Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Ellipsa jako orthogonálný průmět kruhu.

Napsal **Antonín Sýkora**, professor v. v. v Rakovníku.

Mnohé vlastnosti ellipsy podávají se takořka samy, považujeme-li tuto křivku za *orthogonálný průmět kruhu*. Třeba jen vlastnosti kruhu přenésti na jeho průmět.

Vlastnosti projektivné. Vlastnost útvaru slove projektivnou, která i o průmětu jeho platí.

Takové vlastnosti orthogonálného průmětu jsou:

Průmět přímky jest zase přímka.

Průmět průsečíka dvou čar jest průsečíkem průmětů jejich, ježto jest oběma čarám společným bodem.

Z toho vyplývá, že průmět rovinné čáry má s každou přímkou tolik společných bodů, jako čára sama, čili že průmět čáry jest téhož stupně jako čára sama.

Dotýká-li se přímka křivky, dotýká se též průmět přímky průmětu křivky a to v průmětu bodu, v němž se původní přímka křivky dotýká. Neboť protíná-li přímka křivku ve dvou bodech, jež se stále sobě blíží, činí tak i jejich průměty, a když ony dva body v jeden splynou, sjednotí se i jejich průměty; sečna i její průmět přejdou v tečny; průmět tečny původní křivky bude se dotýkati průmětu křivky a to v průmětu dotyčného bodu. Lze-li vésti k rovinné křivce od kteréhokoli bodu její roviny dvě nebo několik tečen, lze i k průmětu jejímu od průmětu onoho bodu vésti právě tolik tečen; t. j. průmět křivky jest téže třídy jako křivka sama.

Je-li úsek přímky v prostoru rozdělen na stejné částky, jest i jeho průmět rozdělen průměty dělících bodů na částky stejné. Zvláště: Průmět středu úseku jest středem průmětu jeho.

Poměr úseků téže přímky rovná se poměru jejich průmětů.

Průměty rovnoběžných přímek jsou zase přímky rovnoběžné.

Průmět harmonické čtveřiny bodů (paprsků) jest zase harmonická čtveřina bodů (paprsků).

Průmět středu křivky jest středem průmětu jejího. (Středem křivky slove bod, jenž půlí všecky jím vedené tětivy.)

Průmět průměru křivky jest průměrem průmětu jejího. (Průměrem rovinné křivky jest geometrické místo středů osnovy rovnoběžných tětiv.) Neboť osnově rovnoběžných tětiv křivky přísluší osnova rovnoběžných tětiv průmětu jejího, a středům jejich středy průmětů.

Je-li průměr křivky přímočarý, jest i průměr průmětu přímočarý.

Je-li přímka v prostoru rovnoběžna s rovinou průmětnou, jest její průmět roven délce přímky samé: jinak jest průmět a_1 úseku a roven $a \cos \alpha$, znamená-li α odchylku přímky od roviny průmětné.

Průmět úhlu není úhel s ním stejný. Ale úhel pravý, jehož aspoň jedno rameno jest rovnoběžno s průmětnou, jest zase úhel pravý.

Rovinný útvar U budeme moci snáze srovnávati s jeho průmětem U_1, převedeme-li původní útvar do průmětné roviny π, což může se státi, otočíme-li jej kolem průsečnice O jeho roviny ϱ s rovinou průmětnou, až obě roviny v jedinou splynou, anebo promítneme-li útvar U do roviny průmětné paprsky S vedenými kolmo k rovině τ, jež půlí úhel rovin π a ϱ; paprsky takové jsou k oběma rovinám stejně nakloněny a odtínají na kolmicích k průsečnici O stejné částky.

Útvary takové, U a U_1 v téže rovině π obsažené, nazýváme *orthogonálně příbuznými*, vzájemný vztah jejich *orthogonálnou příbuzností* neb *affinitou* a U_1 *obrazem* útvaru U; průsečnice O rovin ϱ a π slove *osou příbuznosti.*

Orthogonálná příbuznost záleží tedy v tom,

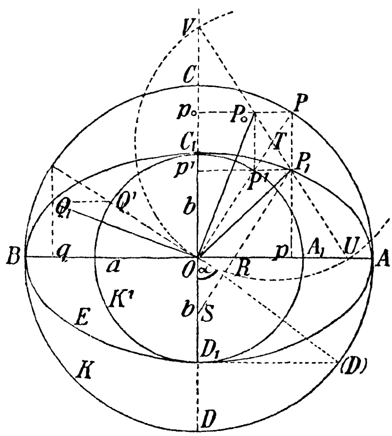
1. že bod původní a jeho obraz jsou vždy v téže přímce kolmé k ose O a

2. že poměr těchto kolmic jest veličina stálá.

