Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vojtěch Jarník

Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide
$\alpha_1(u_1^2 + \cdots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \cdots + u_r^2) \leq x$

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. 1, 1--33

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123412`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq x$.

Zweite Abhandlung.[1])

Vojtěch Jarník, Praha.

(Eingegangen am 27. Januar 1940.)

§ 1. Bezeichnungen und Resultate.

Im Folgenden sei stets r_1, r_2 ganz, $r = r_1 + r_2$, $z = \text{Min}\,(r_1, r_2)$, $z \geqq 4$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ irrational;

$$Q = Q(u) = \alpha_1 (u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2 (u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2); \quad (1)$$

also ist Q eine positiv definite quadratische Form in den r Veränderlichen $u_1, \ldots, u_r$. Für $x > 0$ sei $A(x) = A_Q(x)$ die Anzahl der im Ellipsoid $Q(u) \leqq x$ liegenden Gitterpunkte $(u_1, \ldots, u_r)$; der Inhalt dieses Ellipsoids ist

$$V_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1} \alpha_2^{\frac{1}{2}r_2} \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)}, \quad (2)$$

und man setze

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x). \quad (3)$$

Mit $c_1, c_2, \ldots$ bezeichne ich *positive* Zahlen, die nur von $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2$ abhängen (natürlich hängt c_l noch von l ab); ist z. B. ξ ein Parameter und φ eine Funktion, so bedeute $c_l(\xi, \varphi)$ eine *positive* Zahl, die nur von $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2, \xi$ und von der Gestalt der Funktion φ abhängt u. desgl. Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreibe ich oft unterschiedslos c statt c_l, $c(\xi, \varphi)$ statt $c_l(\xi, \varphi)$ usw., sodaß Gleichungen wie $c + 1 = c$ entstehen können. Statt e-

[1]) Die erste gleichnamige Abhandlung, die weiter mit I zitiert wird, erscheint im Věstník Král. Čes. Sp. Nauk 1940, Nr. III.

schreibe ich gelegentlich auch $\exp \eta$. Ist b reell, so bedeutet η^b denjenigen in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen komplexen η-Ebene regulären Zweig, der für $\eta > 0$ positiv ist.

$\{a, b\}$ bedeutet den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen a, b; für reelles η bedeutet $[\eta]$ die größte ganze Zahl $\leqq \eta$. Das Zeichen a/b soll bedeuten, daß a, b ganz und *positiv* sind und a ein Teiler von b ist.

Wir werden oft folgende Abschätzungen gebrauchen, ohne sie stets ausdrücklich zu erwähnen: ist $a > 1$, n ganz, $n > 0$,

$$\xi_1 > 0,\ \xi_j > a\xi_{j-1},\ \eta_n > 0,\ \eta_j < a^{-1}\eta_{j-1}\ (1 < j \leqq n),$$

so ist

$$\xi_1 + \ldots + \xi_n < c(a)\,\xi_n,\quad \eta_1 + \ldots + \eta_n < c(a)\,\eta_1.$$

Ist $\varepsilon > 0$, b eine natürliche Zahl, so ist die Anzahl der positiven Teiler von b kleiner als $c(\varepsilon)\,b^\varepsilon$.

Die Kettenbruchentwicklung von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ sei

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = g_0 + \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \ldots}} \quad \left(\begin{array}{l} g_v \text{ ganz für } v \geqq 0, \\ g_0 \geqq 0,\ g_v > 0 \text{ für } v > 0 \end{array}\right). \tag{4}$$

Es seien p_v, q_v $(v \geqq 0)$ die Näherungszähler und Näherungsnenner von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, also

$$\begin{array}{lll} p_0 = g_0, & p_1 = g_0 g_1 + 1, & p_{v+1} = g_{v+1} p_v + p_{v-1}\ (v > 0) \\ q_0 = 1, & q_1 = g_1, & q_{v+1} = g_{v+1} q_v + q_{v-1}\ (v > 0). \end{array} \tag{5}$$

Von den geläufigen Eigenschaften der Kettenbrüche brauchen wir nur folgende:

1. Ist $v = 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$, so ist $p_v = 0$; sonst ist immer $p_v > 0$. Bildet man den reziproken Wert von (4), so sieht man: die positiven Näherungsbrüche $\frac{p_v}{q_v}$ von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ stimmen mit den reziproken Werten der positiven Näherungsbrüche von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ überein.

2. Sind a, b ganze positive Zahlen mit

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| < \frac{1}{2b^2},$$

so gibt es ein $v \geqq 0$ mit $\frac{a}{b} = \frac{p_v}{q_v}$.

3. Für ganze $v \geqq 0$ ist

$$\{p_v, q_v\} = 1, \frac{1}{2q_v q_{v+1}} < \left|\frac{p_v}{q_v} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| < \frac{1}{q_v q_{v+1}}.$$

4. Aus (5) folgt $p_0 < p_1 \leqq p_2 < \ldots$, $q_0 \leqq q_1 < q_2 < \ldots$; $p_{v+2} \geqq 2p_v$, $q_{v+2} \geqq 2q_v$.

Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes ganze $u > 0$ ist also

$$\sum_{v \leqq u} 1 \leqq \sum_{v \leqq u} q_v^{\varepsilon} < c(\varepsilon)\, q_u^{\varepsilon}; \sum_{v \geqq u} q_v^{-\varepsilon} < c(\varepsilon)\, q_u^{-\varepsilon}.$$

Noch eine Bezeichnung: sind A, B *positive* Zahlen, die von irgendwelchen Parametern abhängen dürfen, so bedeute das Zeichen $A \sim B$ (etwas abweichend von der üblichen Bezeichnung), daß $c < \frac{A}{B} < c$. Z. B.: für $p_v > 0$ ist $p_v \sim q_v$; ausführlich: für jedes v mit $p_v > 0$ ist $c_1 < \frac{p_v}{q_v} < c_2$. Ebenso ist $g_{v+1} \sim \frac{q_{v+1}}{q_v}$.

Man setze im Folgenden[2])

$$f(Q) = \limsup_{x=\infty} \frac{\log |\mathsf{P}(x)|}{\log x}, \quad \gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \limsup_{v=\infty} \frac{\log q_{v+1}}{\log q_v}.$$

Wegen $p_v \sim q_v$ $(p_v > 0)$ ist $1 \leqq \gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma(\alpha_2, \alpha_1) \leqq \infty$.

