Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 40--44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123419

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Úloha 1.

Má se dokázati, že o úhlech trojúhelníkových α, β, γ platí vzorec

$$\frac{sin\, ^1/_2\,\alpha}{cos\, ^1/_2\,\beta\, cos\, ^1/_2\,\gamma} + \frac{sin\, ^1/_2\,\beta}{cos\, ^1/_2\,\gamma\, cos\, ^1/_2\,\alpha} + \frac{sin\, ^1/_2\,\gamma}{cos\, ^1/_2\,\alpha\, cos\, ^1/_2\,\beta} =$$
$$\frac{cos\,\alpha}{sin\,\beta\, sin\,\gamma} + \frac{cos\,\beta}{sin\,\gamma\, sin\,\alpha} + \frac{cos\,\gamma}{sin\,\alpha\, sin\,\beta}.$$

Úloha 2.

Jak velká jest plocha kruhu, jejž opisuje těžisko trojúhelníku, jehož úhly měří 30^0, 45^0, 105^0, otáčí-li se v kruhu poloměru 10 tak, že jednotlivé strany nepřestávají býti tětivami.

Úloha 3.

Má se dokázati a geometricky vyložiti, že

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots in\, inf = 2.$$

Úloha 4.

Má se odůvodniti vzorec tento:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,2^2} + \frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1}{4\,.\,2^4} + \ldots in\, inf = l2\,^*)$$

Úloha 5.

Má se dokázati, že

$$\frac{1}{nz^{n,1}} = \frac{1}{z^{n+1,1}} + \frac{1}{(z+1)^{n+1,1}} + \frac{1}{(z+2)^{n+1,1}} + \ldots in\, inf.$$

Úloha 6.

Vedeme-li nějakým bodem v rovině rovnoběžky ku všem stranám trojúhelníku nějakého, obdržíme 6 průsečíků ležících v kuželosečce; kterých pouček tu k důkazu zapotřebí.

---

*) Jako ve všech spisech svých budu i zde užívati znamení l pro přirozený, lg pro briggický a Lg_a pro všeobecný logarithmus.

Úloha 7.

Značí-li a, b, c, d délky stran čtyrúhelníku do kruhu vepsaného a s poloviční jeho obvod, má se dokázati, že plochu vyjadřuje vzorec

$$p^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Úloha 8.

Značí-li P prvočíslo, jest

$$\frac{(P-1)!+1}{P} = m,$$

kdež m představuje číslo celistvé; jaký tu důkaz?

Úloha 9.

Má se u paraboly dokázati, že pata kolmice spuštěné s nějakého bodu T tečny její na průvodiče bodu dotyčného jest tak daleko vzdálená od ohniska jako T od ředitelky; na této vlastnosti budiž pak založeno pravidlo, podlé něhož možná sestrojiti tečnu k parabole s bodu mimoležícího.

Úloha 10.

V kterých bodech křivky vyjádřené rovnicí

$$y = x\left(\frac{2}{3} + \frac{x^2}{a^2}\right)$$

jest křivost největší neb nejmenší, maximum neb minimum?

Úloha 11.

Má se vyhledati křivka, u níž se má délka poloměru křivosti k dané délce a jako délka tangenty k délce subtangenty.

Úloha 12.

Má se určiti orthogonální trajektorie soustavy parabol, majících společnou tečnu vrcholovou.

Úloha 13.

Má se dokázati, že cissoida jest trochoidou ohniska paraboly, valící se na stejné a stejně položené parabole.

Úloha 14.

Má se vyhledati taková funkce proměnné x, aby součin první derivace se čtvrtou rovnal se součinu druhé derivace s třetí.

Úloha 15.

Má se určiti a geometricky vyložiti integrál rovnice

$$(2y-3z)\frac{\partial z}{\partial x} + 2(2z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = 3x-4y.$$

II. Z fysiky.

Úloha 1.

Desítiliberní koule železná leží mezi dvěma nakloněnými rovinami; jakou silou tlačí na jednotlivé roviny tyto, měří-li naklonění jedné 30^0, druhé 60^0?

Úloha 2.

Má se dokázati, že tři dělníci, držíce trojúhelníkovou stejnorodou desku stejné tloušťky v rozích, mají stejně co nésti.

Úloha 3.

Drží-li tutéž desku dva dělníci ve dvou rozích, kde na okraji musí držeti jiní dva dělníci, aby všickni nesli stejně.