Odtud zároveň vyplývá, že jakákoli přímka a její obraz protínají se v témž bodě na ose O.

Obraz U_1 jest stanoven útvarem U, osou O a poměrem λ, v němž kolmice k ose (ordináty) zkrátiti jest, anebo, což totéž jest, obrazem a_1 jednoho bodu a útvaru U.

Uvedené projektivné vlastnosti platí patrně i o útvaru U a jeho obrazu U_1.



Obr. 1.*)

K danému bodu b najdeme obraz b_1, spojíce jej s bodem a, jehož obraz známe, a průsečík p spojnice ab a osy O s bodem a_1; kde tato přímka seče kolmici vedenou bodem b k ose O, máme obraz b_1 bodu b. — Samo se rozumí, že, je-li $ab \parallel O$ (průsečík p úběžný), jest i $a_1 b_1 \parallel O$.

Opačně postupujíce, najdeme zase k danému obrazu b_1 bod původní b.

1. *Průmět (obraz) kružnice K*, jejíž rovina jest od roviny průmětné odchýlena o daný úhel α, vyrýsujeme, vedeme-li v ní průměry AB, $CD \perp AB$ a zkrátíme poloměry OC, OD tak, aby $OC_1 = b$ byl roven průmětu poloměru $OC = OA = a$, [viz trojúhelník $OD_1 (D)$]. Spustíme-li pak i s jiných bodů P $Q, \ldots$ kružnice K kolmice na průměr AB, půjde jen o to,

*) V obrazci jest doplniti písmeno Q při průseku přímky qQ_1 s kruhem K.

abychom je zkrátili v témž poměru $\frac{b}{a}$. To se stane, opíšeme-li i poloměrem $OC_1 = b$ soustředný kruh K', spojíme body $P, Q, \ldots$ se středem O a průsečíky těchto spojnic s kruhem K' vedeme přímky $P'P_1$, $Q'Q_1, \ldots$ rovnoběžně s průměrem AB; průsečíky jejich P_1, $Q_1, \ldots$ s kolmicemi Pp, $Qq, \ldots$ jsou žádané průměty (obrazy) bodů $P, Q, \ldots$, ježto

$$\frac{pP_1}{pP} = \frac{OP'}{OP} = \frac{b}{a}, \text{ a t. p.}$$

2. Z konstrukce té jest zároveň patrno, že

$$\frac{p'P_1}{p'P'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{a}{b},$$

t. j. křivku E lze též odvoditi z kruhu K', prodloužíme-li jeho úsečky $p'P'$ v poměru $a : b$.

3. Naopak lze kruh K' míti za průmět křivky E, jejíž rovina seče průmětnu (rovinu kruhu K') po přímce CD a jest od ní tak odchýlena, že se bod A promítá do bodu A_1, t. j. o úhel α, jehož cosinus rovná se $\frac{b}{a}$; neboť promítnutím křivky E zkrátí se úsečky $p'P_1$ v poměru $\frac{b}{a}$.

Ježto přímky promítající křivku E do kruhu K' tvoří rotační plochu válcovou o podstavě K', *jeví se křivka E jako rovinný průsek přímého kruhového válce* o základně K' a jest tedy dle věty Dandelinovy *ellipsou,* jejíž hlavní osa jest AB, vedlejší CD.

Nezávisle na této větě se o tom přesvědčíme, dokážeme-li, že součet vzdáleností každého bodu křivky E od dvou pevných bodů jest stálý. Vytknouce na přímce AB body F, G, jejichž vzdálenosti od bodu C_1 rovnají se $OA = a$, tedy

$$OF = OG = c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

a znamená-li Θ úhel AOP, máme

$$pP_1 = y = b \sin \Theta, \quad Op = x = a \cos \Theta,$$

a vložíme-li tyto hodnoty do vzorců stanovících odlehlosti bodu P_1 od F a G:

$$FP_1^2 = \varrho_1^2 = y^2 + (x - c)^2$$
$$GP_1^2 = \varrho_2^2 = y^2 + (x + c)^2,$$

nabudeme

$$FP_1^2 = b^2 \sin^2 \Theta + a^2 \cos^2 \Theta - 2ac \cos \Theta + c^2,$$

a ježto $b^2 = a^2 - c^2$:

$$FP_1^2 = a^2 + c^2 (1 - \sin^2 \Theta) - 2ac \cos \Theta = a^2 - 2ac \cos \Theta + c^2 \cos^2 \Theta$$

$$FP_1 = a - c \cos \Theta,$$

a podobně

$$\begin{aligned} GP_1^2 &= (c + x)^2 + y^2 \\ &= c^2 + 2ac \cos \Theta + a^2 \cos^2 \Theta + (a^2 - c^2) \sin^2 \Theta \\ &= a^2 + 2ac \cos \Theta + c^2 \cos^2 \Theta \\ GP_1 &= a + c \cos \Theta. \end{aligned}$$

Tedy $\qquad \varrho_1 + \varrho_2 = FP_1 + GP_1 - 2a$

pro kterýkoli bod průmětu E.