Die bisher bekannten Sätze über $\mathsf{P}(x)$ lassen sich (in unserem Falle, d. h. für Formen (1) mit $z \geqq 4$ und mit irrationalem $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$) folgendermaßen zusammenfassen:

Erstens: Stets ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} = 0;^{3)}$$

sind aber r_1, r_2 und eine reelle Funktion $g(x)$ mit $\lim_{x=\infty} g(x) = +\infty$ beliebig vorgegeben, so gibt es eine Form (1) mit

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|\mathsf{P}(x)|}{x^{\frac{r}{2}-1}}\, g(x) = \infty.^{4)} \tag{5a}$$

---

[1]) Für einige x kann $\mathsf{P}(x) = 0$ sein; dann soll freilich $\log|\mathsf{P}(x)| = -\infty$ gesetzt werden; analog in ähnlichen Fällen.

[2]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden II, Mathem. Annalen **101** (1929), 136—146.

[3]) Im wesentlichen bei A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden III, Mathem. Zeitschr. **27** (1927), 245—268. Vgl. auch die Fußnote [6]).

Zweitens

$$f(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma(\alpha_1, \alpha_2)} \text{ [5])} \tag{6}$$

$\left(\text{wo } \frac{1}{\infty} = 0 \text{ zu setzen ist}\right)$.

Das Ziel dieser Arbeit ist, (6) wesentlich zu vertiefen. Wir betrachten *erstens* die positiven und die negativen Werte von $\mathsf{P}(x)$ gesondert und setzen dementsprechend

$$f_+(Q) = \limsup_{x=\infty} \frac{\log(\operatorname{Max}(0, \mathsf{P}(x)))}{\log x},$$

$$f_-(Q) = \limsup_{x=\infty} \frac{\log(\operatorname{Max}(0, -\mathsf{P}(x)))}{\log x},$$

so daß offenbar $f(Q) = \operatorname{Max}(f_+(Q), f_-(Q))$ und wir finden folgenden

Satz 1. $f_+(Q) = f_-(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma(\alpha_1, \alpha_2)}$

(worin (6) enthalten ist). *Zweitens*: Satz 1 verbürgt uns die Existenz einer Folge $x_1 < x_2 < \ldots$ mit $x_n \to \infty$, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $k > c(\varepsilon)$ gilt

$$\mathsf{P}(x_{2k+1}) > x_{2k+1}^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\gamma(\alpha_1,\alpha_2)}-\varepsilon}, \quad \mathsf{P}(x_{2k+2}) < -\, x_{2k+2}^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\gamma(\alpha_1,\alpha_2)}-\varepsilon};$$

wir fragen, wie dicht eine derartige Folge liegen kann.

Drittens: kennt man z. B. $f_+(Q)$, so besagt die Definition nur, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{f_+(Q)-\varepsilon}} = \infty, \quad \limsup_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{f_+(Q)+\varepsilon}} \leqq 0,$$

also ist dieses Resultat nur „bis auf x^ε" genau. Diesen Mangel werden wir für größere Werte von z beseitigen. Wir werden noch eine *vierte* Frage lösen, die ich aber lieber erst später formulieren werde.

Ist die Folge $g_0, g_1, \ldots$ beschränkt (was mit der Beschränktheit von $\frac{q_{v+1}}{q_v}$ $(v = 0, 1, \ldots)$ gleichbedeutend ist), so lautet unser Ergebnis:

Satz 2. *Die Folge $g_0, g_1, g_2, \ldots$ sei beschränkt; es sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$.*

Behauptung 1. Es ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}} = 0;$$

[5]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, The Tôhoku Mathematical Journal 30 (1929), 354—371.

für $z > 6$ ist sogar

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|\mathsf{P}(x)|}{x^{\frac{r}{2}-2}} < \infty. \tag{7}$$

Behauptung 2. Zu jedem $x > c_3(\varepsilon)$ gibt es zwei Zahlen x_1, x_2 mit

$$x - x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} < x_j < x \; (j = 1, 2), \; \mathsf{P}(x_1) > c_4 x_1^{\frac{r}{2}-2}, \; \mathsf{P}(x_2) < -c_4 x_2^{\frac{r}{2}-2}.$$

Ist $z > 10$, so gibt es zu jedem $x > c_5$ sogar zwei Zahlen x_1, x_2 mit

$$x - \frac{c_6}{x} < x_j < x \; (j = 1, 2), \; \mathsf{P}(x_1) > c_7 x_1^{\frac{r}{2}-2}, \; \mathsf{P}(x_2) < - c_7 x_2^{\frac{r}{2}-2}.$$

Behauptung 3. Ist $x_2 > x_1 > 1$,

$$\mathsf{P}(x_1) > \varepsilon x_1^{\frac{r}{2}-2}, \; \mathsf{P}(x_2) < -\varepsilon x_2^{\frac{r}{2}-2},$$

so ist

$$x_2 - x_1 > c_9 \frac{\varepsilon}{x_2}.$$

Man sieht, daß dieser Satz für $z > 10$ den *gesamten* Verlauf von $\mathsf{P}(x)$ sehr genau beschreibt: es gilt (7) und es gibt offenbar eine Folge $x_1 < x_2 < \ldots$ mit $x_n \to \infty$, so daß

$$\mathsf{P}(x_{2k+1}) > c x_{2k+1}^{\frac{r}{2}-2}, \; \mathsf{P}(x_{2k}) < - c x_{2k}^{\frac{r}{2}-2};$$

dabei kann diese Folge so dicht gewählt werden, daß $x_{n+1} - x_n < c x_{n+1}^{-1}$ und nach Behauptung 3 kann man sie nicht viel dichter wählen.

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu. Im Folgenden bezeichnet φ stets eine Funktion mit folgenden Eigenschaften: für $\zeta > 0$ ist $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}$ stetig, nicht abnehmend und $\geqq 1$.

Mit ψ bezeichnen wir stets die zu φ inverse Funktion. Mit $\zeta = \varphi(\eta)$ ist dann $\zeta^{-1}\psi(\zeta) = \varphi^{-1}(\eta) \, . \, \eta$; also ist $\zeta^{-1}\psi(\zeta)$ für $\zeta > 0$ stetig, nicht wachsend, $\leqq 1$ und > 0.

