -\frac{1}{105} = -\frac{a_{3,3}}{q_4}.$$

Již v těchto rovnicích pro $k = 2, 3, 4$ se jeví některé z hledaných obecných vztahů mezi koeficienty $a_{k,i}$, na př.

$$a_{k,k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_k} = -\frac{a_{k-1,k-1}}{q_k}. \tag{35}$$

Pro určité k (na př. $k = 4$) známe $a_{k,i}$ i tvar zbytku řady (25). Hledáme $a_{k+1,i}$ a tvar zbytku následující $(k + 1)$ řady. k-tou řadu (25) napišme takto:

$$
\begin{aligned}
y - y_0 = {} & \frac{x}{2}(y' + y'_0) + a_{k,2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 (y'' - y''_0) + \\
& + \sum_{i=3}^{i=k} a_{k,i}\left(\frac{x}{2}\right)^i [y^{(i)} + (-1)^{i+1} y_0^{(i)}] + \\
& - \left(\frac{1}{2}\right)^k a_{k,k} \sum_{n=2k+1}^{n=2k+2} \frac{(n-k-1)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} + \\
& - \left(\frac{1}{2}\right)^k a_{k,k} \sum_{n=2k+3}^{n=\infty} \frac{(n-k-1)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Předešlou $(k - 1)$-ní řadu dostaneme, dosadíme-li $k - 1$ místo k do (25). Vyjádříme-li jí $y'' - y''_0$ (místo $y - y_0$), vyjde nám

$$
\begin{aligned}
y'' - y''_0 = {} & \sum_{i=3}^{i=k+1} a_{k-1,i-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{i-2} [y^{(i)} + (-1)^{i+1} y_0^{(i)}] + \\
& - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} a_{k-1,k-1} \sum_{n=2k+1}^{n=2k+2} \frac{(n-k-2)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} + \\
& - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} a_{k-1,k-1} \sum_{n=2k+3}^{n=\infty} \frac{(n-k-2)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Členy řad (36), (37), obsahující $\sum_{n=2k+1}^{n=2k+2}$, mají poměr

$$
g_{k+1,n} = \frac{x^2}{2} \frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k-1}} \frac{n-k-1}{n(n-1)} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{q_k q_{k+1,n}}, \tag{38}
$$

neboť podle rovnic (35), (33) jest

$$
\frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k-1}} \frac{n-(k+1)}{n(n-1)} = -\frac{1}{q_k} \frac{1}{2q_{k+1,n}}.
$$

Poněvadž pro $n = 2(k + 1)$ jest

$$
q_{k+1,n-1} = q_{k+1,n} = q_{k+1} = 2k + 1,
$$

rovnice (38) zde dá

$$
g_{k+1,2(k+1)} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = g_{k+1}.
$$

Opět stačí kratší označení g_{k+1} pro poměr, jenž umožňuje vyloučit z rovnic (36), (37) sumu od $n = 2k + 1$ po $n = 2k + 2$. Dostaneme tak pro koeficienty hledané $(k+1)$-ní řady rekursní vzorce

$$a_{k+1,2}=a_{k,2}-\frac{1}{q_kq_{k+1}},\quad a_{k+1,i}=a_{k,i}+\frac{a_{k-1,i-2}}{q_kq_{k+1}},$$
$$a_{k+1,k+1}=\frac{a_{k-1,k-1}}{q_kq_{k+1}}=-\frac{a_{k,k}}{q_{k+1}}=(-1)^k\frac{1}{q_1q_2\ldots q_{k+1}} \tag{39}$$

a zbytek $(k+1)$-ní řady vyjde jako součet

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\frac{a_{k-1,k-1}}{q_kq_{k+1}}\sum_{n=2k+3}^{n=\infty}\frac{(n-k-2)!}{(n-2k-1)!}\frac{y_0^{(n)}x^n}{(n-2)!}+$$
$$-\left(\frac{1}{2}\right)^k a_{k,k}\sum_{n=2k+3}^{n=\infty}\frac{(n-k-1)!}{(n-2k-1)!}\frac{y_0^{(n)}x^n}{n!}= \tag{40}$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}a_{k+1,k+1}\sum_{n=2(k+1)+1}^{n=\infty}\frac{(n-[k+1]-1)!}{(n-2[k+1]-1)!}\frac{y_0^{(n)}x^n}{n!},$$

kterouž rovnost ještě dokážeme:

Na levé straně rovnice (40) je součet dvou řad, jejichž koresp. členy označme A_n, B_n. Jest

$$\frac{B_n}{A_n}=-2q_{k+1}\frac{n-(k+1)}{n(n-1)}=-2(2k+1)\frac{n-(k+1)}{n(n-1)}, \tag{41}$$

neboť platí (35), a jest $q_{k+1}=2k+1$. Z rovnice (41) plyne

$$A_n+B_n=A_n\frac{[n-(2k+1)][n-(2k+2)]}{n(n-1)}=$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}a_{k+1,k+1}\frac{(n-k-2)!}{[n-(2k+3)]!}\frac{y_0^{(n)}x^n}{n!}, \tag{42}$$

neboť již platí třetí rovnice (39). Z rovnosti (42) zřejmě plyne rovnost (40). Q. e. d.

V. Odvození vzorců pro přímý výpočet koeficientů $a_{k,i}$ řady (25). Pro $k=2, 3, 4$ jest

$$a_{k,2}=-\frac{k-1}{2k-1}=-\frac{k-1}{q_k}, \tag{43}$$

kterýž vzorec platí pro celá $k\geqq 2$, neboť podle první rovnice (39) jest

$$a_{k+1,2}=-\frac{k-1}{2k-1}-\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=-\frac{(k+1)-1}{2(k+1)-1}.\quad \text{Q. e. d.}$$

Dále dokážeme, že

$$a_{k,3}=\frac{k-2}{3(2k-1)}=\frac{k-2}{3q_k} \tag{44}$$

pro celé $k \geqq 2$. Poněvadž $a_{k-1,1} = 1$, druhá rov. (39) pro $i = 3$ dá

$$a_{k+1,3} = a_{k,3} + \frac{1}{q_k q_{k+1}},$$

tedy vzhledem na první rov. (39) z rovnice (43) plyne (44).

Dále podle druhé rov. (39) jest

$$a_{k+1,4} = a_{k,4} - \frac{k-2}{(2k-3)(2k-1)(2k+1)}, \tag{45}$$

neboť jest

$$a_{k-1,2} = -\frac{k-2}{2(k-1)-1}, \quad q_k = 2k-1, \quad q_{k+1} = 2k+1.$$

Podobně z rovnic (39), (44) odvodíme

$$a_{k+1,5} = a_{k,5} + \frac{a_{k-1,3}}{q_k q_{k+1}} = a_{k,5} + \frac{k-3}{3(2k-3)(2k-1)(2k+1)}. \tag{46}$$

Rovnicemi (39), (43) až (46) vypočteme tabulku koeficientů $a_{k,i}$.

V této tabulce si povšimněme zlomků, jimiž jsou koeficienty $a_{k,i}$ dány pro $k \leqq 10$. Shledáme, že jest

$$a_{k,4} = -\frac{(k-3)(k-2)}{6(2k-3)(2k-1)}, \quad a_{k,5} = \frac{(k-4)(k-3)}{30(2k-3)(2k-1)},$$

$$a_{k,6} = -\frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{90(2k-5)(2k-3)(2k-1)}, \tag{47}$$

$$a_{k,7} = \frac{(k-6)(k-5)(k-4)}{630(2k-5)(2k-3)(2k-1)}.$$

K důkazu, že rovnice (47) platí též pro $k + 1$ (na př. $k + 1 = 11$), postačí dosazovati z nich do rovnic (45), (46), po př. užíti rovnic (39). Úplnou indukcí plyne pak platnost rovnic (47) pro každé celé $k \geqq 2$.

Z odvozených vzorců (43), (44), (47) můžeme již uhádnouti obecný tvar koeficientů $a_{k,i}$. Vidíme, že obecně

pro $6 \geqq i = 2s \geqq 2$ jest

$$a_{k,2s} = -\frac{2^s}{(2s)!} \frac{(k-s)(k-s-1)\dots(k-2s+1)}{(2k-1)(2k-3)\dots(2k-2s+1)}, \tag{48}$$

pro $7 \geqq i = 2s-1 \geqq 3$ jest

$$a_{k,2s-1} = \frac{2^{s-1}}{(2s-1)!} \cdot \frac{(k-s)(k-s-1)\dots(k-2s+2)}{(2k-1)(2k-3)\dots(2k-2s+3)}. \tag{49}$$