4. Vedeme-li bodem ellipsy P_1, sestrojené jako v obr. 1., přímku $P_1 S \parallel PO$, a poznamenáme průsečíky její s osami R, S, budou v rovnoběžnících PP_1SO, $P'P_1RO$ protější strany sobě rovny:

$$P_1 S = OP = a,$$
$$P_1 R = OP' = b,$$

a $\qquad RS = a - b$ rovno rozdílu poloos.

Odtud vyplývá věta:

Smýkají-li se konce R, S úseku $RS = a - b$ po dvou k sobě kolmých přímkách, opisuje bod P_1 ellipsu o poloosách $SP_1 = a$, $RP_1 = b$.

5. Doplníme-li trojúhelník PP_1P^1 na obdélník $PP_1P^1P_0$, vedeme jeho druhou úhlopříčku P_1P_0 a prodloužíme ji, až protne osy ellipsy v bodech U, V, bude

$$P_1 U = b, \ P_1 V = a.$$

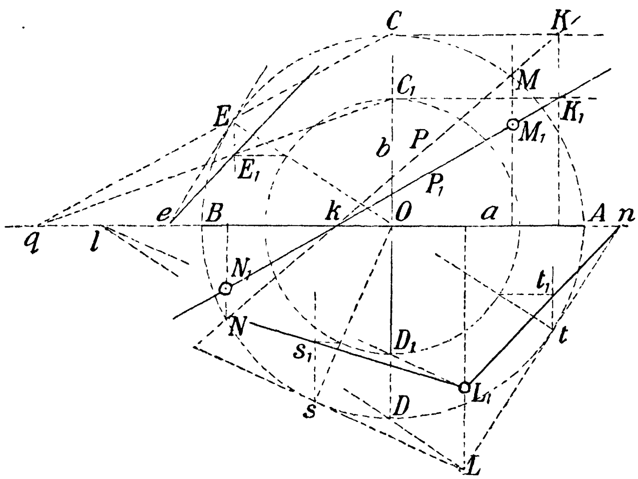
To dává větu:

Smýkají-li se konce U, V úseku $UV = a + b$ po dvou vespolek kolmých osách, opisuje dělící bod P_1 ellipsu o poloosách $P_1 V = a$, $UP_1 = b$.

Z uvedeného vysvítá, že každý bod přímky, jejíž dva pevné body smýkají se po dvou kolmých přímkách, opisuje ellipsu. — Tuto větu lze zobecniti tak, že dané přímky mohou býti i mimoběžné. Samo jest patrno, jak lze vět těchto užíti k sestrojení ellipsy, známy-li jsou její osy.

6. Úloha. *Dána jest hlavní osa a bod E_1 ellipsy; sestrojiti jest osu vedlejší.*

Nad hlavní osou jako průměrem opišme kruh (obr. 2.), za jehož obraz žádanou ellipsu považujeme. Vedeme-li daným bodem E_1 a středem O křivky kolmice k hlavní ose, nabudeme jako průsečíků jejich s kruhem bodů E a C (nebo D); první z nich jest ten, jehož obraz jest E_1, a obraz druhého ustanovíme, vedeme-li CE a průsečíkem jejím q s osou AB a bodem E_1 přímku qE_1, jež na přímce OC bod C_1 jako obraz bodu C stanoví. OC_1 jest polovice vedlejší osy.



Obr. 2.

Je-li dána místo hlavní osy osa vedlejší, máme dle čl. 2. postup obdobný.

7. Úloha. *Je-li ellipsa stanovena osami, vyšetřiti jest její průsečíky s danou přímkou.*

Nad hlavní osou vyrýsujme opět kruh, za jehož obraz ellipsu míti můžeme, a přímku Kk, jejíž obrazem jest daná přímka K_1k. Té nabudeme, vedeme-li na př. vrcholy C, C_1 přímky CK, C_1K_1 rovnoběžně s osou AB, průsečíkem K_1 kolmici K_1K k ose AB a průsečíkem jejím K s CK a bodem k, v němž K_1k osu AB seče, přímku Kk. — Stanovíme-li konečně obrazy M_1, N_1 bodů M, N, v nichž Kk kruh protíná, nabudeme žádaných průsečíků přímky K_1k s ellipsou.