Weiter: ist $\zeta^{-1}\varphi(\zeta) \to \infty$ für $\zeta \to \infty$, so ist $\zeta^{-1}\psi(\zeta) \to 0$; sonst haben $\zeta^{-1}\varphi(\zeta)$, $\zeta^{-1}\psi(\zeta)$ positive endliche Grenzwerte für $\zeta \to \infty$. Für $A > 0$, $\zeta > 0$ ist offenbar

$$\mathrm{Min}\,(1, A)\,\psi(\zeta) \leqq \psi(A\zeta) \leqq \mathrm{Max}\,(1, A)\,\psi(\zeta). \tag{8}$$

Ich will noch bemerken, wie man zu jedem Paar α_1, α_2 eine Funktion φ mit

$$0 < \limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q)} < \infty$$

bilden kann. Man setze

$$\frac{\varphi(q_v)}{q_v} = \operatorname*{Max}_{0 \leqq u \leqq v} \frac{q_{u+1}}{q_u};$$

weiter sei $\zeta^{-1}\varphi(\zeta)$ konstant für $0 < \zeta \leqq q_0$ und linear in jedem Intervall $q_v \leqq \zeta \leqq q_{v+1}$. Offenbar hat φ die verlangten Eigenschaften und es ist $\zeta^{-1}\psi(\zeta) \to 0$ dann und nur dann, wenn die Folge $g_0, g_1, \ldots$ nicht beschränkt ist. Im Folgenden braucht aber φ *nicht* eben diese Funktion zu bedeuten.

Satz 3. *Es sei* $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, $0 < \lambda < 1$.

Behauptung 1. Es sei

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < \infty. \tag{8'}$$

Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}} \psi(x) = 0 .$$

und für $z > 6$ *sogar*

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|\mathsf{P}(x)|}{x^{\frac{r}{2}-1}} \psi(x) < \infty.$$

Behauptung 2. Es sei

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} > 0 \tag{9}$$

und man wähle ein $A > 0$, *sodaß die Ungleichung*

$$\frac{q_{V+1}}{\varphi(q_V)} > A \tag{10}$$

für unendlichviele V *gilt. Mit* I_V *bezeichne man das Intervall*

$$\left\langle \frac{\alpha_1}{3} \lambda q_{V+1}, \frac{\alpha_1}{3} q_{V+1} \right\rangle.$$

Für $x > 0$ *bezeichne man mit* K_x *das Intervall*

$$K_x = \langle x - c_{10}(\varphi, \lambda, A) \,.\, \psi(x), x \rangle. \tag{11}$$

Liegt nun K_x *ganz in einem Intervall* I_V *mit* (10) *und mit* $V > c_{11}(\varphi, \lambda, A)$, *so gibt es in* K_x *zwei Zahlen* x_1, x_2 *mit*

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(x_1) &> c_{12}(\varphi, \lambda, A)\, x_1^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(x_1), \\ \mathsf{P}(x_2) &< -c_{12}(\varphi, \lambda, A)\, x_2^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(x_2).^{8)} \end{aligned} \tag{12}$$

---

[8]) Ist $x^{-1}\psi(x) \to 0$ für $x \to \infty$, so gibt es zu jedem hinreichend großen V Intervalle K_x, die in I_V liegen, z. B. für $x = \frac{1}{3}\alpha_1 q_{V+1}$, so daß

Behauptung 3. Es sei

$$0 < \limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < \infty \tag{13}$$

und man wähle ein $A > 0$, *sodaß* (10) *für unendlichviele* V *gilt. Dann gilt das in Behauptung 2 gesagte sogar auch dann, wenn* $c_{11}(\varphi, \lambda, A)$ *durch* $c_{13}(\varphi, \lambda, A, \varepsilon)$ *und* (11) *durch*

$$K_x = \langle x - (\psi(x))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, x\rangle \tag{14}$$

ersetzt wird.[7]) *Ist neben* (13) *auch noch* $z > 10$, *so gilt das in Behauptung 2 gesagte sogar auch dann, wenn* (11) *durch*

$$K_x = \langle x - c_{14}(\varphi, \lambda, A) \frac{1}{\psi(x)}, x\rangle \tag{15}$$

ersetzt wird.

Behauptung 4. Ist $\varepsilon > 0$, $x_2 > x_1 > 1$,

$$\mathsf{P}(x_1) > \varepsilon x_1^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(x_1), \quad \mathsf{P}(x_2) < -\varepsilon x_2^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(x_2),$$

so ist

$$x_2 - x_1 > c_{16} \frac{\varepsilon}{\psi(x_2)}.$$

Die Beh. 4 zeigt wieder, daß man K_x in (15) nicht wesentlich verkürzen kann. Ist z. B. $z > 10$ und gilt (13), so gibt uns Satz 3 eine ebenso genaue Auskunft über den Verlauf von $\mathsf{P}(x)$ wie

---

die Existenz beliebig großer Zahlen x_1, x_2 mit (12) gesichert ist. Sind die g_v nicht beschränkt, so kann man, wie wir eben gelernt haben, ein solches ψ finden. Sind aber die g_v beschränkt, so kann man Satz 2 anwenden. Weiter beachte man: r_1, r_2 und ein reelles $g(x)$ mit $g(x) \to +\infty$ seien gegeben. Man kann offenbar α_1, α_2 so wählen, daß die vor dem Satz 3 konstruierte Funktion φ (für welche (9) gilt) so schnell wächst, daß $\lim_{x=\infty} \frac{g(x)}{\psi(x)} = +\infty$ (denn wächst φ schnell, so wächst ψ langsam); dann gilt also (5a), ja sogar

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} g(x) = +\infty, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} g(x) = -\infty.$$

[7]) „Sogar": denn je kürzer K_x, desto schärfer die Behauptung. Im Beweis des Satzes 3 werden wir statt (14) eigentlich

$$K_x = \langle x - c_{33}(\varphi, \lambda, A; \varepsilon)(\psi(x))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, x\rangle,$$

bekommen. Wendet man dies aber mit $\frac{1}{2}\varepsilon$ statt ε an und beachtet man, daß $\psi^{\frac{1}{2}\varepsilon}(x) > c_{33}(\varphi, \lambda, A, \frac{1}{2}\varepsilon)$ für große x, so sieht man, daß die Behauptung auch mit dem Intervall (14) stimmt.

Satz 2, aber mit einem wesentlichen Unterschied: die Beh. 3 (und ebenso 2) bezieht sich nur auf solche (hinreichend große) x, *für welche K_x in einem I_V mit* (10) *liegt*, so daß Satz 3 nicht den *gesamten* Verlauf von $\mathsf{P}(x)$ beschreibt.[8]) Ohne diese Einschränkung auf die Intervalle I_V wäre übrigens, wie wir bald zeigen werden, der Satz 3 falsch; wir werden nämlich zeigen, daß die Funktion $\mathsf{P}(x)$ in „sehr langen“ Intervallen von wesentlich niedrigerer Größenordnung als $x^{\frac{r}{2}-1}\psi^{-1}(x)$ sein kann.

