Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 4, 294--320

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123429

Úlohy.

Úloha 6.

Určiti hodnotu součinu $\Pi\,.\,\Pi'$, znamená-li

$$\Pi = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots$$
$$\Pi' = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots$$

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Voženílek,* stud. VII. tř. r. na Malé straně v Praze).

Položme

$$\mathrm{P} = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ldots;$$

potom lze P rozložiti v součin

$$\mathrm{P} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$$
$$\ldots(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots$$

čili
$$\mathrm{P} = \Pi\,.\,\Pi'\,.\,\mathrm{P};$$
proto
$$\Pi\,.\,\Pi' = 1.$$

Jiné řešení.

Položme

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\ldots = p$$
$$(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ldots = q$$
$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)\ldots = m.$$

Jelikož

$$\Pi p = (1-x^2)(1-x^6)(1-x^{10})(1-x^{14})\ldots$$
$$qm = (1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{16})\ldots,$$

jest

$$\Pi pqm = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ldots$$

čili

$$\Pi pqm = q, \quad \Pi pm = 1.$$

Avšak

$$pm = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots = \Pi'$$

a proto též

$$\Pi\,.\,\Pi' = 1.$$

Úloha 7.

Řešiti jest rovnici

$$\sin 8x \cos 8x \cos 16x \cos 32x \cos 64x \cos 128x \cos 256x = -\frac{1}{64}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Štěpánek,* stud. VII. tř. r. v Písku.)

Násobíme-li rovnici činitelem 2^6 a užijeme-li postupně vzorce

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

obdrží daná rovnice tvar

$$\sin 512\,x = -1.$$

Jest tedy

$$512x = 3R \pm n\,.\,4R$$

čili

$$x = \frac{135^0 \pm n\,.\,180^0}{256}.$$

Nejmenší kladná hodnota rovnici vyhovující jest

$$x = \frac{135^0}{256} = 31'\,38''\,26'''.$$

Úloha 8.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$m \sin^4 x - n \sin^4 y = m$$
$$m \cos^4 x - n \cos^4 y = n.$$

Řešení. (Zaslal p. *Bohuslav Masák,* stud. VII. tř. r. v Ječné ul. v Praze.)

Odečteme-li druhou rovnici od první a uvážíme-li, že

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha,$$

obdržíme

$$m \cos 2x - n \cos 2y = n - m$$

čili

$$m(1 + \cos 2x) = n(1 + \cos 2y).$$

Odtud plyne

$$m \cos^2 x = n \cos^2 y$$

a dosadíme-li hodnotu

$$\cos^2 y = \frac{m}{n} \cos^2 x$$

do rovnice druhé, dojdeme k rovnici

$$\left(m - \frac{m^2}{n}\right) \cos^4 x = n,$$

ze které ustanovíme

$$\cos x = \sqrt[4]{\frac{n^2}{m(n-m)}};$$

k tómu nalezneme

$$\cos y = \sqrt[4]{\frac{m}{n-m}}.$$

Úloha 9.

Dána jest kružnice K a přímky A, B. Do kružnice K vepsán trojúhelník abc tak, že $bc \parallel A$, $ac \parallel B$. Jakou křivku obaluje třetí strana proměnného trojúhelníka abc? Které jest geometrické místo středů kružnic vepsaných do těchto trojúhelníků?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Frieb,* stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Poněvadž $\sphericalangle\, acb = \sphericalangle\, AB$, má velikost stálou γ, náleží k němu tětiva $\overline{ab}$ stálé délky; proto jest obalovou křivkou této tětivy kružnice soustředná s danou. Budiž m bod půlící oblouk $\widehat{bc}$, který neobsahuje vrchol a; podobně n bod půlící oblouk $\widehat{ac}$, který neobsahuje vrchol b. Spojnice $\overline{am}$, $\overline{bn}$ půlí vnitřní úhly trojúhelníka abc a jich průsečík o jest středem kružnice vepsané v tento trojúhelník. Jelikož body m, n jsou stálé a rovněž stálým úhel

$$\sphericalangle\, mon = \mathrm{R} + \frac{\gamma}{2},$$

jest geometrické místo bodu o kruhový oblouk $\widehat{mn}$, jehož poloměr rovná se poloměru kružnice dané.

Úloha 10.

Sestrojiti harmonický čtyřúhelník, dány-li délky tří jeho stran. (Harmonickým slove čtyřúhelník do kružnice vepsaný, jehož strany a, b, c, d vyhovují podmínce $ac = bd$).

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Vodseďálek,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Ze tří daných stran a, b, c jde hodnota čtvrté $d = \frac{ac}{b}$.

Je-li m úhlopříčka jdoucí vrcholy (a, d), (b, c), jest — jak známo — délka její ve čtyrúhelníku z tětiv vůbec

$$m = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

V předpokládaném případě zvláštním dosaďme za d hodnotu a obdržíme pro m výraz

$$m = \sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)c^2}{b^2 + c^2}},$$

který snadně lze sestrojiti. Zbývá pak vykonati sestrojení čtyrúhelníka žádaného ze stran a, b, c, d a úhlopříčky m.

Úloha 11.

Buďtež m, n kořeny rovnice $x^2 - px + q = 0$, kdež $q < 1$, a strany trojúhelníka

$$a = (1 + m^2)n, \qquad b = (1 + n^2)m, \qquad c = (m + n)(1 - mn).$$

Veličinami p, q jest vyjádřiti: a) obsah trojúhelníka, b) jeho výšky, c) poloměr kružnice opsané, d) poloměr kružnice vepsané.

