

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Josef Studnička

O Eulerově vzorci, podle něhož možná konvergentní řady proměnit v rychleji konvergentní

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 33--35

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123417>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

obdržíme, vyloučivše k , jako při hlavních zlomcích přibližných

$$\alpha_n s_k - \beta_n r_k = (-1)^{n-1}, \alpha_n < \beta_n. \quad (3)$$

A této relace možná použití k řešení neurčitých rovnic stupně prvního čísly celistvými.

Značí-li a a b relativní prvočísla, jest základní tvar takovýchto rovnic

$$ax - by = c; \quad (4)$$

proměníme-li pak zlomek $a : b$ v řetězec, bude poslední přibližný zlomek, dejme tomu

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{a}{b}$$

a předposlední tudíž

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \frac{\alpha}{\beta},$$

vzorec (1), (2) a (3) promění se za tou příčinou v

$$r_k = ak + \alpha, \quad (5)$$

$$s_k = bk + \beta, \quad (6)$$

$$as_k - br_k = (-1)^{n-1}, a < b. \quad (7)$$

Znásobíme-li tedy poslední tuto rovnici činitelem $(-1)^{n-1} c$, povstane z ní

$$(-1)^{n-1} [acs_k - bcr_k] = c,$$

z čehož patrno, porovnáme-li s rovnicí (4), že

$$x = (-1)^{n-1} cs_k,$$

$$y = (-1)^{n-1} cr_k,$$

aneb dosadíme-li za r_k a s_k hodnoty ze vzorců (5) a (6),

$$x = (-1)^{n-1} [bp + \beta c], \quad (8)$$

$$y = (-1)^{n-1} [ap + \alpha c], \quad (9)$$

při čemž možná za $p = kc$ dosaditi jakékoli číslo celistvé.

Jestli $a > b$, píše se ve vzorci (8) a (9) n místo $n-1$.

O Eulerově vzorci, podle něhož možná konvergentní řady proměnití v rychleji konvergující.

(Příspěvek k počtu s operačními symboly od dra. F. J. Studničky.)

V klassickém díle svém o počtu diferenciálním jednajícím zanáší se Euler též s převáděním řad na jiné ¹⁾, které rychleji

¹⁾ Institut. calc. dif. Pars II. „De transformatione serierum“ pag. 232. 1755.

konvergují, a přichází tu k zvláštnímu vzorci, podle něhož možná úkol tento snadno řešiti; k těmž vzorcům, jiným však způsobem přišel později též *Hutton* ²⁾ a *Poncelet* ³⁾, podle nichž se řídí pozdější matematikové.

Důkaz, jaký tu vedou, zakládá se na indukci a jest dosti rozvláčný; pomocí počtu s operačními symboly ⁴⁾ možná jej však co nejrychleji vyvinouti.

Chceme-li totiž řadu

$$s = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, \quad (1)$$

kde o jednotlivých členech platí

$$u_1 > u_2 > u_3 \dots > u_n > u_{n+1} \dots,$$

proměnití v jinou rychleji konvergující, sestavme především

$$2s = u_1 + (u_1 - u_2) - (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) - \dots \quad (2)$$

a zavedme označení

$$u_k - u_{k+1} = \Delta u_k,$$

všeobecně pak

$$\Delta^m u_k - \Delta^m u_{k+1} = \Delta^{m+1} u_k,$$

načež z rovnice (2) povstane

$$2s = u_1 + \Delta u_1 - \Delta u_2 + \Delta u_3 - \dots$$

aneb, porovnáme-li s řadou (1),

$$2s = u_1 + \Delta s, \quad (3)$$

jelikož patrně

$$\Delta s = \Delta u_1 - \Delta u_2 + \Delta u_3 - \Delta u_4 + \dots$$

Vyjádríme-li pak rovnici (3) symbolickým tvarem

$$s(2 - \Delta) = u_1,$$

zjednáme si velmi jednoduchým obratem

$$s = u_1 : (2 - \Delta)$$

a provedeme-li naznačené dělení a vrátíme-li se pak k původnímu významu symbolu Δ , konečně

$$s = \frac{u_1}{2} + \frac{\Delta u_1}{2^2} + \frac{\Delta^2 u_1}{2^3} + \dots$$

aneb použijeme-li symbolu Σ ,

²⁾ Tracts on mathematical and philosophical subjects. t. I. pag. 176, 1812.

³⁾ Application de la méthode des moyennes à la transformation, au calcul numérique et à la détermination des limites du reste des séries. Crelle's J. Bd. XIII. pag. 1. 1835.

⁴⁾ Srovnej „Třetí zpráva jednoty českých matematiků.“

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k u_1}{2^{k+1}},$$

což se shoduje s Eulerovým vzorcem.

Podle toho možná na př. proměnění známou řadu Leibnicovu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

v rychleji konvergující

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$$

O kvadratuře kruhu *)

(Podává dr. F. J. Studnička.)

Každým skoro rokem domnívá se někdo, že sestrojil *perpetuum mobile* aneb vynalezl *kvadraturu kruhu*, ač věda, do kteréž tyto otázky patří, dávno již dokázala, že i toto i ono jest nemožné.

Co se zejména tkne kvadratury kruhu, možná způsobem dosti jednoduchým dokázati, že i π i π^2 značí *irracionální* číslo, a tím se přesvědčiti, že nelze u kruhu poměr obvodu k poloměru vyjádřiti číslem racionálním aneb že obvod jest nesměřitelný poloměrem.

Třebať tu jen znáti z theorie řetězců

$$a) \text{ vzorec } tg x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

b) poučku, že nekonečný řetězec

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

*) Článek tento uveřejňujeme za tou příčinou, abychom mohli k němu poukázati, když nám někdo, jakž často se děje, oznámí, že se mu pomocí boží podařilo nalézt kvadraturu kruhu.