8. Úloha. *V daném bodu E_1 ellipsy jest sestrojiti tečnu.* Určeme si na kruhu opsaném nad osou AB bod E, jehož obrazem jest E_1, sestrojme v něm tečnu Ee a stanovme její obraz E_1e.

9. *Máme-li daným bodem L_1 vně ellipsy ležícím, vésti tečny*, ustanovíme k bodu L_1, jejž za obraz považujeme, původní L (přímkami L_1D_1l, lDL), vedeme z něho tečny na kruh $ACBD$ a určíme obrazy dotyčných bodů i přímek.

10. Úlohu, *vésti tečnu na ellipsu* — pojatou jako obraz kruhu — *rovnoběžně s danou přímkou*, lze řešiti obdobně. Vyšetříme přímku, jejíž obraz jest dán, vedeme s ní rovnoběžně tečny kruhu a určíme jejich obrazy.

11. Střed kruhu půlí všecky tětivy jím vedené, a poněvadž obraz středu každého úseku jest středem obrazu jeho, nabudeme věty:

Všecky tětivy ellipsy vedené bodem O, kterýž jest obrazem středu kruhu, jsou tímto bodem půleny; týž jest tedy středem ellipsy.

12. Průměr kolmý k osnově rovnoběžných tětiv kruhu půlí je všecky. Obrazy těchto rovnoběžných tětiv jsou rovnoběžné tětivy ellipsy a obrazy středů jejich středy obrazů; t. j.

Obraz průměru kruhu jest průměrem ellipsy.

A ježto obraz přímky jest zase přímka:

Středy osnovy rovnoběžných tětiv ellipsy jsou v přímce, čili:

Průměry ellipsy jsou přímočaré.

Průměry ellipsy procházejí středem jejím, ježto i příslušné průměry kruhu středem jeho jdou. Naopak jest každá, středem ellipsy vedená tětiva jejím průměrem.

Ježto průměry kruhu jsou od osy příbuznosti AB nestejně odchýleny, jsou jejich obrazy nestejně dlouhé; průměry ellipsy nejsou tedy stejné; nejdelší průměr jest hlavní (veliká) osa, nejkratší malá osa.

Úlohu: „jsou dány osy ellipsy; průměr jistým směrem vedený jest omeziti“ řešíme jako úlohu čl. 7.

13. Vedeme-li v kruhu dva k sobě kolmé průměry, půlí každý všecky tětivy rovnoběžné s průměrem druhým; průměry takové slovou *sdruženými.* Obrazy jejich mají touž vlastnost, jakž z článku předešlého vysvítá.

Obrazy sdružených průměrů kruhu jsou sdružené průměry ellipsy.

Ježto každému průměru kruhu přísluší jediný sdružený průměr, má tuto vlastnost i ellipsa; t. j.:

Každému průměru ellipsy přísluší jediný určitý průměr ním sdružený.

V kruhu stojí sdružené průměry na sobě kolmo; ale ježto obraz úhlu pravého jest jen tenkráte zase pravý úhel, je-li jedno rameno rovnoběžno s osou příbuznosti, patrno, že v ellipse obecně sdružené průměry na sobě kolmo nestojí.

Jediná jen dvojice sdružených průměrů kruhu jeví se i v obraze jako dvojice k sobě kolmých průměrů, totiž ona, již podává průměr kruhu rovnoběžný (nebo splývající) s osou příbuznosti AB a průměr k němu kolmý CD; obrazy jejich jsou osy ellipsy.

Osy ellipsy jsou jedinou dvojicí sdružených průměrů, jež na sobě kolmo stojí.

14. *Máme-li k danému průměru ellipsy sestrojiti sdružený,* opíšeme nad hlavní osou kruh, vyhledáme v něm příslušný průměr, vyrýsujeme průměr k němu kolmý (sdružený) a jeho obraz jest žádaný sdružený průměr ellipsy.

Je-li ellipsa vyrýsována, vedeme s daným průměrem rovnoběžnou tětivu a spojíme její střed se středem křivky.