Řešení. (Zaslal p. *Richard Holl,* stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.)

a) Veličiny m, n vyhovují podmínkám

$$m + n = p, \quad mn = q.$$

Dále jest

$$s = \frac{a + b + c}{2} = m + n = p,$$

$$s - a = m(1 - q), \quad s - b = n(1 - q), \quad s - c = pq,$$

pročež obsah trojúhelníka dle vzorce Heronova

$$\varDelta = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

bude vyjádřen takto

$$\Delta = pq\,(1-q).$$

b) Odtud obdržíme výšky trojúhelníka; jestiť

$$m = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad n = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

tedy

$$v_a = \frac{2\Delta}{a} = \frac{2pq\,(1-q)}{n\,(1+m^2} = \frac{4pq\,(1-q)}{p\,(1+q) - (1-q)\sqrt{p^2-4q}},$$

$$v_b = \frac{2\Delta}{b} = \frac{2pq\,(1\;\;q)}{m\,(1+n^2)} = \frac{4pq\,(1-q)}{p\,(1+q) + (1-q)\sqrt{p^2-4q}},$$

$$v_c = \frac{2\Delta}{c} = \frac{2pq\,(1-q)}{(m+n)\,(1-mn)} = 2q\,.$$

c) Poloměr kružnice opsané stanoven jest vzorcem

$$r = \frac{abc}{4\Delta},$$

tudíž

$$r = \frac{mn\,(1+m^2)\,(1+n^2)\,(m+n)\,(1-mn)}{4pq\,(1-q)}$$

a po dosazení příslušných hodnot

$$r = \tfrac{1}{4}\,[p^2 + (1-q)^2].$$

d) Poloměr kružnice vepsané

$$\varrho = \frac{2\Delta}{s} = 2q\,(1-q)\,.$$

Úloha 12.

Při kterých podmínkách mezi p a q jest úhel proti straně c v trojúhelníku úlohy předešlé a) 90°, b) 45°, c) 60°, d) 120°?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Grohman* v Ivanovicích na Moravě.)

Užijeme-li známých vzorců pro tangenty polovičních úhlů trojúhelníka a dosadíme-li do nich hodnoty z úlohy předešlé, obdržíme

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=n,\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=m,\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1-q}{p}.$$

Z rovnice poslední obdržíme přímo žádané podmínky nutné i dostatečné:

a) pro $\gamma = 90^0$ jest $p + q = 1$;
b) „ $\gamma = 45^0$ „ $p : (1-q) = \sqrt{2}+1$,
„ $\gamma = 135^0$ „ $p : (1-q) = \sqrt{2}-1$;
c) „ $\gamma = 60^0$ „ $p : (1-q) = \sqrt{3}$,
„ $\gamma = 120^0$ „ $p : (1-q) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Úloha 13.

Ustanoviti součet dutých úhlů, jichž tangenty jsou kořeny rovnice

$$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Řešení. (Zaslal p. *Otto Ottis*, stud. VI. tř. g. v Plzni.)

Buďtež α, β, γ úhly duté, jichž tangenty jsou kořeny dané rovnice. Potom jest

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha)}.$$

Dle známých vlastností kořenů rovnice algebraické jest

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \frac{11}{6},$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = 1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{6},$$

tudíž

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \infty,\quad \alpha+\beta+\gamma = 90^0.$$

Poznámka: 1. V daném případě lze učiniti jednoduchou zkoušku o správnosti výsledku. Rovnice daná má totiž kořeny

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$$

a proto $\alpha = 45^0$, $\beta = 26^0\ 33'\ 54''$, $\gamma = 18^0\ 26'\ 6''$,

$$\alpha+\beta+\gamma = 90^0.$$

2. Jsou-li obecně tangenty dutých úhlů $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ kořeny rovnice

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

jest

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) = -\frac{a_1 - a_3 + a_5 - \ldots}{1 - a_2 + a_4 - \ldots}.$$

Úloha 14.

V pravoúhlém trojúhelníku abc vedena výška cn a těžnice cm. Řešiti jest trojúhelník, dáno-li $\overline{mn} = 24$, $\operatorname{tg} \widehat{mcn} = \frac{1}{7}$.

Řešení. (Zaslal p. *Vladimír Ibl,* stud. VII. tř. r. v Ječné ul. v Praze.)

Jsou-li a, b odvěsny, c přepona trojúhelníka, α úhel proti a položený, jest

$$\overline{cm} = \frac{c}{2}, \quad \widehat{mcn} = R - 2\alpha.$$

Řešíme-li tedy trojúhelník pravoúhlý *mcn*, nalezneme prvky c, α potřebné k řešení trojúhelníka *abc*.

Najdeme takto nejprve

$$\overline{cn} = 7 \, . \, \overline{mn} = 168, \quad \overline{cm} = \sqrt{\overline{mn}^2 + \overline{cn}^2} = 120\sqrt{2},$$

tedy

$$c = 240\sqrt{2} = 339{\cdot}42 \ldots$$

Mimo to jest

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 7, \quad \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10},$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10 - \sqrt{2}}{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10 + \sqrt{2}}{5}},$$

tudíž

$$a = c \sin \alpha = 24\sqrt{10(10 - \sqrt{2})} = 222{\cdot}38 \ldots$$

$$b = c \cos \alpha = 24\sqrt{10(10 + \sqrt{2})} = 256{\cdot}41 \ldots$$

Úloha 15.

Přepona $\overline{ab}$ pravoúhlého trojúhelníka abc rozpůlena v bodě d. Řešiti trojúhelník, dán-li poloměr $r_1 = 37\cdot5$ kružnice opsané o $\triangle$ acd a poloměr $r_2 = 50$ kružnice opsané o $\triangle$ bcd.

Řešení. (Zaslal p. *Vilibald Mildschuh*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.)