Vskutku pohled na tabulku koeficientů $a_{k,i}$ přesvědčuje, že vzorce (48), (49) (odvozené jen pro $i \leqq 7$) platí pro $i \leqq 10$, $k \leqq 10$. Že platí obecně pro každé $k \geqq 2$, $k \geqq s \geqq 2$, dokážeme, ukážeme-li, že vyhovují rovnicím (39). Že vyhovují první rov. (39), jsme do-

$k \backslash i$	1	2	3	4	5	6	q_k
1	1	—	—	—	—	—	1
2	1	$\frac{-1}{3}$	—	—	—	—	3
3	1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{15}$	—	—	—	5
4	1	$\frac{-3}{7}$	$\frac{2}{3\cdot 7}=\frac{2}{21}$	$\frac{-1}{3\cdot 5\cdot 7}=\frac{-1}{105}$	—	—	7
5	1	$\frac{-4}{9}$	$\frac{3}{3\cdot 9}=\frac{1}{9}$	$\frac{-2\cdot 3}{6\cdot 7\cdot 9}=\frac{-1}{63}$	$\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}=\frac{1}{945}$	—	9
6	1	$\frac{-5}{11}$	$\frac{4}{3\cdot 11}=\frac{4}{33}$	$\frac{-3\cdot 4}{6\cdot 9\cdot 11}=\frac{-2}{99}$	$\frac{2\cdot 3}{30\cdot 9\cdot 11}=\frac{1}{495}$	$\frac{-1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}=\frac{-1}{10395}$	11
7	1	$\frac{-6}{13}$	$\frac{5}{3\cdot 13}=\frac{5}{39}$	$\frac{-4\cdot 5}{6\cdot 11\cdot 13}=\frac{-10}{429}$	$\frac{3\cdot 4}{30\cdot 11\cdot 13}=\frac{2}{715}$	$\frac{-2\cdot 3\cdot 4}{90\cdot 9\cdot 11\cdot 13}=\frac{-4}{19305}$	13
8	1	$\frac{-7}{15}$	$\frac{6}{3\cdot 15}=\frac{2}{15}$	$\frac{-5\cdot 6}{6\cdot 13\cdot 15}=\frac{-1}{39}$	$\frac{4\cdot 5}{30\cdot 13\cdot 15}=\frac{2}{585}$	$\frac{-3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 11\cdot 13\cdot 15}=\frac{-2}{6435}$	15
9	1	$\frac{-8}{17}$	$\frac{7}{3\cdot 17}=\frac{7}{51}$	$\frac{-6\cdot 7}{6\cdot 15\cdot 17}=\frac{-7}{255}$	$\frac{5\cdot 6}{30\cdot 15\cdot 17}=\frac{1}{255}$	$\frac{-4\cdot 5\cdot 6}{90\cdot 13\cdot 15\cdot 17}=\frac{-4}{9945}$	17
10	1	$\frac{-9}{19}$	$\frac{8}{3\cdot 19}=\frac{8}{57}$	$\frac{-7\cdot 8}{6\cdot 17\cdot 19}=\frac{-28}{969}$	$\frac{6\cdot 7}{30\cdot 17\cdot 19}=\frac{7}{1615}$	$\frac{-5\cdot 6\cdot 7}{90\cdot 15\cdot 17\cdot 19}=\frac{-7}{14535}$	19

$k \backslash i$	7	8	9	10	q_k
7	$\frac{1}{105\cdot 9\cdot 11\cdot 13}=\frac{1}{135135}$	—	—	—	13
8	$\frac{4}{105\cdot 11\cdot 13\cdot 15}=\frac{4}{225225}$	$\frac{-2^4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8!\,15\cdot 13\cdot 11\cdot 9}=\frac{-1}{2027025}$	—	—	15
9	$\frac{10}{105\cdot 13\cdot 15\cdot 17}=\frac{2}{69615}$	$\frac{-2^4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{8!\,17\cdot 15\cdot 13\cdot 11}=\frac{-1}{765765}$	$\frac{2^4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{9!\,17\cdot 15\cdot 13\cdot 11}=\frac{1}{34459425}$	—	17
10	$\frac{20}{105\cdot 15\cdot 17\cdot 19}=\frac{4}{101745}$	$\frac{-2^4\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{8!\,19\cdot 17\cdot 15\cdot 13}=\frac{-1}{440895}$	$\frac{2^4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{9!\,19\cdot 17\cdot 15\cdot 13}=\frac{1}{11904165}$	$\frac{-2^5\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10!\,19\cdot 17\cdot 15\cdot 13\cdot 11}=\frac{-1}{654729075}$	19

