Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bedřich Pospíšil

Eine Bemerkung über vollständige Räume

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. 1, 38--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123413

Eine Bemerkung über vollständige Räume.

Bedřich Pospíšil, Brünn.

(Eingegangen am 5. September 1940.)

Ein topologischer Raum heißt nach Prof. E. Čech *vollständig,* wenn er mit einer G_δ-Menge in einem bikompakten Hausdorffschen Raume homöomorph ist. Mit R möge immer ein vollständiger Raum bezeichnet werden. In einer Abhandlung von Čech und mir wird folgender Satz bewiesen:[1])

(A) *R sei kompakt und vollständig normal. S sei eine Untermenge von R derart, daß jede beschränkte auf S erklärte stetige Funktion auf ganz R fortgesetzt werden kann. Dann ist die Menge S in sich kompakt.*

Der l. c. gegebene Beweis dieser Tatsache ist ziemlich kompliziert. Wenn man aber die von Čech und mir erzielten Ergebnisse über die bikompakten Räume[2]) konsequenter ins Auge faßt, so liegt der Satz samt gewissen ähnlichen Behauptungen ganz nahe. Wir fragen vor allem, unter welchen Bedingungen folgendes gilt:

(Z) *Ist S eine abzählbare Untermenge von R und kann jede beschränkte auf S erklärte stetige Funktion auf ganz R fortgesetzt werden, so ist S im Raume R abgeschlossen.*

Laut A. Tychonoff (vgl. Č) gibt es zu jedem vollständig regulären Raum T einen (bis auf Homöomorphien) ganz bestimmten bikompakten Hausdorffschen Raum βT, in dem T als eine dichte Teilmenge derart eingebettet ist, daß jede beschränkte auf T stetige Funktion auf ganz βT fortgesetzt werden kann. Ist insbesondere I der isolierte Raum der natürlichen Zahlen, so möge $\beta = \beta I$ gesetzt werden. Es gilt nun folgender

---

[1]) E. Čech und B. Pospíšil, Sur les espaces compacts, Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk à Brno 258 (1938), S. 5, Théorème II.

[2]) E. Čech, On bicompact spaces, Annals of Mathematics 38 (1937), S. 823 ff. Diese Abhandlung wird mit Č. bezeichnet.

B. Pospíšil, On bicompact spaces, Publ. Fac. Sc. Univ. Masaryk à Brno 270 (1939). Diese Abhandlung wird mit P. bezeichnet.

Hilfssatz. *Dann und nur dann ist* (Z) *erfüllt, wenn β in R topologisch nicht enthalten ist.*

Beweis. Ist β in R topologisch eingebettet und ist S die zu I gehörige Untermenge von R, so kann jede beschränkte auf S erklärte Funktion stetig auf ganz β ausgedehnt werden. Nun ist aber βR normal, β eine abgeschlossene Teilmenge davon. Also kann unsere Funktion auf ganz βR, also insbesondere auf ganz R stetig fortgesetzt werden. Wäre nun (Z) erfüllt, so müßte S in R, also auch I im Raume β abgeschlossen sein, was mit der Dichtigkeit die Gleichung $I = \beta$ ergäbe. Dies ist aber unmöglich, da I offenbar nicht bikompakt ist.

Nun möge S die Annahmen von (Z) erfüllen, ohne in R abgeschlossen zu sein. Dann erfüllt die abgeschlossene Hülle H von S im Raume βR alle Annahmen für βS, so daß man $\beta S = H$ schreiben darf. Laut Č. S. 837 ist R eine G_δ-Menge in βR. Also ist der Durchschnitt D von R und H eine G_δ-Menge in $H = \beta S$. Ferner ist $D - S$ nicht leer.