Při obvyklém označení stran a úhlů pravoúhlého trojúhelníka abc jest

$$r_1 = \frac{b}{2 \sin 2\alpha}, \quad r_2 = \frac{a}{2 \sin 2\alpha}.$$

Odtud plyne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{r_1}{r_2},$$

$$\sin \alpha = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}};$$

pročež

$$a = 2r_2 \sin 2\alpha = \frac{4r_1^2 r_2}{r_1^2 + r_2^2},$$

$$b = 2r_1 \sin 2\alpha = \frac{4r_1 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}.$$

Při daných hodnotách r_1, r_2 vypočítáme

$$a = 72, \quad b = 96, \quad c = 120.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Josef Půček*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Budiž o_1 střed kružnice opsané o $\triangle acd$, o_2 střed kružnice opsané o $\triangle bcd$. Potom jest $\triangle o_1 o_2 c \sim \triangle abc$, z čehož

$$a : b = r_1 : r_2 = 3 : 4.$$

Dále jest

$$\overline{o_1 o_2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 62\cdot5,$$

$$\frac{1}{2} \overline{cd} \,.\, \overline{o_1 o_2} = \overline{o_1 d} \,.\, \overline{o_2 d} = r_1 r_2,$$

$$cd = \frac{2 r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = 60.$$

Poněvadž pak $\overline{ab} = 2 \,.\, \overline{cd}$, vypočítáme $c = 120$ a užitím hořejší úměry nalezneme $a = 72$, $b = 96$.

Úloha 16.

Na jednom rameni úhlu 15° přenesena od vrcholu a úsečka $\overline{ab} = m$; pak vedeny od jednoho ramene ke druhému úsečky $bc = cd \ldots = m$. Ustanoviti jest obsah trojúhelníků abc, bcd,... jakož i jich součet.

Řešení. (Zaslal p. *Ignác Deyl,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Sestrojíme-li od jednoho ramene daného úhlu ke druhému úsečky

$$ab = bc = cd = de = ef = fg = m,$$

bude

$$\sphericalangle abc = 150^0, \quad \sphericalangle bcd = 120^0, \quad \sphericalangle cde = 90^0,$$

$$\sphericalangle def = 60^0, \quad \sphericalangle efg = 30^0;$$

z velikosti těchto úhlů patrno, že počet úseček m jest omezen a rovná se $\frac{90}{15} = 6$. Vznikne pak 5 rovnoramenných trojúhelníků, jichž obsahy jsou

$$\triangle abc = \varDelta_1 = \frac{1}{2} m^2 \sin 150^0 = \frac{1}{4} m^2$$

$$\triangle bcd = \varDelta_2 = \frac{1}{2} m^2 \sin 120^0 = \frac{1}{4} m^2 \sqrt{3}$$

$$\triangle cde = \varDelta_3 = \frac{1}{2} m^2 \sin 90^0 = \frac{1}{2} m^2$$

$$\triangle def = \varDelta_4 = \frac{1}{2} m^2 \sin 60^0 = \frac{1}{4} m^2 \sqrt{3}$$

$$\triangle efg = \varDelta_5 = \frac{1}{2} m^2 \sin 30^0 = \frac{1}{4} m^2.$$

Součet těchto pěti trojúhelníků jest

$$S = \frac{1}{2} m^2 (2 + \sqrt{3}).$$

Úloha 17.

Značí-li a stranu pravidelného n-úhelníka, r poloměr kružnice opsané, jest dokázati relaci

$$(a + r) : (a - r) = \operatorname{tg}\left(\frac{R}{n} + \frac{R}{6}\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{R}{n} - \frac{R}{6}\right).$$

Řešení. (Zaslal p. *Petr Pecl,* stud. VII. tř. g. v Klatovech).

V pravidelném n- úhelníku jest

$$a = 2r \sin \alpha,$$

značí-li

$$\alpha = \frac{2R}{n}.$$

Proto jest

$$a + r = r\,(2 \sin \alpha + 1) = 2r\,(\sin \alpha + \sin 30^0)$$
$$a - r = r\,(2 \sin \alpha - 1) = 2r\,(\sin \alpha - \sin 30^0).$$

Odtud dle známých vzorců goniometrických obdržíme

$$a + r = 4r \sin\left(\frac{R}{n} + \frac{R}{6}\right) \cos\left(\frac{R}{n} - \frac{R}{6}\right)$$
$$a - r = 4r \cos\left(\frac{R}{n} + \frac{R}{6}\right) \sin\left(\frac{R}{n} - \frac{R}{6}\right),$$

tudíž, jak svrchu tvrzeno,

$$a + r) : (a - r) = \operatorname{tg}\left(\frac{R}{n} + \frac{R}{6}\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{R}{n} - \frac{R}{6}\right).$$

Úloha 18.

Na průměru $\overline{ab}$ sestrojena polokružnice a poloměr $\overline{om}$ prodloužen do n o délku svoji (om = mn ; spojnice $\overline{bn}$ protíná kružnici v bodě p. Dán-li $\sphericalangle\, aom = \alpha$, jest ustanoviti $\sphericalangle\, onb$ a $\sphericalangle\, mop$.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Frieb,* stud. VIII. tř. g. v Brně). Označíme-li

$$\sphericalangle\, abn = x, \quad \sphericalangle\, onb = y, \quad \sphericalangle\, mop = z,$$

nalezneme nejprve, vedouce $nn_1 \perp ab$,

$$\operatorname{tg} x = nn_1 : bn_1 = \frac{2 \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}.$$

Potom jest

$$y = \alpha - x,$$

tudíž

$$\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} x} = \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}.$$

Konečně jest

$$2x = \alpha + z,$$

pročež

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} (2x - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ustanovíme-li