Wir wollen darum noch einen weiteren Satz beweisen (Satz 4), welcher den *gesamten* Verlauf von $\mathsf{P}(x)$ beschreibt. Zu diesem Zweck wollen wir erstens den *Hauptsatz 2* aus I anführen: es sei $0 \leqq \mu < 1$ und man definiere $G(x)$ durch

$$G(x) > 0,\ G^2(x) = \sum_{v,m,n} \frac{1}{q_v{}^2\, m^{r_2-2}\, n^{r_1-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{mnq_v+1}{x}\right)^2\right); \tag{18}$$

dabei läuft die Summe über alle Systeme v, m, n mit $p_v > 0$, m/p_v, n/q_v.

Dann ist für $z \geqq 6$

$$c_{17}(\mu)\, x^{r-1}\, G^2(x) < \int_{\mu x}^{x} \mathsf{P}^2(y)\, \mathrm{d}y < c_{18}\, x^{r-1}\, G^2(x), \tag{19}$$

wenn $x > c_{19}(\mu)$.

Nun lautet der

Satz 4. *Es sei* $0 \leqq \mu < 1,\ \varepsilon > 0$. *Dann ist*

$$|\, \mathsf{P}(x)\, | < c_{20}(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\, G(x) \text{ für } x > c_{21}(\varepsilon). \tag{20}$$

Ist $z \geqq 6$, $x > c_{22}(\mu, \varepsilon)$, *so gibt es zwei Zahlen* x_1, x_2 *mit* $\mu x \leqq$

[8]) Ist $z > 10$ und gilt (13), so kann man das Ergebnis des Satzes 3 (wenn man d statt $c(\varphi, \lambda, A)$ schreibt) ungefähr folgendermaßen aussprechen: ist $x > d$, so ist erstens $|\,\mathsf{P}(x)\,| < dx^{\frac{r}{2}-1}\psi^{-1}(x)$; zweitens gibt es beliebig große Werte x, y, für welche

$$\mathsf{P}(x) > dx^{\frac{r}{2}-1}\psi^{-1}(x), \quad (16) \qquad \mathsf{P}(y) < -dy^{\frac{r}{2}-1}\psi^{-1}(y) \quad (17)$$

ist; und zwar wechseln diese Werte x, y so schnell, daß nach jedem x mit (16) im Abstand $< d\psi^{-1}(x)$ ein y mit (17) und nach jedem y mit (17) im Abstand $< d\psi^{-1}(y)$ ein x mit (16) folgt — *solange wir innerhalb der im Satz 3 beschriebenen Intervalle I_V bleiben*; und viel schneller können die x, y mit (16), (17) nicht wechseln. Sind die g_v beschränkt, so gilt (13) mit $\varphi(\xi) = \psi(\xi) = \xi$ und man findet das Resultat des Satzes 2 wieder, mit dem Unterschied, daß im Satz 2 keine Einschränkung auf die I_V notwendig ist (warum dies nicht notwendig ist, werden wir im Beweis des Satzes 2 erkennen).

$\leqq x_1 \leqq x$, $\mu x \leqq x_2 \leqq x$, *sodaß*

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(x_1) &> x_1^{\frac{r}{2}-1-\varepsilon}\, G(x_1), \\ \mathsf{P}(x_2) &< -\, x_2^{\frac{r}{2}-1-\varepsilon}\, G(x_2). \end{aligned} \tag{21}$$

Satz 4 beschreibt also für $z \geqq 6$ tatsächlich den *gesamten* Verlauf von $\mathsf{P}(x)$, da x keiner Bedingung (außer „x hinreichend groß") unterworfen ist. Sonst ist aber dieser Satz schwächer als Satz 3; denn erstens ist er nur „bis auf x^{ε}" genau. Zweitens verbürgt er uns die Existenz der Zahlen x_1, x_2 mit (21) nur in Intervallen der Gestalt $\langle x - \eta x, x\rangle$, wo $\eta = 1 - \mu$ eine beliebig kleine positive *Konstante* ist, während die Intervalle K_x aus der Behauptung 3 des Satzes 3 wesentlich kürzer sind.

Die verhältnismäßig einfache Gestalt von $G(x)$ erlaubt uns, verschiedene Schlüsse über ihren Verlauf zu beweisen; da ich aber in I in den Sätzen 1 bis 16 den Verlauf von $G(x)$ (oder vielmehr von $F(x) = x^{r-1} G^2(x)$) ausführlich diskutiert habe, brauche ich jetzt kein Wort darüber zu verlieren.

Nur möchte ich mit Hilfe des Satzes 4 die Bemerkung rechtfertigen, die ich über die Einschränkung des Anwendungsgebietes der Behauptungen 2, 3 des Satzes 3 auf die Intervalle I_V gemacht habe. Es sei $z > 10$ und man wähle α_1, α_2 so, daß

$$\lim_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{q_v^{10}} = 1$$

ist (das geht, wenn man die g_v sukzessive geeignet wählt). Dann gilt (13) mit $\varphi(\zeta) = \zeta^{10}$, $\psi(\zeta) = \zeta^{\frac{1}{10}}$. Für $w = 1, 2, \ldots$ sei L_w das Intervall $\langle q_w^2, q_w^3\rangle$. Liegt x in L_w, so bekommt man durch primitivste Abschätzungen (man beachte, daß in (18) stets $n \leqq q_v$, $m \leqq p_v$, $p_v \sim q_v$ war):

$$\sum_{\substack{v \geqq w\\ m,n}} q_v^{-2}\, m^{-r_2+2}\, n^{-r_1+2} < c \sum_{v \geqq w} q_v^{-2} < c\, q_w^{-2} < c\, x^{-\frac{2}{3}};$$

$$\sum_{\substack{v<w\\ m,n}} \frac{1}{q_v^2\, m^{r_2-2}\, n^{r_1-2}} \left(\frac{q_{v+1}\, mn}{x}\right)^z \leqq \sum_{\substack{v<w\\ m,n}} m^2 n^2 \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^z <$$

$$< c \sum_{v<w} \frac{q_{v+1}^{z+6}}{x^z} < c\,\frac{q_w^{z+6}}{x^z} < c\, x^{-\frac{z-6}{2}} < c\, x^{-\frac{2}{3}},$$

also $G^2(x) < cx^{-\frac{2}{3}}$. Ist also $\varepsilon > 0$, $w > c(\varepsilon)$, so ist nach (20) $|\,\mathsf{P}(x)\,| < c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{3}+\varepsilon}$, wenn x in L_w liegt. In den „sehr langen"

Intervallen L_w ist also $| \mathsf{P}(x) |$ wesentlich kleiner als $x^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(x) = x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{10}}$.