Also sei $p \in D - S$, G_n eine Folge offener Teilmengen von βS, deren Durchschnitt gleich D ist. s_n möge die Menge S durchlaufen. Man kann die Mengen G_n so verkleinern, daß noch immer $p \in G_n$ gilt und die abgeschlossene Hülle $\overline{G}_{n+1}$ in βS der Menge G_{n+1} in $G_n - (s_n)$ enthalten ist. Dann verkleinert sich auch der Durchschnitt D der Mengen G_n, bleibt aber noch immer nicht leer. Außerdem ist die neue Menge D eine abgeschlossene G_δ-Menge in βS, D zu S fremd. Da nun βS normal ist, so gibt es eine stetige Funktion f auf βS, die genau auf der Menge D verschwindet. Da ferner S in βS dicht liegt, so gibt es eine Nullfolge $\{\varepsilon_n\}$, $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$, und eine Teilfolge $\{p_n\}$ von S mit $f(p_n) = \varepsilon_n$. Die Folge $\{p_n\}$ ist offenbar ein abgeschlossener isolierter Teilraum von S. Man darf ganz einfach $p_n = n$ schreiben, d. h. die Folge $\{p_n\}$ mit I identifizieren. Alle Häufungspunkte von I im Raume βS gehören zu D, also ist die abgeschlossene Hülle B in βS von I in R enthalten. B ist ein bikompakter Hausdorffscher Raum, I eine dichte Teilmenge von B.

Es genügt also nur zu zeigen, daß jede beschränkte Funktion f auf I auf ganz B stetig fortgesetzt werden kann. Denn daraus folgert man, daß B mit β homöomorph, also β in R topologisch enthalten ist. Dazu hat man nur zu zeigen, daß f auf ganz S, also auf ganz βS stetig ausgedehnt werden kann.

r_n möge die Menge $S - I$ durchlaufen. Ist nun I_N die Menge aller $n \in I$, $n \geqq N$, so sind die Mengen $I^N = I - I_N + (r_N)$ und $\bar{I}_N$ in ihrer Vereinigung $I + (r_N)$ abgeschlossen. Also sind die im normalen Raume βS abgeschlossenen Mengen I^N und $\overline{I}_N$ zueinander fremd. Also gibt es in βS fremde offene Mengen U_N und V_N, $I^N \subset U_N$, $\overline{I}_N \subset V_N$. Zu jedem $N \in I$ wählen wir in βS eine Umgebung

Θ_N mit $\overline{\Theta}_N \subset U_N$ und $\overline{\Theta}_N \subset V_n$ für alle $n < N$. Die Mengen $\overline{\Theta}_N$ sind zu je zwei fremd.

Ist nun f irgendeine auf I erklärte beschränkte Funktion, so kann man sie auf jede Menge $\overline{\Theta}_n$ stetig ausdehnen und zwar derart, daß ihr Wert im Punkte n beibehalten bleibt, f auf $\overline{\Theta}_n - \Theta_n$ verschwindet und alle Werte von f auf $\overline{\Theta}_n$ zwischen Null und $f(n)$ liegen. Außer der Vereinigungsmenge unserer $\overline{\Theta}_n$ sei f gleich Null. Da jede Menge U_N nur endlich viele $\overline{\Theta}_n$ trifft, so ist f offensichtlich auf U_N stetig. Also ist f auch auf der Vereinigungsmenge der offenen U_N stetig. Da die besagte Vereinigung unsere Menge S enthält, so ist f auf S stetig. Also kann jede auf I beschränkte Funktion auf ganz S stetig ausgedehnt werden, w. z. b. w.

Folgerungen.

(B) *Ist R vollständig normal, so gilt* (Z).

Da nämlich β laut P. Theorem III nicht vollständig normal ist, so kann β in R nicht topologisch eingebettet werden; also folgt (B) aus Hilfssatz.

Daraus folgt schon die anfangs erwähnte Behauptung (A). Wäre nämlich S in (A) nicht in sich kompakt, so gäbe es einen unendlichen abzählbaren in S abgeschlossenen isolierten Teilraum T von S. Da jeder Unterraum von R, also auch S normal ist, so könnte jede auf T beschränkte Funktion stetig auf ganz S, also auch auf ganz R fortgesetzt werden. Daraus würde nach (B) die Abgeschlossenheit von T in R also auch in S folgen, was unserer Wahl von T widerspricht.