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4 \sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{8 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha - 3}$$

a vložíme-li tuto hodnotu do rovnice poslední, obdržíme po snadné úpravě

$$\operatorname{tg} z = \frac{3 \sin \alpha}{4 + 5 \cos \alpha}.$$

Snadně lze též vyvoditi relaci

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{\sin \alpha}{2 + 3 \cos \alpha}.$$

Poznámka redakce. Je-li oblouk $\widehat{mp}$ dosti malý, jest přibližně $y = z$, tudíž v případě tom

$$x \doteq \frac{2\alpha}{3}, \qquad y = z \doteq \frac{\alpha}{3}.$$

Platí tedy pro malé úhly α přibližné vzorce

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} \doteq \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha} \doteq \frac{3 \sin \alpha}{4 + 5 \cos \alpha}.$$

Ještě i při $\alpha = 30^0$ obdržíme tg 10^0 správně na setiny. Budeť dle prvního vzorce

$$\operatorname{tg} 10^0 = 0{\cdot}17446,$$

dle druhého

$$\operatorname{tg} 10^0 = 0{\cdot}18007;$$

ježto pak správná hodnota

$$\operatorname{tg} 10^0 = 0{\cdot}17633,$$

činí chyba v prvním případě $-0{\cdot}002$ a ve druhém $0{\cdot}004$.

Úloha 19.

Řešiti trojúhelník, dány-li poloměry kružnic vně vepsaných

$$\varrho_1 = 21, \quad \varrho_2 = 24, \quad \varrho_3 = 28.$$

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Voženílek,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Budiž dle obvyklého označení $2s$ obvod, $\varDelta$ obsah trojúhelníka, jehož strany jsou a, b, c. Potom jest

$$(s-a)\varrho_1 = (s-b)\varrho_2 = (s-c)\varrho_3 = \varDelta\,^{*});$$

hledíme-li ku vzorci Heronovu

$$\varDelta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(-s)},$$

a značí-li $\varrho = \frac{\varDelta}{s}$ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku, obdržíme

$$\varDelta = \sqrt{\varrho\,\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3}.$$

Mimo to jest

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}.$$

Z daných hodnot ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 vypočítáme tedy nejprve ϱ a $\varDelta$, načež

$$b + c - a = \frac{2\varDelta}{\varrho_1}$$

$$c + a - b = \frac{2\varDelta}{\varrho_2}$$

$$a + b - c = \frac{2\varDelta}{\varrho_3}.$$

*) Viz: *Strnad,* Geometrie pro vyšší realné školy, str. 159.

Odtud ustanovíme

$$a = \Delta\left(\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}\right) = \frac{\varrho_1(\varrho_2 + \varrho_3)}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2 + \varrho_2\varrho_3 + \varrho_3\varrho_1}}$$

a obdobně b i c. Při zvláštních daných hodnotách číselných přijdeme k výsledkům

$$\varrho = 8, \qquad \Delta = 336,$$
$$a = 26, \qquad b = 28, \qquad c = 30.$$

Úloha 20.

Je-li v trojúhelníku $a < b$ a svírá-li těžnice t_c s půdicí c ostrý úhel δ, jest dokázati, že

$$\cotg\delta = \frac{1}{2}(\cotg\alpha - \cotg\beta).$$

Řešení. (Zaslal p. *Otakar Neudörfel,* stud. $\mathrm{VII}_{\mathrm{I}}$. tř. g. v Pelhřimově).

Vedeme-li v trojúhelníku abc těžnici cd a výšku $v = cf$, jest při $a < b$

$$\overline{df} = \frac{c}{2} - a\cos\beta = \frac{c}{2} - \frac{a^2 + c^3 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - a^2}{2c},$$

tudíž

$$\cotg\delta = \frac{b^2 - a^2}{2cv}.$$

Mimo to jest

$$\cotg\alpha = \frac{b\cos\alpha}{v} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2cv}$$

$$\cotg\beta = \frac{a\cos\beta}{v} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2cv},$$

tedy

$$\cotg\alpha - \cotg\beta = \frac{b^2 - a^2}{cv},$$

$$\cotg\delta = \frac{1}{2}\left(\cotg\alpha - \cotg\beta\right).$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Frant. Záviška,* stud. VI. tř. g. v Brně).

Jmenujme úseky výškou spůsobené

$$\overline{af} = c_1\,, \quad \overline{bf} = c_2\,;$$

pak jest

$$c_1 + c_2 = c$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{c_1}{v}\,, \qquad \operatorname{cotg} \beta = \frac{c_2}{v}\,,$$

$$\operatorname{cotg} \delta = \left(c_1 - \frac{c}{2}\right) : v = \frac{2c_1 - c}{2v} = \frac{c_1 - c_2}{2v}\,.$$

Z toho zřejmo, že

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta\right)\,.$$

Úloha 21.

Pružná koule vržena z místa a proti stěně, od které se odrazivši narazila na kouli jinou v místě b. Jsou-li místa a, b vzdálena od stěny na 68 cm a 32 cm, a je-li $\overline{ab} = 111$ cm, jak velkou dráhu vykonala koule z a do b, a v kterém úhlu se odrazila od stěny?

Řešení. (Zaslal p. *Otakar Zich,* stud. VII. tř. g. v Křemencové ul. v Praze).

Vzdálenosti koulí a, b od stěny jsou kolmice k ní spuštěné

$$\overline{am} = 68\,, \qquad \overline{bn} = 38\,;$$

místo, kde koule na stěnu narazila, budiž c a tedy

$$\sphericalangle\, acm = \sphericalangle\, bcn = \alpha.$$

Prodloužené směry $\overline{am}$ a $\overline{bc}$ protínají se v bodě d tak, že

$$\overline{ac} + \overline{cb} = \overline{dc} + \overline{cb} = \overline{bd}\,,$$

$$\overline{bd} = \sqrt{\overline{mn}^2 + (\overline{am} + \overline{bn})^2}\,.$$

Jest však

$$\overline{mn}^2 = \overline{ab}^2 - (\overline{am} - \overline{bn})^2 = 111^2 - 36^2 = 105^2,$$

pročež

$$\overline{bd} = \sqrt{100^2 + 105^2} = 145 \text{ cm}.$$

Úhel α dán rovnicí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{am} + \overline{bn}}{\overline{mn}} = \frac{100}{105} = \frac{20}{21},$$

$$\alpha = 43^0\,36'\,10''.$$

Úloha 22.