15. Tečna kruhu stojí na průměru vedeném bodem dotyčným kolmo; vyrýsujeme-li k tomuto průměru sdružený, bude s ním ona tečna rovnoběžna. A ježto obrazy přímek rovnoběžných jsou zase vespolek rovnoběžny, a obraz tečny zase tečnou obrazu křivky, máme větu:

Tečna ellipsy jest rovnoběžna s průměrem sdruženým s oním, jenž prochází dotyčným bodem.

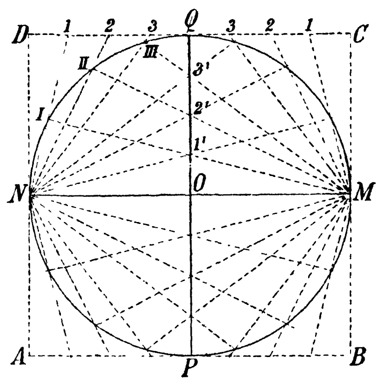
Podle toho rozřešíme snadno úlohy:

a) Daným bodem na ellipse vésti jest tečnu. Spojíme tento bod se středem ellipsy a sestrojíme k průměru tomu sdružený; s tím pak vedeme daným bodem žádanou tečnu rovnoběžně.

b) *Je-li tečny vésti rovnoběžně s danou přímkou,* sestrojíme průměr sdružený s průměrem rovnoběžným s danou přímkou; průsečíky jeho s ellipsou jsou dotyčné body, jimiž žádané tečny vésti jest daným směrem.

c) *Je-li vésti tečnu daným bodem vně ellipsy,* vyrýsujeme ji, přiložíce pravítko; bod dotyčný jest průsečík průměru sdruženého s průměrem rovnoběžným s tečnou. Právě tak má se věc u druhé tečny, již daným bodem k ellipse vésti lze.

Zde předpokládáme v úlohách těchto, že ellipsa jest vyrýsována.



Obr. 3.

16. *Strojení ellipsy z průměrů sdružených.* Jednotlivé body kružnice lze takto stanoviti:

Sestrojíme čtverec *ABCD,* jehož strany rovnají se průměru kruhu; spojíme středy protilehlých stran přímkami *MN, PQ*; pak rozdělíme dvě protější strany, na př. *AB, CD,* jakož i přímku k nim kolmou *PQ* na týž sudý počet stejných dílů, na př. každou na 8, a číslujeme dělící body na polovicích *CQ, DQ* počínajíce od vrcholů *C, D,* na přímce *PQ* od středu *O.* Dělící body na částce *OQ* spojíme s body *M, N,* body na částce *QC* s bodem *M,* a body na *QD* s bodem *N.* Průsečíky přímek vedených body na *DQ* s přímkami spojujícími bod *M* s týmiž číslicemi označenými body na částce *OQ* jsou body kružnice. Průsečík II přímky $M2^1$ s přímkou $N2$ jest na př. bod kružnice, ježto tyto dvě přímky na sobě kolmo stojí. ($\triangle DN2 \cong \triangle OM2^1$, $\sphericalangle DN2 = OM2^1$, t. j. přímka NII od ND tak odchýlena, jako MII od MO.) Právě tak má se věc s ostatními body, jakož i s body na druhé polovici kruhu.

Promítneme-li tento obrazec, jejž si myslíme v rovině ϱ k průmětně π jakkoli položené, objeví se průměty průměrů MN, PQ jako dvojice sdružených průměrů ellipsy; čtverec $ABCD$ dá za průmět rovnoběžník, jehož strany jsou rovnoběžny s průměry M_1N_1, P_1Q_1 a průměty dělících bodů 1, 2, 3, . . . na přímkách CD, AB a PQ dělí průměty jejich zase na částky stejné.

Odtud vážíme pravidlo, *jak sestrojiti ellipsu, jsou-li dány dva sdružené průměry její:*

Vykreslíme rovnoběžník, jehož strany procházejí konci daných sdružených průměrů a jsou s nimi střídavě rovnoběžny. Ty jsou tečny ellipsy. Rozdělíme dvě protilehlé strany A_1B_1, C_1D_1 na sudý počet stejných dílů a spojnici jejich středů P_1Q_1 na právě tolik vespolek stejných dílů, a spojíme dělící body jako v obrazci předešlém; průsečíky povstalých spojnic jsou body ellipsy.

Samo se rozumí, že této konstrukce užíti lze i tehdy, jsou-li dány osy ellipsy.