Ist ferner $\mathfrak{t}$ die Anzahl aller Mengen reeller Zahlen, so gilt

(C) *Ist die Mächtigkeit von R kleiner als $\mathfrak{t}$, so gilt* (Z).

Dies folgt aus Hilfssatz und P. Theorem II, kraft dessen die Mächtigkeit von β gleich $\mathfrak{t}$ ist.

Die Vollständigkeitsvoraussetzung für den Grundraum R ist wesentlich. Ist nämlich $p \in \beta - I$, so ist der in β eingebettete Raum $R = I + (p)$ vollständig normal und hat ja viel weniger als $\mathfrak{t}$ Punkte. Trotzdem ist (Z) für $S = I$ nicht erfüllt.

Ebenso ist die Abzählbarkeitsannahme von S in (Z) unentbehrlich. Ist nämlich R der geordnete Raum aller Ordinalzahlen $\leqq \omega_1$, S die Menge aller Ordinalzahlen $< \omega_1$, so kann laut Č. S. 836 jede auf S stetige Funktion auf ganz R ausgedehnt werden. Der Raum R ist bikompakt, vollständig normal und enthält weniger als $\mathfrak{t}$ Punkte. Trotzdem ist S in R nicht abgeschlossen.

Nachträgliche Zusatzbemerkung. Ohne auf die Theorie von βT einzugehen, kann man folgendes beweisen:

(Z) *ist mit folgender Bedingung gleichbedeutend: Ist F eine F_σ-Menge in R und kann jede beschränkte auf F stetige Funktion auf ganz R fortgesetzt werden, so ist F im Raume R abgeschlossen.*

F möge nämlich unsere Annahmen erfüllen, ohne in R abgeschlossen zu sein. Ist R eine G_δ-Menge im bikompakten Hausdorffschen Raume B, H die abgeschlossene Hülle von F in B, so ist der Durchschnitt D von R mit H eine G_δ-Menge in H. p sei in H und $R - F$ enthalten, F_n eine aufsteigende Folge abgeschlossener Mengen in R mit der Vereinigung F und G_n abnehmende offene Mengen in H mit dem Durchschnitte D. f_n sei auf H stetig, $0 \leqq f_n \leqq 2^{-n}$, $f_n(p) = 0$, $f_n(H - G_n + \overline{F}_n) = 2^{-n}$, $f = \Sigma f_n$. ($\overline{M}$ ist die abgeschlossene Hülle der Menge M in H.) Man kann rekurrent eine Teilfolge T_n von F_n und eine Punktfolge $s_n \in T_n$ derart angeben, daß $f(s_n)$ eine Nullfolge ist und $f(s_{n+1}) < f(x)$ für alle $x \in \overline{T}_n$ gilt. Die Folge $S = \{s_n\}$ ist offenbar in dem Vereinigungsraume T aller $\overline{T}_n$ abgeschlossen. Nun ist aber T eine F_σ-Menge im normalen Raume H, also selbst ein normaler Raum, so daß jede auf S beschränkte stetige Funktion auf ganz T, also auf ganz F und folglich auf ganz R fortgesetzt werden kann. Gilt nun (Z), so ist S in R abgeschlossen, was aber unmöglich ist. Ist nämlich q ein Häufungspunkt von S im Raume H, so ist $f(q) = 0$, also $q \in G_n$ für alle n, d. h. $q \in R$ und offenbar q non $\in S$. Also ist F in R abgeschlossen, w. z. b. w.

*

Poznámka o úplných prostorech.

(Obsah předešlého článku.)

Jde o jednodušší důkaz věty citované v poznámce [1]) a o několik tvrzení v souvislosti s tím.