Les mající 424·8 ha výměry má podobu lichoběžníka, jehož větší půdice jest 2655 m, úhly k ní přilehlé jsou 77° 20′, 87°40′. Která jest výška tohoto lichoběžníka a druhá jeho půdice?

Řešení. (Zaslal p. *Vincenc Tiefenbach,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci).

Lichoběžník měj půdice $a > b$, výšku v; rozdělme jej v trojúhelník o půdici $a - b$ a rovnoběžník o půdici b. Jsou-li dané úhly α, β, jest

$$a - b = v\,(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)$$

čili

$$a - b = \frac{v \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

Připojíme-li k této rovnici vzorec pro obsah lichoběžníka

$$\mathrm{L} = \frac{a + b}{2} \cdot v,$$

můžeme z těchto dvou rovnic vypočítati neznámé b, v, znajíce L, a, α, β. Vyloučíme nejprve v a obdržíme

$$a^2 - b^2 = \frac{2\,\mathrm{L} \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta},$$

odkud pomocí logarithmů vypočítáme

$$b = 2189{\cdot}3\ m,$$

načež určíme též

$$v = 1753{\cdot}8\ m.$$

Úloha 23.

Řešiti jest dvoustředový čtyrúhelník (kružnici vepsaný a jiné kružnici opsaný), dána-li strana $a = 21$ a přilehlé k ní úhly

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2}{3}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Čeněk Nevečeřel*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře).

Čtyrúhelník budiž opsán o kružnici poloměru ϱ; jelikož jest také kružnici vepsán, platí o jeho úhlech relace

$$\gamma = 2R - \alpha, \qquad \delta = 2R - \beta.$$

Spojíme-li střed kružnice vepsané se všemi vrcholy a vedeme-li jím zároveň kolmice k stranám, rozdělí se každá ve dvě části; nalezneme tak vzorce

$$a = \varrho\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\right)$$
$$b = \varrho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\right)$$
$$c = \varrho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$$
$$d = \varrho\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Při daných hodnotách $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ a $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ bude

$$a = \frac{7}{2}\varrho, \qquad b = 2\varrho,$$
$$c = \frac{7}{6}\varrho, \qquad d = \frac{8}{3}\varrho;$$

znajíce $a = 21$ vypočítáme

$$\varrho = 6, \quad b = 12, \quad c = 7, \quad d = 16.$$

Obsah čtyrúhelníka jest pak

$$P = \frac{a + b + c + d}{2} \cdot \varrho = 168.$$

Úloha 24.

V čtyrúhelníku o kružnici poloměru $\varrho = 9{\cdot}6$ opsaném stojí úhlopříčky $m = 40$, $n = 24$ na sobě kolmo. Dokázati, že čtyrúhelník ten jest deltoid a vypočítati jeho strany.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Vafek*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči).

Strany a, b, c, d čtyrúhelníka úlohou určeného činí zadost rovnicím

$$a + c = b + d,$$
$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = m_1^2 + m_2^2 + n_1^2 + n_2^2,$$

značí-li m_1, m_2, n_1, n_2 úseky, ve které se úhlopříčky m, n navzájem rozdělují.

Odečteme-li zdvojmocněnou rovnici první od dvojnásobné druhé, obdržíme

$$(a - c)^2 = (b - d)^2$$

a odtud

$$a - c = \pm (b - d).$$

Podmínka tato ve spojení s rovnicí první vede k výsledku

$$a = b, \quad c = d \text{ aneb } a = d, \quad b = c$$

stvrzujícímu větu, že o kružnici opsaný čtyrúhelník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo, jest deltoidem.

Při daných hodnotách m, n, ϱ mohou vzniknouti dva deltoidy dle toho, kterou z délek m, n pokládáme za hlavní úhlopříčku (osu souměrnosti). Je-li m hlavní úhlopříčkou a mimo to $a = d$, $b = c$, značí-li pak α úhel sevřený stranami a, b, ϱ obsah čtyrúhelníka, máme rovnice

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2} mn = ab \sin \alpha = 480$$

$$a + b = \frac{\mathrm{P}}{\varrho} = 50$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = m^2 = 1600,$$

z nichž vypočítáme

$$a = 37, \qquad b = 13,$$

$$\sin \alpha = \frac{480}{481}, \qquad \alpha = 93^0\, 41'\, 42''.$$

Úloha 25.

Daným bodem vésti jest rovinu, která protíná čtyrhran daný v rovnoběžníku.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Rieger*, stud. VI. tř. r. v Jičíně).

Buďtež A, B, C, D hrany daného čtyrhranu, s bod kdekoli daný. Roviny (A, B) a (C, D) protínají se v přímce M, roviny (A, C) a (B, D) mají průsečnici N. Vedeme-li bodem s přímky $M' \parallel M$, $N' \parallel N$, jest rovina ϱ určená přímkami M' N' rovinou žádanou.

Neboť jsou-li a, b, c, d průsečíky její s hranami čtyrhranu jest

$$ab \parallel cd \parallel M$$
$$ac \parallel bd \parallel N,$$

pročež čtyrúhelník $abcd$ rovnoběžníkem.

Úloha 26.