Zum Schluß führen wir noch folgenden Satz an:

Satz 5. *Ist die Folge $g_0, g_1, \ldots$ nicht beschränkt, so ist*

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{\frac{r}{2}-2}} = +\infty, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{\frac{r}{2}-2}} = -\infty.$$

Ist aber $z > 6$ und die Folge $g_0, g_1, \ldots$ beschränkt, so ist

$$-\infty < \liminf_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{\frac{r}{2}-2}} < 0 < \limsup_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}(x)}{x^{\frac{r}{2}-2}} < \infty.$$

§ 2. Beweise.

Im Folgenden sei stets $x > 1$. Für $\Re s > 0$ sei

$$\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}.$$

Hilfssatz 1. *Ist $a > 0$, $X > 0$, so ist bei geradlinigem Integrationswege*

$$\int_0^X A(y)\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Theta^{r_1}(\alpha_1 s)\, \Theta^{r_2}(\alpha_2 s)\, e^{Xs} \frac{ds}{s^2}; \tag{22}$$

$$\int_0^X \mathsf{P}(y)\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} T(s)\, e^{Xs} \frac{ds}{s^2}, \tag{23}$$

wo hier und im Folgenden stets

$$T(s) = \Theta^{r_1}(\alpha_1 s)\, \Theta^{r_2}(\alpha_2 s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1} \alpha_2^{\frac{1}{2}r_2} s^{\frac{r}{2}}}. \tag{24}$$

Beweis. Bekanntlich ist für $a > 0$, $\delta > 0$ und reelles τ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\tau s} \frac{ds}{s^2} = \operatorname{Max}(0, \tau), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{s} \frac{ds}{s^\delta} = \frac{1}{\Gamma(\delta)}. \tag{25}$$

Es seien $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ diejenigen Werte, die $Q(u)$ für ganze $u_1, \ldots, u_r$ annimmt; R_m sei die Anzahl der ganzzahligen Systeme $u_1, \ldots, u_r$ mit $Q(u) = \lambda_m$. Integriert man gliedweise (was offenbar erlaubt ist), so bekommt man

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\Theta^{r_2}(\alpha_2 s)\,e^{Xs}\frac{ds}{s^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}R_m\,e^{(X-\lambda_m)s}\frac{ds}{s^2}=$$

$$=\sum_{\lambda_m\leqq X}(X-\lambda_m)\,R_m=\int\limits_0^X A(y)\,dy;$$

das ist (22). Daraus folgt aber (23), denn nach (25) ist

$$\int\limits_0^X V_Q(y)\,dy=\frac{\pi^{\frac{r}{2}}X^{\frac{r}{2}+1}}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1}\alpha_2^{\frac{1}{2}r_2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1}\alpha_2^{\frac{1}{2}r_2}}\int\limits_{a-i\infty}^{ai+\infty}e^{Xs}\frac{ds}{s^{\frac{r}{2}+2}}.$$

Auf die reelle Achse lege man nun alle zur Zahl $\sqrt{x}$ gehörigen Fareypunkte, d. h. alle Brüche $\frac{h}{k}$ mit $h \gtreqless 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}, \{h, k\} = 1$. Es sei $\frac{h}{k}$ ein Fareypunkt, $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}\left(\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2}\right)$ die beiden ihm benachbarten Fareypunkte,[9]) sodaß also zwischen $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ kein Fareypunkt außer $\frac{h}{k}$ liegt. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(h, k)$ das abgeschlosene Intervall $\left\langle\frac{h+h_1}{k+k_1}, \frac{h+h_2}{k+k_2}\right\rangle$. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}(h,k)=\left\langle\frac{h}{k}-\frac{\vartheta_1}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k}+\frac{\vartheta_2}{k\sqrt{x}}\right\rangle,\ \frac{1}{2}\leqq\vartheta_1\leqq 1,\ \frac{1}{2}\leqq\vartheta_2\leqq 1. \tag{26}$$

Insbesondere ist $\mathfrak{B}(0, 1) = \left\langle-\frac{1}{[\sqrt{x}]+1}, \frac{1}{[\sqrt{x}]+1}\right\rangle$. Ist γ reell und $\mathfrak{M}$ eine Menge reeller Zahlen, so bezeichne $\gamma\mathfrak{M}$ die Menge aller Zahlen $\gamma\xi$ mit $\xi \in \mathfrak{M}$. Mit $\mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2)$ (oder kürzer mit $\mathfrak{C}$, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist) bezeichnen wir den Durchschnitt der beiden Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}(h_1, k_1)$,

---

[9]) Diese drei Brüche sind in reduzierter Form und mit positivem Nenner gedacht.

$\frac{2\pi}{\alpha_2}\mathfrak{B}(h_2, k_2)$. Weiter sei

$$\varrho = \frac{1}{[\sqrt{x}]+1}\,\mathrm{Max}\left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}\right). \tag{27}$$

Offenbar ist die Vereinigungsmenge aller Mengen $\mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2)$ mit

$$h_j > 0,\ 0 < k_j \leqq \sqrt{x},\ \{h_j, k_j\} = 1\ (j = 1, 2),\ \mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2) \neq \emptyset \tag{28}$$

gleich dem Intervall $\langle\varrho, +\infty)$ und je zwei Mengen $\mathfrak{C}$ haben höchstens einen gemeinsamen Punkt. Noch eine Abkürzung: sind h_1, k_1, h_2, k_2 gegeben, so sei $\beta_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}$, $\beta_2 = \frac{2\pi}{\alpha_2}\frac{h_2}{k_2}$.

Hilfssatz 2. *Für* $\Re s > 0$ *ist*

$$\Theta(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2}{s}\right).$$

Beweis: Vgl. z. B. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen (1903), S. 108.

Im Folgenden werden wir Hilfssatz 1 stets mit $a = \frac{1}{x}$ benutzen; dementsprechend wird im Folgenden stets $s = \frac{1}{x} + ti$ (t reell) gesetzt; statt ds schreiben wir i dt und integrieren nach t, sodaß der Integrationsweg $(a - i\infty, a + i\infty)$ in $(-\infty, +\infty)$ übergeht.

Hilfssatz 3. *Gilt* (28), *so ist für* $x > c$, $t \in \mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2)$

$$t \sim |s| \sim \frac{h_1}{k_1} \sim \frac{h_2}{k_2}, \tag{29}$$

$$|T(s)| < \frac{c x^{\frac{r}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1} k_2^{\frac{1}{2}r_2}(1 + x\,|t - \beta_1|)^{\frac{1}{2}r_1}(1 + x\,|t - \beta_2|)^{\frac{1}{2}r_2}}. \tag{30}$$

Beweis.[10] Wird die rechte Seite von (30) mit Z bezeichnet, so findet man (29) und $|\Theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\Theta^{r_2}(\alpha_2 s)| < Z$ z. B. in meiner Abhandlung „Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre III", Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 602 unten und S. 603 oben. Weiter ist nach (26), (29) für $j = 1, 2$

[10]) Einen ausführlichen Beweis findet man in I, Hilfssatz 11.

$$x^{-1}k_j(1+x\,|\,t-\beta_j\,|) < ck_j x^{-1}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{k_j}\right) < cx^{-\frac{1}{2}} < ck_j^{-1} < c\,|\,s\,|;$$

wegen (24) ist also auch (30) wahr.

