

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Gustav Gruss

Poznámka k jedné větě z mechaniky nebes

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 4, 244--245

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123435>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1896

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Poznámka k jedné větě z mechaniky nebes.

Podává G. Gruss.

Pro přímočarý pohyb platí diferenciální rovnice pohybu

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^2},$$

když $\mu = k^2(m_1 + m_2)$, v kterémžto výrazu k značí Gaussovu konstantu atrakční, m_1 a m_2 hmoty dvou těles vzájemně se přitahujících. Integrováním rovnice (1) obdržíme

$$(2) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\mu}{x} - \frac{\mu}{2a},$$

znamená-li $-\frac{\mu}{2a}$ konstantu integrační, aneb

$$(3) \quad dt = -\frac{dx}{\sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}}},$$

kdež znamení $-$ vzniklo předpokladem, že se planeta blíží ke slunci; m_1 jest hmotou slunce.

Je-li t_1 doba, v které planeta dosáhne místa x_1 , bude

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}}}$$

aneb pro pozitivní a

$$(4) \quad t_1 - t_0 = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \left[\text{arc tg} \sqrt{\frac{x}{2a-x}} - \sqrt{\frac{x(2a-x)}{2a}} \right].$$

Položíme-li $x_0 = 2a$, $x_1 = 0$, dáme-li tedy tělesu padati ke slunci se začáteční rychlostí $\frac{dx_0}{dt} = 0$ ze vzdálenosti $2a$, obdržíme příslušnou dobu

$$(5) \quad t_1 - t_0 = \tau = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Je-li doba oběhu planety, jejíž vzdálenost od slunce jest a , kolem slunce T , pak platí dle třetího zákona Keplerova:

$$(6) \quad T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

kterážto hodnota porovnaná s hodnotou τ (5) dává:

$$\tau = \frac{T}{2}.$$

Rovná se tedy doba, v níž planeta ze vzdálenosti $2a$ při začáteční rychlosti 0 dopadne na slunce, poloviční době oběhu planety pohybující se ve vzdálenosti a od slunce.

Položíme-li v rovnici (5) $2a = a'$, obdržíme

$$(7) \quad \tau' = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} : 2^{\frac{5}{2}} = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} : \sqrt{32};$$

pro dobu oběhu T' planety vzdálenosti a' od slunce pak jest

$$(8) \quad T' = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

a tudíž

$$\tau' = T' : \sqrt{32} = T' : 5.657.$$

Tato relace byla dle *Rudolfa Wolfa* (Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur p. 333) nejprve odvozena r. 1868 *Adolfem de Saussurem*, později znovu dokázána *Henrim Rapinem* způsobem jiným, složitým. Účelem těchto řádků bylo poukázati k tomu, že uvedená relace jest jen *zvláštním* případem *všeobecné*, výše uvedené, již dávno známé věty, a že není tedy podivuhodnou, jak se tvrdí.

Pro Zemi jest $T' = 365^{\text{d}}.26$; Země by tudíž se sřítla na Slunce v 64.6 dnech, kdyby náhle zanikla její síla tangenciální.