Úloha 4.

Má-li deska taková tvar rovnoběžníku a drží-li ji dělník v jednom roze, kde musí jiní dva na okraji držeti, aby všickni nesli stejně?

Úloha 5.

Na vrchu výšky v pozoroval se meteor nějaký v úhlu α nad obzorem a jeho obraz v jezeru u paty vrchu se rozprostírajícím v úhlu β pod obzorem; jak vysoko byl meteor nad obzorem pozorovatele a jak vysoko nad hladinou jezera?

Úloha 6.

Na válec z tak zvané duše bezové poměrné tíže 0·1 zhotovený připojí se olověná polokoule poměrné tíže 11·5 téhož průměru 0·5″ jako válec; jak dlouhý může býti, aby nezůstal na vodorovné rovině ležeti?

Úloha 7.

Jak musí býti nakloněna šikmá rovina, aby těleso na ní bez tření v témž čase sběhlo, jakéhož má zapotřebí, aby prostým pádem podél její výšky spadlo a nabytou dole rychlostí ještě délku základny proběhlo?

Úloha 8.

Tři zcela pružné koule m, m' a m'' stojí v přímém směru za sebou; jak velká musí býti hmota koule m', aby přenesla na kouli m'' co možná největší rychlost, narazí-li na ni koule m rychlostí a. (Huyghens).

Poznámka. O zákonech rázu píše *M. Jullien* v „Problèmes de mécanique rationelle“ t. I. pag. 253. mezi jiným takto: „Le plus ancien ouvrage que nous connaissions sur le choc des corps est dû à J. *Marc Marci de Crownlad*, médecin *hongrois* (sic), qui publia à Prague, l' an 1639, un Traité *De proportione motus seu regula sphygmica*, dans lequel il étudie le choc des corps dépourvus d'élasticité on parfaitement élastique. Les lois qu'il a données pour ces derniers corps sont précisément celles que l'on adopte aujourd'hui. Cet ouvrage remarquable est cependant tombé dans un oubli général; il parait même qu'il ne parvint pas à la connaissance de Wallis, de Wren et de Huyghens qui, trente années plus tard, donnèrent à peu près les mêmes lois que Marci."

Jak patrno, reklamuje Jullien prioritu pro *Marka Marci* *), slavného rodáka našeho, jejž omylem má za uherského lékaře; neb obyčejně se připisuje vynalezení zákonů o rázu pružných koulí Huyghensovi.

Úloha 9.

Má se určiti poloha těžiska u plochy, povstávající otočením polovičního oblouku kykloidy

$$x = a(1 - \cos \omega), \; y = a(\omega + \sin \omega)$$

kolem osy úseček.

Úloha 10.

Má se dokázati, že v neodporujícím ústředí proběhne hmotný bod oblouk lemniskaty v stejné době co příslušnou tětivu, počítáme-li obé od bodu středního.

Úloha 11.

Bod hmoty 1 pohybuje se, přítažností zemskou jsa puzen, na křivce, která se rychlostí ω otáčí kolem osy kolmé; jaké podmínce musí tato křivka vyhoviti, aby byl pohyb bodu stejnoměrný.

Úloha 12.

Na bod hmoty 1 působí z daného středu přítažná síla tak, že se pohybuje rychlostí přiměřenou obrácené $n$té mocnině vzdálenosti své od tohoto středu; jakým zákonem řídí se tu přítažnost a jaká tu povstává dráha vůbec a jestli $n = 1/2$ a $n = 1$ zvlášť.

---

*) Nar. 13. června 1595 v Landškroně, zem. 10. dubna 1667 v Praze.

Úloha 13.

Na hmotný bod působí přítažná síla v opačně kubickém poměru z daného středu, kterýž jest obejmut hmotou plynnou, jíž ubývá hutnosti v kubickém poměru a jejíž odpor závisí na druhé mocnině rychlosti; jaká jest rychlost padajícího bodu v určité vzdálenosti od tohoto středu?

Úloha 14.

Jak by musila v předcházejícím případě působiti síla přítažná, aby bod padajíc potřeboval stejně dlouhého času pro kterou koli vzdálenost od středu?

Úloha 15.

Hmotný bod má dráhu tvaru logarithmické spirálky, působí-li naň přítažně pol její; má se určiti rychlost a síla přítažná v daném bodu dráhy. *Std.*