Hilfssatz 4. *Ist $m \geqq n > 1$, μ reell, ν reell, $\mu \neq \nu$, so ist*

$$I(m,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+x\,|\,t-\mu\,|)^m} < \frac{c(m)}{x}, \tag{31}$$

$$I(m,n,\mu,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+x\,|\,t-\mu\,|)^m\,(1+x\,|\,t-\nu\,|)^n} < \tag{32}$$

$$< \frac{c(m,n)}{x}\,\mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{(x\,|\,\mu-\nu\,|)^n}\right).$$

Beweis.

$$I(m,n,\mu,\nu) \leqq I(m,\mu) = \frac{1}{x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+|\,u\,|)^m} = \frac{c(m)}{x}.$$

Ist $x\,|\,\mu-\nu\,| > 1$, so beachte man, daß für jedes t entweder $|\,t-\mu\,| \geqq \frac{1}{2}\,|\,\mu-\nu\,|$ oder $|\,t-\nu\,| \geqq \frac{1}{2}\,|\,\mu-\nu\,|$; also

$$I(m,n,\mu,\nu) \leqq \frac{c(n)}{(x\,|\,\mu-\nu\,|)^n}\,I(m,\mu) + \frac{c(m)}{(x\,|\,\mu-\nu\,|)^m}\,I(n,\nu).$$

Wegen (31) folgt daraus (32).

Hilfssatz 5. *Für $\frac{1}{x} \leqq \xi < 1$, $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq x$ ist*

$$|\,\mathsf{P}(x)\,| < c\,(x^{\frac{r}{2}-1}\xi + \mathfrak{S}), \tag{33}$$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \mathsf{P}(y)\,dy\right| < c\,(x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} + \mathfrak{T}), \tag{34}$$

wo

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(x,\xi) = \sum \frac{k_2}{h_2}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1}\,k_2^{\frac{1}{2}r_2}}\,\mathrm{Min}\left(1, \frac{k_2}{\xi h_2}\right)\mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{(|\,\beta_2-\beta_1\,|\,x)^{\frac{z}{2}}}\right), \tag{35}$$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(x) = \sum \frac{k_2^2}{h_2^2}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1}\,k_2^{\frac{1}{2}r_2}}\,\mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{(|\,\beta_2-\beta_1\,|\,x)^{\frac{z}{2}}}\right); \tag{36}$$

dabei wird über alle h_1, k_1, h_2, k_2 mit (28) summiert.

Beweis. Es ist stets $| e^{\pm \xi s} - 1 | < c$ und für $| \xi s | \leqq 1$ folgt aus der zugehörigen Potenzreihe $| e^{\pm \xi s} - 1 | \leqq c\, | \xi s |$; also ist stets

$$| e^{\pm \xi s} - 1 | \leqq c \operatorname{Min} (1, | \xi s |). \tag{37}$$

Weiter ist nach (27) $\varrho < c x^{-\frac{1}{2}}$, $| e^{Xs} | \leqq e$ für $0 \leqq X \leqq x$. Es ist $A(x)$ eine nicht abnehmende Funktion, also

$$-\frac{1}{\xi}\int_{x}^{x-\xi} A(y)\,\mathrm{d}y \leqq A(x) \leqq \frac{1}{\xi}\int_{x}^{x+\xi} A(y)\,\mathrm{d}y. \tag{37'}$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$\begin{aligned}\pm\frac{1}{\xi}\int_{x}^{x\pm\xi} A(y)\,\mathrm{d}y &= \pm\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\Theta^{r_2}(\alpha_2 s)\,e^{xs}\,(e^{\pm\xi s}-1)\frac{\mathrm{d}t}{s^2} = \\ &= \pm\frac{1}{\xi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(T(s)+\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1}\,\alpha_2^{\frac{1}{2}r_2}\,s^{\frac{r}{2}}}\right)e^{xs}\,(e^{\pm\xi s}-1)\frac{\mathrm{d}t}{s^2};\end{aligned} \tag{38}$$

$$\frac{1}{\xi\,.\,2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi^{\frac{r}{2}}\,e^{xs}\,(e^{\pm\xi s}-1)}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1}\,\alpha_2^{\frac{1}{2}r_2}\,s^{\frac{r}{2}+2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}\left((x\pm\xi)^{\frac{r}{2}+1}-x^{\frac{r}{2}+1}\right)}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1}\,\alpha_2^{\frac{1}{2}r_2}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)\xi}, \tag{39}$$

$$\left|\frac{(x\pm\xi)^{\frac{r}{2}+1}-x^{\frac{r}{2}+1}}{\xi\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)} \mp \frac{x^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right| < c x^{\frac{r}{2}-1}\,\xi. \tag{40}$$

Nach (38), (39), (40) ist also

$$\left|\pm\frac{1}{\xi}\int_{x}^{x\pm\xi}A(y)\,\mathrm{d}y - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}\,x^{\frac{r}{2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1}\,\alpha_2^{\frac{1}{2}r_2}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right| < c x^{\frac{r}{2}-1}\,\xi +$$

$$+\frac{c}{\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{T(s)}{s^2}\,(e^{\pm\xi s}-1)\right|\mathrm{d}t,$$

also umsomehr nach (37')

$$| \mathsf{P}(x) | = \left| A(x) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1} \alpha_2^{\frac{1}{2}r_2} \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \right| < c x^{\frac{r}{2}-1} \xi + \tag{41}$$
$$+ \frac{c}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{T(s)}{s^2} (e^{\pm \xi s} - 1) \right| dt.$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \mathsf{P}(y)\, dy \right| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{T(s)}{s^2} (e^{x_2 s} - e^{x_1 s}) \right| dt. \tag{42}$$

Ist $|t| < \varrho$, so ist wegen $\varrho < c x^{-\frac{1}{2}}$

$$\Re \frac{1}{s} = \frac{x}{1 + x^2 t^2} \sim \frac{x}{(1 + x\,|t|)^2} > \frac{cx}{(1 + \sqrt{x})^2} > c;$$

wird also für einen Augenblick $\delta_j = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}$, $\Delta_j = \Theta(\alpha_j s) - \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}$ gesetzt ($j = 1, 2$), so ist nach Hilfssatz 2 für $|t| < \varrho$

$$| \delta_j | = c \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \right| < c \sqrt{\frac{x}{1 + x\,|t|}} = c x^{\frac{1}{4}} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1 + x\,|t|}}; \tag{42'}$$

$$| \Delta_j | = \left| 2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(- \frac{\pi^2 m^2}{\alpha_j s}\right) \right| < \frac{c}{|\sqrt{s}|} \exp\left(- \frac{cx}{(1 + x\,|t|)^2}\right). \tag{42''}$$

