Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Gustav Gruss

Poznámka k jedné větě z mechaniky nebes

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 4, 244--245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123435

Poznámka k jedné větě z mechaniky nebes.

Podává G. Gruss.

Pro přímočarý pohyb platí differenciální rovnice pohybu

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^2},$$

když $\mu = k^2(m_1 + m_2)$, v kterémžto výrazu k značí Gaussovu konstantu attrakční, m_1 a m_2 hmoty dvou těles vzájemně se přitahujících. Integrováním rovnice (1) obdržíme

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{x} - \frac{\mu}{2a},$$

znamená-li $-\frac{\mu}{2a}$ konstantu integrační, aneb

$$\text{(3)} \qquad dt = -\frac{dx}{\sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}}},$$

kdež znamení — vzniklo předpokladem, že se planeta blíží ke slunci; m_1 jest hmotou slunce.

Je-li t_1 doba, v které planeta dosáhne místa x_1, bude

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}}}$$

aneb pro positivní a

$$\text{(4)} \quad t_1 - t_0 = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{2a - x}} - \frac{\sqrt{x(2a - x)}}{2a}\right].$$

Položíme-li $x_0 = 2a$, $x_1 = 0$, dáme-li tedy tělesu padati ke slunci se začáteční rychlostí $\frac{dx_0}{dt} = 0$ ze vzdálenosti $2a$, obdržíme příslušnou dobu

$$\text{(5)} \qquad t_1 - t_0 = \tau = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Je-li doba oběhu planety, jejíž vzdálenost od slunce jest a, kolem slunce T, pak platí dle třetího zákona Keplerova:

$$(6) \qquad T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

kterážto hodnota porovnaná s hodnotou τ (5) dává:

$$\tau = \frac{T}{2}.$$

Rovná se tedy doba, v níž planeta ze vzdálendoti 2a při začáteční rychlosti 0 dopadne na slunce, poloviční době oběhu planety pohybující se ve vzdálenosti a od slunce.

Položíme-li v rovnici (5) $2a = a'$, obdržíme

$$(7) \qquad \tau' = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{2 \,.\, 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} : 2^{\frac{5}{2}} = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} : \sqrt{32}\,;$$

pro dobu oběhu T′ planety vzdálenosti a' od slunce pak jest

$$(8) \qquad T' = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

a tudíž

$$\tau' = T' : \sqrt{32} = T' : 5{\cdot}657.$$

Tato relace byla dle *Rudolfa Wolfa* (Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur p. 333) nejprve odvozena r. 1868 *Adolfem de Saussurem*, později znovu dokázána *Henrim Rapinem* způsobem jiným, složitým. Účelem těchto řádků bylo poukázati k tomu, že uvedená relace jest jen *zvláštním* případem *všeobecné*, výše uvedené, *již dávno známé* věty, a že není tedy podivuhodnou, jak se tvrdí.

Pro Zemi jest $T' = 365^{d}{\cdot}26$; Země by tudíž se sřítila na Slunce v 64·6 dnech, kdyby náhle zanikla její síla tangentiální.