17. *Strojení os ellipsy z průměrů sdružených.* — Vraťme se zase k obrazci 1. Jsou-li OP a OQ dva na sobě kolmé poloměry kruhu, jsou jejich obrazy OP_1, OQ_1 sdružené poloměry ellipsy. Spojíme-li O_1P_0, máme

$$\frac{p_0P_0}{p_0P} = \frac{OP'}{OP} = \frac{b}{a}, \quad \frac{qQ_1}{qQ} = \frac{b}{a},$$

a ježto
$$qQ = p_0P,$$
jest
$$p_0P_0 = qQ_1.$$

Mimo to jest $Oq = Op_0$, a tedy $\triangle Op_0P_0 \cong OqQ_1$, a z toho vyplývá, že OP_0 *rovná se* OQ_1 a *že stojí na něm kolmo.*

Jsou-li tedy dány sdružené poloměry OQ_1 *a* OP_1 (*co do délky i co do polohy*) *a máme určiti osy ellipsy,* sestrojme $OP_0 \perp OQ_1$, učiňme $OP_0 = OQ_1$, spojme P_1, P_0 a rozpolme P_1P_0 bodem T; učiníme-li $TU = TV = TO$, značí spojnice

OU, OV směry os ellipsy, a jako z předešlého vysvítá, $UP_1 = b$, $P_1 V = a$ délky poloos, jež jen na směry OU, OV přenésti třeba.

18. Uvedeme nyní několik vět, z nichž věty na pravo vyplývají přímo z vět na levo stojících, promítneme-li obrazec oné větě příslušný.

a) Obvodový úhel nad průměrem kruhu jest pravý.	Spojíme-li kterýkoli bod ellipsy s konci některého průměru ellipsy, jsou vzniklé tětivy rovnoběžny s dvěma sdruženými průměry.
b) Rovnoběžník kruhu vepsaný jest obdélník; (jeho strany jsou rovnoběžny s dvěma sdruženými průměry.)	Rovnoběžník ellipse vepsaný má strany rovnoběžné s dvěma sdruženými průměry.
c) Každý rovnoběžník kruhu opsaný jest rovnostranný; úhlopříčky jeho stojí na sobě kolmo.	Úhlopříčky každého rovnoběžníka ellipse opsaného jsou sdružené průměry.
d) Všecky čtverce kruhu vepsané mají touž plochu.	Rovnoběžníky ellipse vepsané, jejichž úhlopříčky jsou sdružené průměry, mají touž plochu.
e) Všecky čtverce kruhu opsané mají touž plochu.	Rovnoběžníky ellipse opsané, jejichž dvě a dvě protější strany jsou rovnoběžny s dvěma sdruženými průměry, jsou rovnoploché.

Jsou-li a_1, b_1 dva sdružené poloměry, φ úhel jimi sevřený, a, b poloosy ellipsy, jest dle toho

$$a_1 b_1 \cos \varphi = ab.$$

Plocha ellipsy rovná se ploše kruhu o poloměru a, násobené cosinem úhlu α, o nějž se rovina kruhu od roviny ellipsy odchyluje; jest pak $\cos \alpha = \frac{b}{a}$, tedy plocha ellipsy

$$E = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab,$$

t. j. plocha ellipsy rovná se obdélníku z poloos násobenému číslem $\pi = 3{\cdot}1415\ldots$

19. Známou lineární konstrukci poláry kruhu daného bodu za pomoci úplného čtyrhranu, a tím též sestrojení tečen bodem vně kružnice, lze přímo přenésti na ellipsu, ježto zde všecky vlastnosti jsou projektivné.

Neméně platí jak o kruhu tak i o ellipse věty:

a) Jde-li polára bodu P bodem Q, jde polára bodu Q bodem P.

b) Spojnice dvou bodů jest polárou průsečíka jejich polár, a naopak průsečík dvou přímek jest pólem spojnice jejich pólů.

c) Jsou-li tři body v jediné přímce, protínají se jejich poláry v jediném bodě a naopak: Protínají-li se tři přímky v jediném bodě, jsou jejich póly v jediné přímce.

d) Probíhá-li bod přímkou, točí se jeho polára kolem bodu — pólu oné přímky, a naopak: Otáčí-li se přímka kolem bodu, probíhá její pól přímkou — polárou onoho bodu.