Es ist $T(s) = (\Delta_1 + \delta_1)^{r_1} (\Delta_2 + \delta_2)^{r_2} - \delta_1^{r_1} \delta_2^{r_2}$; führt man dies aus, so erscheint $T(s)$ als eine Summe von Produkten, wobei jedes Produkt aus einem Faktor Δ_j und $r - 1$ Faktoren Δ und δ besteht. Nach (42'), (42'') ist also für $|t| < \varrho$ und $\nu = 1, 2$

$$\left| \frac{T(s)}{s^\nu} \right| < c x^{\frac{r}{4} + \frac{\nu}{2}} \left(\frac{x}{(1 + x\,|t|)^2} \right)^{\frac{r}{4} + \frac{\nu}{2}} \exp\left(\frac{-cx}{(1 + x\,|t|)^2} \right) < c x^{\frac{r}{4} + \frac{\nu}{2}},$$

da $\lambda^{\frac{r}{4} + \frac{\nu}{2}} e^{-c\lambda} < c$ für $0 < \lambda < \infty$.

Also ist (wegen $\varrho < c x^{-\frac{1}{2}}$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varrho}^{\varrho} \left| \frac{T(s)}{s^2} (e^{x_2 s} - e^{x_1 s}) \right| dt < c x^{\frac{r}{4}+1} \varrho < c x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}, \tag{43}$$

$$\frac{1}{\xi}\int_{-\varrho}^{\varrho}\left|\frac{T(s)}{s^2}(e^{\pm\xi s}-1)\right|dt < c\int_{-\varrho}^{\varrho}\left|\frac{T(s)}{s}\right|dt < cx^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}\varrho < cx^{\frac{r}{4}} < cx^{\frac{r}{2}-1}\xi. \tag{44}$$

Bei den Integranden, die rechts in (41), (42) auftreten, ist offenbar $\int\limits_{\varrho}^{\infty} = \int\limits_{-\infty}^{-\varrho}$. Drückt man das Intervall $\langle\varrho, +\infty)$ als Vereinigungsmenge der $\mathfrak{C}$ dar, ersetzt man dann für $t \in \mathfrak{C}$ nach (29), (37)

$$\frac{1}{s^2}\ \text{durch}\ \frac{k_2^2}{h_2^2},\quad \frac{e^{\pm\xi s}-1}{\xi s^2}\ \text{durch}\ \frac{k_2}{h_2}\ \mathrm{Min}\left(1, \frac{k_2}{\xi h_2}\right),$$

schätzt man dann $T(s)$ nach (30) ab und wendet endlich auf die so auftretenden Integrale (32) an, so bekommt man sofort (wegen $\mathrm{Min}\,(r_1, r_2) = z$)

$$\frac{1}{\xi}\int_{\varrho}^{\infty}\left|\frac{T(s)}{s^2}(e^{\pm\xi s}-1)\right|dt < c\,\mathfrak{S},\quad \int_{\varrho}^{\infty}\left|\frac{T(s)}{s^2}(e^{x_2 s}-e^{x_1 s})\right|dt < c\,\mathfrak{T}. \tag{45}$$

Aus (41), (42), (43), (44), (45) folgt aber die Behauptung.

Wir teilen nun die Systeme

$$h_1, k_1, h_2, k_2 \tag{46}$$

mit (28) in zwei Klassen ein; gibt es ein v mit

$$\frac{h_1 k_2}{h_2 k_1} = \frac{p_v}{q_v}, \tag{47}$$

so heiße das System (46) singulär, sonst regulär. Man beachte folgende Symmetrieeigenschaft: vertauscht man h_1, k_1, α_1 mit h_2, k_2, α_2, so vertauschen sich die p_v mit den q_v, sodaß sich die Bedingung (47) nicht ändert. Man setze nun

$$\mathfrak{S}(x, \xi) = \mathfrak{S}_1(x, \xi) + \mathfrak{S}_2(x, \xi), \tag{48}$$

$$\mathfrak{T}(x) = \mathfrak{T}_1(x) + \mathfrak{T}_2(x), \tag{49}$$

wo in $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1$ über die regulären, in $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2$ über die singulären Systeme summiert wird.

Hilfssatz 6. *Ist* $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{x} \leqq \xi < 1$, *so ist*

$$\mathfrak{S}_1(x, \xi) < c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon},\quad \mathfrak{T}_1(x) < c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}+\varepsilon} \tag{50}$$

für $z \geqq 4$; *für* $z > 6$ *ist sogar*

$$\mathfrak{S}_1(x, \xi) < cx^{\frac{r}{2}-2} \tag{51}$$

und für $z > 10$ *ist*

$$\mathfrak{T}_1(x) < cx^{\frac{r}{2}-3}. \tag{52}$$

Beweis. Beachtet man, daß r_1, r_2 nur durch die symmetrische Bedingung $z \geqq 4$, bzw. $z > 6$, $z > 10$ eingeschränkt sind, daß $\frac{h_1}{k_1} \sim \frac{h_2}{k_2}$ ist und beachtet man noch die Symmetrie der Bedingung (47), so sieht man, daß es genügt, diejenigen Teilsummen von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$ abzuschätzen, für welche $k_2 \leqq k_1$ ist; diese Teilsummen mögen mit S_1, T_1 bezeichnet werden.