Dány jsou dva kolmé kužele tak, že střed základny jednoho jest vrcholem druhého a naopak. Jsou-li $r_1 = 60$, $r_2 = 40$ poloměry základen, $v = 75$ délka společné osy obou kuželů, jest vypočítati: a) poloměr kruhu, ve kterém se kužele pronikají, b) povrch i obsah tělesa pronikem tím vznikajícího.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vojtěch*, stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti).

Je-li ϱ poloměr kruhu, ve kterém se oba kužele pronikají, v_1 a v_2 části, ve které se kruhem tím výška v rozděluje, jest

$$\varrho : r_1 = v_2 : v$$
$$\varrho : r_2 = v_1 : v$$
$$v_1 + v_2 = v;$$

pročež

$$\varrho = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 24$$
$$v_1 = \frac{v r_1}{r_1 + r_2} = 45$$
$$v_2 = \frac{v r_2}{r_1 + r_2} = 30 .$$

Těleso vznikající pronikem obou kuželů skládá se ze dvou komolých kuželů, z nichž jeden má poloměry r_1, ϱ_1 výšku v_1 a stranu s_1, druhý poloměry r_2, ϱ, výšku v_2 a stranu s_2.

Jest tedy povrch tělesa

$$P = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi (r_1 + \varrho) s_1 + \pi (r_2 + \varrho) s_2$$

a obsah jeho

$$K = \frac{\pi}{3} v_1 \left(r_1^2 + r_1\varrho + \varrho^2\right) + \frac{\pi}{3} v_2 \left(r_2^2 + r_2\varrho + \varrho^2\right).$$

Při daných hodnotách číselných jest

$$s_1 = 9\sqrt{41}\,,\ s_2 = 34\,,$$
$$P = 4\pi\ (1844 + 189\ \sqrt{41}) = 38380\ cm^2,$$
$$K = 115600\,\pi = 363168\ cm^3.$$

Úloha 27.

Mísa má kruhové dno poloměru 16 cm a oblou stěnu v podobě kulového pásu, jehož horní okraj má poloměr 24 cm. Výška jest 10 cm. Kolik vody vejde se do mísy, naplní-li se pouze do $^1/_2$ výšky?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Kugler,* stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze).

Abychom úlohu řešiti mohli, třeba znáti poloměr ϱ středního řezu na kulovém pásu. Je-li r poloměr příslušné koule, u vzdálenost středního řezu koule, platny jsou rovnice

$$u^2 + \varrho^2 = r^2$$
$$(u + 5)^2 + 16^2 = r^2$$
$$(u - 5)^2 + 24^2 = r^2.$$

Z nich plynou hodnoty

$$\varrho = 21, \quad u = 16, \quad r = \sqrt{697}.$$

Jest tedy obsah mísy do polovice naplněné (při $v = 5$, $r_1 = 16$)

$$M = \frac{\pi v}{2}\left(r_1^2 + \varrho^2 + \frac{v^2}{3}\right) = 1763{\cdot}33\,\pi\,;$$

do mísy vejde se takto 5·54 l vody.

Poznámka redakce. Jsou-li r_1, r_2 poloměry kruhových stran na kulové vrstvě, v její výška a ostatní označení jako dříve, jest

$$\varrho^2 + u^2 = r^2$$

$$r_1^2 + \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 = r^2$$

$$r_2^2 + \left(u - \frac{v}{2}\right)^2 = r^2,$$

z čehož pro poloměr středního řezu vyplývá výraz

$$\varrho^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{v^2}{4}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do známého vzorce pro obsah vrstvy

$$V = \frac{\pi v}{2}\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{v^2}{3}\right),$$

obdržíme vzorec jiný, od *Maclaurina* pocházející

$$V = \pi v\left(\varrho^2 - \frac{v^2}{12}\right).$$

Úloha 28.

Dokažte, že přímky dané rovnicemi

$$y = x, \qquad y + (2 \pm \sqrt{3})\, x = m$$

omezují rovnostranný trojúhelník a ustanovte jeho obsah.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Šindelář*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích).

Přímky dané svírají s osou X úhly, jichž tangenty jsou

$$A_1 = 1, \quad A_2 = -(2 + \sqrt{3}), \quad A_3 = -(2 - \sqrt{3}).$$

Nechať první přímka s druhou protíná se v bodě c, druhá s třetí v a, třetí s první v b; vznikne $\triangle\, abc$, jehož úhly označme α, β, γ. Pak jest

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_3 - A_2}{1 + A_3 A_2} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{A_1 - A_3}{1 + A_1 A_3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{A_2 - A_1}{1 + A_2 A_1} = \sqrt{3},$$

tudíž

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^0$$

a trojúhelník abc jest rovnostranný.

Souřadnice vrcholů trojúhelníka toho jsou

$$a\,(x_1, y_1), \qquad b\,(r_2, y_2), \qquad c\,(x_3\, y_3)$$

$$x_1 = o, \qquad y_1 = m$$

$$x_2 = y_2 = \frac{m}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right)$$

$$x_3 = y_3 = \frac{m}{6}\left(3 - \sqrt{3}\right)$$

a obsah jeho

$$\varDelta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = \frac{m^2}{6}\sqrt{3}\,.$$

Úloha 29.

Trojúhelník abc mění se za těchto podmínek: vrchol a pohybuje se po přímce $A \equiv 5x + 6y - 30 = 0$, vrchol b po přímce $B \equiv 5x - 4y + 20 = 0$; strany bc, ca, ab otáčejí se kolem bodů a' (— 6, 0), b' (9, 0), c' (0, 0). Které jest geometrické místo vrcholu c?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Půček,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci).