kázali již na počátku odst. V. Dokažme, že vyhovují též druhé rov. (39). Pro $i = 2s$ jest

$$a_{k+1,2s} = -\frac{2^s}{(2s)!}\cdot\frac{(k+1-s)(k-s)\dots(k-2s+2)}{(2k+1)(2k-1)\dots(2k-2s+3)},$$

$$a_{k-1,2s-2} = -\frac{2^{s-1}}{(2s-2)!}\cdot\frac{(k-s)(k-s-1)\dots(k-2s+2)}{(2k-3)(2k-5)\dots(2k-2s+1)}.$$

Dosadíme-li z těchto rovnic do druhé rov. (39), dostaneme identitu platnou pro každá k, s, jak se můžeme snadno přesvědčit.

Pro $i = 2s - 1$ jest

$$a_{k+1,2s-1} = \frac{2^{s-1}}{(2s-1)!}\cdot\frac{(k+1-s)(k-s)\dots(k-2s+3)}{(2k+1)(2k-1)\dots(2k-2s+5)},$$

$$a_{k-1,2s-3} = \frac{2^{s-2}}{(2s-3)!}\cdot\frac{(k-s)(k-s-1)\dots(k-2s+3)}{(2k-3)(2k-5)\dots(2k-2s+3)},$$

což zase dosaďme do druhé rov. (39); zase dostaneme identitu platnou pro každá k, s.

Přesvědčme se, že vzorce (48), (49) vyhovují též třetí rov. (39). Pro $k = 2s$ rov. (48) dá ihned totéž, co dává třetí rov. (39) pro $k + 1 = 2s$. Pro liché $k = 2s - 1$ rov. (49) dá totéž, co dává třetí rov. (39) pro $k + 1 = 2s - 1$.

Tím je dokázána platnost vzorců (48), (49) pro každé celé $k \geqq 2$, $s \leqq k$.

VI. Srovnávací posudek o vhodnosti řad (9), (16), (25) použitých k přibližné integraci. Zbytek Eulerovy-Mac Laurinovy řady (9) jsme označili R_{2p+3}, poněvadž je v x řádu $(2p + 3)$. Před ním je v této řadě derivace nejvyššího řádu $2p$.

Zbytek řady (25) označme R_{2k+1}, neboť je v x řádu $(2k + 1)$. Před ním v řadě (25) je nejvyšší derivace řádu k.

Zbytek řady (16) označme $R_{2p'+1}$; je řádu $2p' + 1$ a před ním v řadě (16) je nejvyšší derivace řádu $(2p' - 1)$.

Řad (9), (16), (25) užijme nyní k přibližné integraci, t. j. k výpočtu rozdílu $y - y_0$.

a) Užijme jich k výpočtu rozdílu $y - y_0$ tak, že interval x, jenž k tomu rozdílu přísluší, nerozdělíme v intervaly menší, t. j. vypočteme hodnotu omezeného integrálu

$$\int_0^x y'\,dx = y - y_0$$

jen ze známých hodnot $y^{(i)}$, $y_0^{(i)}$ příslušných krajům integračního intervalu x.

Přesnost výpočtu různými řadami (9), (16), (25) smíme považovati za stejnou, jestliže zanedbané chyby (zbytky R) jsou v x stejného řádu, tedy když jest $2p + 3 = 2p' + 1 = 2k + 1$, neboli $p' = k = p + 1$. T. zn., že v Eulerově-Mac Laurinově řadě (9) musíme vzíti v počet hodnoty y', y'_0 a krajní hodnoty všech sudých derivací až k řádu $2p$, v řadě (16) musíme vzíti v počet krajní hodnoty všech lichých derivací až k řádu $2p' - 1 = 2(p + 1) - 1 = 2p + 1$, tedy až k řádu o 1 vyššímu než u řady (9), v řadě (25) musíme vzíti v počet krajní hodnoty všech derivací, avšak jen až k řádu $k = p + 1$, jenž pro $p > 1$ je vždy menší než nejvyšší řády derivací užitých v řadách (9) a (16). Tu se z řad (9), (16), (25) řada (25) jeví nejvýhodnější.

b) Užijme řad (9), (16), (25) k výpočtu $y - y_0$ tak, že interval x rozdělíme na n stejných dílčích intervalů $h = x/n$. Při tomto postupu je užití Eulerovy-Mac Laurinovy řady (9) nesporně výhodnější než užití řad (16), (25), a to proto, že suma v řadě (9) obsahuje jen rozdíly $y^{(2k)} - y_0^{(2k)}$, takže při součtu těchto sum příslušných dílčím intervalům zmizí (ruší se) členy obsahující hodnoty sudých derivací v dílčích bodech a zbudou jen rozdíly krajních hodnot (příslušných krajům integračního intervalu x).