20. *Věta Pascalova. Průsečíky protějších stran*) šestiúhelníka vepsaného kruhu jsou v jediné přímce.*

Důkaz. Prodlužme tři k sobě nepřilehlé strany AB, CD, EF šestiúhelníka $ABCDEF$ kruhu vepsaného, až se protnou v bodech M, N, O a mějme ostatní tři strany BC, DE, FA za příčky trojúhelníka MNO, pak jest dle věty Menelaovy

$$\text{pro příčku } FA \quad \frac{MA}{NA}\cdot\frac{NS}{OS}\cdot\frac{OF}{MF}=1$$

$$\text{„ \quad „ } BC \quad \frac{MB}{NB}\cdot\frac{NC}{OC}\cdot\frac{OR}{MR}=1$$

$$\text{„ \quad „ } DE \quad \frac{MP}{NP}\cdot\frac{ND}{OD}\cdot\frac{OE}{ME}=1$$

Znásobíme-li tyto rovnice vespolek, vypustíce v čitateli a jmenovateli rovné součiny

$$\text{(mocn. bodu } M) \quad MA\,.\,MB = MF\,.\,ME,$$

$$(\text{ „ \quad „ } N) \quad ND\,.\,NC = NB\,.\,NA,$$

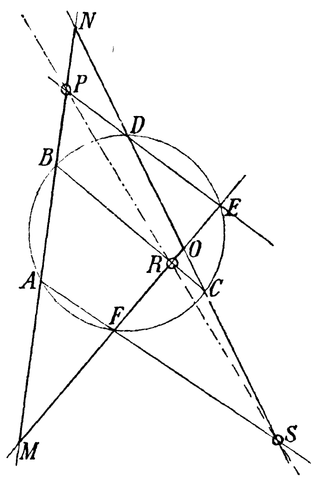
$$(\text{ „ \quad „ } O) \quad OE\,.\,OF = OC\,.\,OD,$$

*) Vytkneme-li na obvodu kruhu nebo ellipsy šest libovolných bodů a označíme je v jakémkoli pořádku písmeny A, B, C, D, E, F, slovou body A a D, B a E, C a F protějšími; právě tak nazýváme spojnice AB a DE, BC a EF, CD a FA, jež vždy ob dvě za sebou jdou, protějšími stranami šestiúhelníka $ABCDEF$.

nabudeme

$$\frac{MP}{NP} \cdot \frac{NS}{OS} \cdot \frac{OR}{MR} = 1,$$

z čehož jde, že body P, S, R jsou v jediné přímce.



Obr. 4.

Promítneme-li tento obrazec na libovolnou rovinu, nabudeme věty:

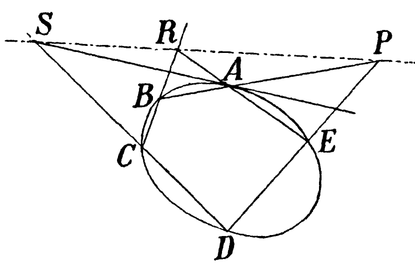
Průsečíky protějších stran jakéhokoli šestiúhelníka vepsaného ellipse jsou v jediné přímce.

Té věty lze užíti k sestrojení libovolného počtu bodů ellipsy, jejíž pět bodů jest známo. — Spojíce totiž daných pět bodů v libovolném pořádku, veďme prvým (A) přímku AS jakýmkoli směrem a stanovme průsečíky S (AS, CD), P (AB, DE), čímž určena jest „přímka Pascalova“ PS; průsečík její R s přímkou BC spojme s posledním z pěti daných bodů F, čímž nabudeme šesté strany šestiúhelníka ellipse vepsaného a zároveň šestého vrcholu jeho F. — Měníce směr paprsku AS, nabudeme po řadě jiných a jiných bodů ellipsy.

21. Splynou-li dva sousední vrcholy Pascalova šestiúhelníka v jediný, přejde jejich spojnice v tečnu v tomto bodě; šestiúhelník pak v pětiúhelník, i nabudeme věty:

Vedeme-li v některém vrcholu ellipse vepsaného pětiúhelníka tečnu, jest její průsečík s protější stranou na spojnici průsečíků dvou a dvou z ostatních stran k sobě nepřilehlých.

Podle této věty lze sestrojiti tečnu v kterémkoli z pěti bodů, jimiž ellipsa jest určena. Je-li na př. určiti tečnu v bodě A, stanovme průsečíky $P(AB, DE)$, $R(BC, EA)$; spojnice jejich PR jest Pascalova přímka; spojíce průsečík její S a strany CD s bodem A ($\equiv F$) nabudeme žádané tečny.



Obr. 5.

Splynou-li dva a dva sousední vrcholy Pascalova šestiúhelníka, nabudeme čtyrúhelníka vepsaného ellipse, v jehož dvou vrcholech (a to kterýchkoli) sestrojené tečny ellipsy zastupují ostatní dvě strany jeho. Sjednotí-li se tři dvojiny vrcholů Pascalova šestiúhelníka, vznikne trojúhelník ellipse vepsaný, v jehož vrcholech sestrojeny jsou tečny této křivky, tvořící trojúhelník ellipse opsaný.