Bodem $c' \equiv o$ prochází přímka

$$C' \equiv y - Ax = o$$

protínající A v a, B v b. Souřadnice těchto dvou vrcholů proměnného trojúhelníka abc jsou

$$x_1 = \frac{30}{5+6A}, \qquad y_1 = \frac{30\,A}{5+6\,A},$$
$$x_2 = \frac{20}{4\,A-5}, \qquad y_2 = \frac{20\,A}{4\,A-5}.$$

Třetí vrchol c jest průsečíkem přímek $A' \equiv \overline{a'b}$, $B \equiv \overline{b'a}$, jichž rovnice jsou

$$A' \equiv y - \frac{y_2}{x_2+6}(x+6) = o$$
$$B' \equiv y - \frac{y_1}{x_1-9}(x-9) = o$$

čili po dosazení hodnot za x_1, y_1, x_2, y_2

$$A' \equiv y - \frac{10\,A}{12\,A-5}(x+6) = o$$
$$B' \equiv y + \frac{10\,A}{18\,A+5}(x-9) = 0$$

Vyloučíme-li z rovnic těchto směrnici A, obdržíme rovnici žádaného místa geometrického. Vyjádříme-li A z obou rovnic, obdržíme

$$A = \frac{5y}{2(6y-5x-30)} = \frac{-5y}{2(9y+5x-45)}$$

čili po zkrácení stálými činiteli

$$y(y-5) = 0.$$

Geometrické místo vrcholu y rozpadá se tudíž v přímky

$$y = o, \qquad y - 5 = o$$

Úloha 30.

Jak se dokáže co nejjednodušeji, že

$$\sum_{h=0}^{k} k_h\, n_{h+1} = (n+k)_{k+1},$$

značí-li k_h, n_{h+1}, $(n+k)_{k+1}$ binomické koeficienty.

Řešení. (Zaslal p. *Otto Ottis*, stud. VI. tř. g. v Plzni).

Zmocníme-li podle binomické věty, obdržíme

$$(1+x)^n = n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \ldots + n_h x^h + \ldots + n_n x^n$$
$$(1+x)^k = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_h x^h + \ldots + k_k x^k.$$

Znásobením rovnic těchto ustanovíme

$$(1+x)^{n+k} = n_0 k_0 + (n_0 k_1 + n_1 k_0) x + (k_0 k_2 + n_1 k_1 + n_2) k_0 x^2 \ldots$$
$$+ (n_1 k_k + n_2 k_{k-1} + \ldots + n_{k+1} k_0) x^{k+1} + \ldots + n_n k_n x^{n+k}.$$

Jest však také

$$(1+x)^{n+k} = (n+k)_0 + (n+k)_1 x + (n+k)_2 x^2 + \ldots$$
$$+ (n+k)_{k+1} x^{k+1} + \ldots + (n+k)_{n+k} x^{n+k}.$$

Srovnáme-li v obou výrazech součinitele mocniny x^{k+1}, najdeme

$$n_1 k_k + n_2 k_{k-1} + \ldots + + n_{k+1} k_0 = (n+k)_{k+1},$$

čili, poněvadž

$$n_{k-l} = k_l,$$
$$n_1 k_0 + n_2 k_1 + n_3 k_2 + \ldots + n_{k+1} k_k = (n+k)_{k+1},$$
$$\sum_{h=o}^{k} k_h n_{h+1} = (n+k)_{k+1}.$$

Úloha 31.

Je-li x průměr veličin a, b,

y	„	„	a, x,
z	„	„	b, x,
u	„	„	x, y,

jest $x = u$. Dokázati o průměru arithmetickém, geometrickém i harmonickém.

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Jambor,* stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí).

a) Je-li dle podmínek úlohy

$$x = \frac{a+b}{2}, \qquad y = \frac{a+x}{2} = \frac{3a+b}{4},$$
$$z = \frac{b+x}{2} = \frac{a+3b}{4}, \qquad u = \frac{z+y}{2},$$

jest $$u = \frac{4a + 4b}{8} = \frac{a + b}{2} = x\,.$$

b) Při průměru geometrickém jest

$$x = \sqrt{ab}\,, \qquad y = \sqrt{ax} = \sqrt[4]{a^3 b}\,,$$
$$z = \sqrt{bx} = \sqrt[4]{ab^3}\,, \qquad u = \sqrt{yz}\,,$$

tedy $$u = \sqrt[8]{a^4 b^4} = \sqrt{ab} = x\,.$$

c) Jde-li o průměr harmonický, bude

$$x = \frac{2ab}{a + b}\,, \qquad y = \frac{2ax}{a + x} = \frac{4ab}{a + 3b}\,,$$
$$z = \frac{2bx}{b + x} = \frac{4ab}{b + 3a}\,, \qquad u = \frac{2yz}{y + z}\,,$$

tudíž

$$u = \frac{32a^2b^2}{4ab\,(4a + 4b)} = \frac{2ab}{a + b} = x$$

Úloha 32.

Řešiti jest rovnici:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \sin\,(R - x) & \sin\,(2R - x) \\ \sin\,(R - x) & \sin\,(2R - x) & \sin x \\ \sin(2R - x) & \sin x & \sin\,(R - x) \end{vmatrix} = 0.$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Grohman*, v Ivanovicích na Moravě).