Příklad. Vypočtěme přibližně číslo e užitím řad (9), (16), (25) a Mac Laurinovou řadou

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}. \qquad (50)$$

Položme v nich $x = 1$. Zvolme stejný řád (9) zanedbaných zbytků R, tedy $2p + 3 = 2p' + 1 = 2k + 1 = n + 1 = 9$, neboli $p = 3$, $p' = 4$, $n = 8$, $k = 4$. Řada (9) (Eulerova-Mac Laurinova) dá

$$e - 1 \doteq \frac{1}{2}(e + 1) - \frac{1}{12}(e - 1) + \frac{1}{720}(e - 1) - \frac{1}{30240}(e - 1).$$

Odtud plyne

$$e \doteq \frac{47839}{17599} = 2{,}7182|\underline{794}.$$

Řada (16) zde dá

$$e - 1 \doteq \frac{1}{2}(e + 1) - \frac{1}{24}(e + 1) + \frac{1}{240}(e + 1) - \frac{17}{40320}(e + 1),$$

odkudž plyne

$$e \doteq \frac{58951}{21689} = 2{,}718|\underline{01}.$$

Řada (25) zde dá

$$e - 1 \doteq \frac{1}{2}(e + 1) - \frac{3}{28}(e - 1) + \frac{1}{84}(e + 1) - \frac{1}{1680}(e - 1),$$

odkudž plyne

$$e \doteq \frac{2721}{1001} = 2{,}718281|7.$$

Řada (50) zde dá $e \doteq 2{,}71828|77.$

Poněvadž $e = 2{,}718281828\ldots$, dala řada (25) výsledek nejpřesnější, pak klesá přesnost výpočtu řadami (50), (9), (16).

*

Sur des séries applicables dans l'intégration approximative.

(Extrait de l'article précédent.)

I. Remarque sur l'application des séries à l'intégration approximative dans la balistique.

II. L'auteur donne une démonstration nouvelle de la série d'Euler-Mac Laurin, en éliminant successivement y''_0 et toutes les dérivées d'ordre impair de la série de M. L. et de ses séries dérivées. Il fait voir que le reste de la série E. M. L. est donné par la somme fournie par l'équation (10) (du texte tchèque) ou $P_{2p}(n)$ désigne un certain polynôme de l'ordre $2p$.

III. L'auteur déduit une série nouvelle (16), en éliminant successivement toutes les dérivées d'ordre pair de la série M. L. et de ses séries dérivées. Il donne des formules récurrentes pour le calcul des coefficients de cette série, ainsi que des relations directes entre ces coefficients et ceux de la série M. L. pour les fonctions tg x et Tg x.

IV. La formule (25*) donne (pour $k = 1, 2, \ldots$) un nombre illimité de séries, dont les coefficients $a_{k,i}$, $a_{k,k}$ satisfont aux formules récurrentes (39), (35).

V. La démonstration du fait que les coefficients $a_{k,i}$ de la série (25) sont donnés, en général, par les formules (48) (s entier ≥ 1, $k \geq 2s$), (49) (s entier ≥ 1, $k \geq 2s - 1$).

VI. L'auteur fait une étude comparative des séries E. M. L., (16), (25) et M. L., en ce qui concerne leur utilité pour l'intégration approximée. Il fait voir que la série (25), où k est choisie d'une manière convenable, se prête mieux à l'application que les autres séries, si l'on ne subdivise pas l'intervalle d'intégration. Dans le cas contraire, c'est la série E. M. L. qui vaut mieux.

L'auteur applique toutes les séries considérées au calcul du nombre e.

---

*) Cette série a été donné, dans ce Journal 1915 p. 454, dans une forme différente et sans démonstration, par M. K. Petr, ce que l'auteur ignorait au début de son travail.