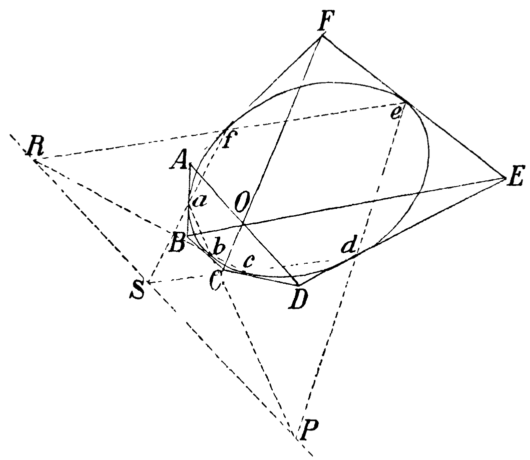
Jak lze příslušných vět užíti, jest samo patrno. Jest hodno povšimnouti si, že tyto konstrukce vyplývající z věty Pascalovy vykonati lze pouze pravítkem.

22. *Věta Brianchonova. Úhlopříčky spojující protilehlé vrcholy šestiúhelníka ellipse opsaného protínají se v jediném bodě.*

$ABCDEF$ budiž šestiúhelník, jehož strany dotýkají se ellipsy v bodech a, b, c. d, e, f; spojíce tyto body nabudeme šestiúhelníka ellipse vepsaného, jehož strany

ab a *de*	protínejtež	se	v bodě	*P*,
bc a *ef*	„	„	„	*R*,
cd a *fa*	„	„	„	*S*.

Bod *P* jest pólem úhlopříčky *BE*, ježto jest průsečíkem polár *ab*, *de* její bodů *B*, *E*; právě tak jsou body *R*, *S* póly úhlopříček *CF*, *DA*. — Ale dle věty Pascalovy jsou průsečíky *P*, *R*, *S* protějších stran šestiúhelníka ellipse vepsaného v přímce jejich poláry sekou se tedy v jediném bodě *O*.



Obr. 6.

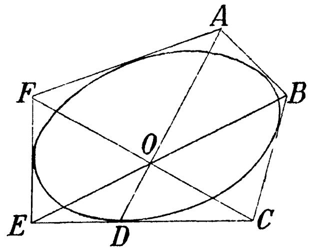
Samo jest patrno, jak té věty lze užíti k sestrojení libovolného počtu tečen ellipsy, určené pěti tečnami.

23. Splynou-li dvě strany šestiúhelníka ellipse opsaného, na př. *CD*, *DE* v jedinou, přejde průsečík *D* v dotyčný bod tečny *CE* a úhlopříčka *AD* přejde ve spojnici vrcholu pětiúhelníka s dotyčným bodem protější strany. Věta Brianchonova zní pak:

V každém ellipse opsaném pětiúhelníku prochází spojnice vrcholu s dotyčným bodem protilehlé strany průsečíkem O úhlopříček jdoucích ostatními vrcholy.

Jest patrno, jak dle této věty určovati lze dotyčné body stran pětiúhelníka, jemuž ellipsa jest vepsána.

Splynou-li další dvě strany neb i třikrát dvě strany Brianchonova šestiúhelníka, nabudeme vět, jež dle předcházejícího snadno lze odvoditi.



Obr. 7.

Pozn. Uvedené zde vlastnosti ellipsy platí větším dílem i o hyperbole a parabole; ale přestáváme zde na ellipse, nejdůležitější z těchto křivek, ježto ostatní zmíněné křivky za orthogonálný průmět kruhu bráti nelze.

Kterak se odchyluje volně padající těleso od směru vertikálního.

Referuje Dr. **Václ. Posejpal** na Král. Vinohradech.

Když r. 1679 Robert Hooke psal Isáku Newtonovi, nabízeje mu filosofickou korrespondenci, odpověděl tento, že již dávno dal s bohem filosofii, dlouho nemoh oželeti drahého času, jí věnovaného, a že jest teď právě zaměstnán docela jinými věcmi a vybízí ho současně ke konání pokusů s volně padajícími tělesy za účelem dokázati existenci rotace zemské. Při tom ihned vykládá, jak jest to možné. Každé těleso, jež trvá v klidu v nějaké výši nad povrchem zemským, byvši puštěno bez počáteční rychlosti nebude padati podél vertikály, nýbrž po dráze křivé (Newton myslí, že to bude spirála) a předbíhajíc ve svém