Vyčíslíme-li daný determinant kladouce zároveň

$$\sin\,(R - x) = \cos x, \qquad \sin\,(2R - x) = \sin x,$$

přijdeme k rovnici

$$3 \sin^2 x \cos x = 2 \sin^3 x + \cos^3 x\,,$$

kterou lze uvésti na podobu

$$(2 \sin x \cos x - 1)\,(2 \sin x + \cos x) = 0\,.$$

Jest tedy buď

$$2 \sin x \cos x - 1 = 0,$$

z čehož $$x = 45^0 + 2n\mathrm{R},$$

aneb $$2 \sin x + \cos x = 0,$$

odkud $$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \quad x = 2n\mathrm{R} - 26^0\,33'\,55''.$$

Správné řešení úloh zaslali pp.:

Ladislav Bardavský, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 13.—17., 21., 26.
Bohdan Bartošek, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 31., 32.
František Borkovec, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 7., 8., 10.—16., 18., 20.—23., 26., 27., 31., 32.
Karel Brdlík, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 7., 8., 10.—15., 18., 19., 21., 25.
Ignác Deyl, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 7., 8., 14.—18., 20., 21., 26., 28., 32.
Petr Dlouhý, stud. VIII. tř. g. v N. Bydžově, úl. 8., 15., 26., 28.
Josef Frieb, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 6. až 32.
Josef Grohman v Ivanovicích na Moravě, úl. 7., 8., 11—16., 18., 20., 22., 23., 26., 27., 28., 32.
Jan Handl, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 7., 8., 11., 13.—16., 20., 27., 31.
Jindřich Hanzlík, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 13.
Stanislav Hanzlík, stud. VII. tř. g. v Zitné ulici v Praze, úl. 14., 15., 21., 26.
Václav Havlíček, stud. VI. tř. r, v Písku, úl. 7., 8., 10. až 14., 16., 18. až 23., 25., 32.
František Herrmann, stud. VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, úl. 6., 7., 14., 15.
Richard Holl, stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 6. až 8., 11. až 17., 19. až 22.
Jan Horák, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 7., 8., 13., 14., 15., 16., 26., 28.
Vladimír Ibl, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 7., 9., 14., 15.
Rudolf Jambor, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 7., 8., 10., 13.—18., 20.—23., 26., 27., 28., 31., 32.
Antonín Jelínek, stud. V. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 21.
Jan Kapras, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 26., 27., 31., 32.
Viktor Kidles, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 7., 8.
Arthur Klein, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 7., 8., 14., 16., 21., 22.
František Klein, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 7., 16., 22., 23., 27.

František Košelka, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 31., 32.
Stanislav Kovanda, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 6., 10., 13., 28.
Josef Kovářík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 8., 13., 14., 15., 31., 32.
Alfred Králík, stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 8., 13., 14., 22.
Josef Kugler, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 13., 14., 21., 26., 27.
Karel Kutílek, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 7., 13. až 16., 20., 21., 26.
František Lorenc, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 7., 13,, 26., 27.
Jindřich Macenauer, stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 26.
Bohuslav Masák, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 7., 8., 11., 12., 14., 15., 16., 18.—22., 25.—28., 32.
Emanuel Mencl, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 13. až 16., 21., 26., 27.
Vilibald Mildschuh, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 6., 7., 8., 10. až 17., 19. až 24., 26. až 29., 31., 32.
Rudolf Milota, stud. VI. tř. g. v Písku, úl. 7., 8., 10. až 14., 16. až 24., 26. až 29., 32.
Josef Mucha, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 26.
Karel Nečas, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 7. až 16., 18., 20., 21., 23., 26., 27., 32.
Methoděj Nečas, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 31.
Jiří Nerád, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 7., 14., 15., 16., 20., 22., 26. až 28.
Otakar Neudörfl, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 6., 7., 8., 10., 11., 13. až 17., 20. až 23., 26., 28.
Čeněk Nevečeřel, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 7., 14., 15., 21., 23., 26.
Otto Ottis, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 6. až 32.
Maxmilian Paďour, stud. VII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 7., 16., 27.
Petr Pecl, stud. VII. tř. g. v Klatovech, úl. 6. až 23.
Josef Poláček, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 10., 14., 26.
Jan Polák, stud. V. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 31.
Jaroslav Polák, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 14.
Antonín Profous, stud. VII. tř. g. v Chrudimi úl. 7., 13. až 16., 19., 20.
Josef Půček, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 6. až 32.
Josef Rieger, stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 6., 7., 8., 10. až 16., 18. až 28., 31., 32.
Antonín Ringl, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 7., 8., 11. až 15., 20., 21., 23., 26., 28.

Rudolf Rolíček, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 6. až 8., 10. a 23., 26., 27., 28.
Josef Ryš, stud. VII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 7., 13., 14.
Augustin Straka, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 15, 21., 26., 27.
J. Suchý, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 7., 14., 15., 16., 19., 20., 21., 26., 28.
Karel Šindelář, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 7., 15., 16., 22., 28.
Antonín Štěpánek, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 7., 8., 11., 13. až 16., 18., 20. až 23., 26., 27.
František Štrajt, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 6. až 8., 10. až 23., 26., 27., 28.
Rudolf Tereba, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 22.
Vincenc Tiefenbach, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 7., 8., 11., 14., 15., 16., 18., 20. až 24., 26., 27., 28., 32.
Oskar Tomandl, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 6. až 8., 10. až 28.. 31., 32.
Josef Vafek, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 5., 6., 8., 10. až 24.
Miloslav Valouch, stud. VIII. tř. g. v Olomouci úl. 2. až 8., 10. až 16., 18. až 24., 26., 27., 28., 31., 32.
Vítězslav Vic, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 7., 8., 10. až 19., 22. až 24., 27., 28., 29., 32.
Karel Vítek, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 13., 14., 22.
František Vodseďálek, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 6., 7., 8., 10. až 16.
Bohumil Voženílek, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 6. až 8., 10. až 23., 28.
Antonín Vyhlídal, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 7., 8.
František Záviška, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 7., 8., 10. až 18., 20. až 27., 31.
Otakar Zich, stud. VII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 7., 13., 14., 15., 21,, 22., 26.
Josef Žďárský, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 7., 13., 14., 15., 19., 23., 26., 27., 28.