Jedem regulären System (46) mit (28) und $k_2 \leqq k_1$ läßt sich genau ein System von ganzen Zahlen m_1, m_2, l, n folgendermaßen zuordnen (wir werden dann sagen, daß das System „zur Klasse (m_1, m_2, l, n) gehört“):

$$2^{m_2} \leqq k_2 < 2^{m_2+1};\ 2^{m_1} \leqq k_1 < 2^{m_1+1};\ 2^l \leqq h_2 < 2^{l+1}. \tag{53}$$

Endlich: wegen $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ und (26) ist

$$|\beta_1 - \beta_2| = \left|\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_2}\frac{h_2}{k_2}\right| \leqq \frac{2\pi}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\alpha_1 k_1} + \frac{1}{\alpha_2 k_2}\right) < \frac{c_{24}}{2^{m_2}\sqrt{x}} \tag{54}$$

wobei $c_{24} > 1$ gewählt sei. Es sei nun n die größte ganze Zahl, für welche

$$2^{n+m_2} < c_{24}\sqrt{x},\ |\beta_1 - \beta_2| < \frac{c_{24}}{2^{n+m_2}\sqrt{x}} \tag{55}$$

ist. Wegen $2^{m_2} \leqq k_2 \leqq \sqrt{x}$, $c_{24} > 1$ und (54) ist $n \geqq 0$. Es ist also

$$1 \leqq 2^{m_2} \leqq 2^{m_1} \leqq \sqrt{x},\ l \geqq 0,\ n \geqq 0,\ 2^{n+m_2} < c_{24}\sqrt{x}. \tag{56}$$

Ich behaupte nun *erstens*: gehört ein reguläres System mit (28) und mit $k_2 \leqq k_1$ zur Klasse (m_1, m_2, l, n), so ist

$$\operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{|\beta_2 - \beta_1|\, x}\right) \sim \frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}. \tag{56'}$$

Denn: ist $2^{n+m_2+1} \geqq c_{24}\sqrt{x}$, so ist nach (55)

$$2^{n+m_2} \sim \sqrt{x},\ |\beta_1 - \beta_2| < \frac{c}{x},$$

also

$$\operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{|\beta_2 - \beta_1|\, x}\right) \sim 1 \sim \frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}.$$

Ist aber $2^{n+m_2+1} < c_{24}\sqrt{x}$, so ist nach der Definition von n

$$|\beta_1 - \beta_2| \geqq \frac{c_{24}}{2^{n+m_2+1}\sqrt{x}}, \text{ also (wegen (55))}$$

$$|\beta_1 - \beta_2| \sim \frac{1}{2^{n+m_2}\sqrt{x}} > \frac{c}{x},$$

woraus wieder (56') folgt.

Zweitens: es sei $U(m_1, m_2, l, n)$ die Anzahl der regulären Systeme (46) mit (28) und $k_2 \leqq k_1$, die zur Klasse (m_1, m_2, l, n) gehören; dann behaupte ich:

A. Ist $\eta > 0$, so ist

$$U(m_1, m_2, l, n) < \frac{2^{2m_1+l}}{2^n\sqrt{x}} \operatorname{Min} (c2^{m_1+m_2}, c(\eta)\, 2^{\eta(m_1+l)}). \tag{57}$$

B. Es ist

$$U(m_1, m_2, l, n) = 0 \text{ für } \frac{1}{2^l} > c\,\frac{2^{2m_1-n}}{\sqrt{x}}. \tag{58}$$

Beweis: Ist (46) ein reguläres System mit (28) und $k_2 \leqq k_1$, welches zur Klasse (m_1, m_2, l, n) gehört, so gibt es genau zwei ganze Zahlen a, b mit

$$\frac{h_1 k_2}{h_2 k_1} = \frac{a}{b}. \tag{59}$$

$$a > 0, b > 0, \{a, b\} = 1 \tag{60}$$

und genau eine ganze Zahl g mit

$$2^g \leqq b < 2^{g+1}; \tag{61}$$

wegen $b \leqq h_2 k_1 < 2^{l+m_1+2}$ ist

$$0 \leqq g \leqq l + m_1 + 1. \tag{62}$$

Aus der Regularität und aus (61), (55), (53) folgt

$$\frac{1}{2^{2g+3}} < \frac{1}{2b^2} \leqq \left|\frac{a}{b} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| = \left|\frac{h_1 k_2}{h_2 k_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| < c\,\frac{k_2}{h_2}\,|\beta_1 - \beta_2| < \frac{c_{25}}{2^{l+n}\sqrt{x}};$$

also (wegen (62))

$$c\, 2^{l+n}\sqrt{x} < 2^{2g} \leqq 2^{2l+2m_1+2}; \tag{63}$$

daraus folgt schon **B**. Weiter: es sei ein ganzes g mit (63) gegeben; die Anzahl der Paare a, b mit (60), (61) und

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| < \frac{c_{25}}{2^{l+n}\sqrt{x}}$$

ist kleiner als

$$\frac{c2^{2g}}{2^{l+n}\sqrt{x}} + 1 < \frac{c2^{2g}}{2^{l+n}\sqrt{x}};$$

denn alle diese Zahlen $\frac{a}{b}$ liegen in einem Intervall der Länge $\frac{2c_{25}}{2^{l+n}\sqrt{x}}$ und der Abstand je zweier solchen Zahlen $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ ist mindestens $\frac{1}{bb'} > \frac{1}{2^{2g+2}}$. Bei gegebenen a, b mit (60), (61) ist aber die Anzahl der Systeme (46) mit (28), (53), (59) höchstens gleich

$$2^{m_1+l-g}\,\mathrm{Min}\,(c2^{m_1+m_2},\ c(\eta)\cdot 2^{\eta(m_1+l)});$$

denn es muß $h_1k_2 = da$, $h_2k_1 = db$ mit ganzem d, $0 < d < 2^{m_1+l+2-g}$ sein; ist aber h_1k_2 und h_2k_1 gegeben, so haben k_1, k_2 nach (53) höchstens 2^{m_1} bzw. 2^{m_2} Möglichkeiten; ebenso hat k_1 als Teiler von $h_2k_1 < 2^{l+m_1+2}$ und k_2 als Teiler von $h_1k_2 \sim h_2k_1$ höchstens $c(\eta)\,2^{\frac{1}{2}\eta(m_1+l)}$ Möglichkeiten. Daher ist

$$U(m_1, m_2, l, n) < \sum_{g \leqq m_1+l+1} \frac{2^{2g}}{2^{n+l}\sqrt{x}} \cdot 2^{m_1+l-g}\,\mathrm{Min}\,(c2^{m_1+m_2},\ c(\eta)\ 2^{\eta(m_1+l)});$$

wegen $\sum\limits_{g} 2^g < c2^{m_1+l}$ ist damit auch **A** bewiesen.

Nach (35), (36), (56′), **A**, **B** ist nun für $0 < \eta < \frac{1}{2}$

$$S_1 < \sum \frac{2^{m_2}\, x^{\frac{r}{2}-1}}{2^{l+\frac{1}{2}r_1m_1+\frac{1}{2}r_2m_2}} \left(\frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{z}{2}} \mathrm{Min}\left(1, \frac{2^{m_2}}{\xi 2^l}\right) \cdot \frac{2^{2m_1+l}}{2^n\sqrt{x}} \times$$

$$\times\ \mathrm{Min}\,(c2^{m_1+m_2},\ c(\eta)\ 2^{\eta(m_1+l)}); \quad (64)$$

$$T_1 < \sum \frac{2^{2m_2}\, x^{\frac{r}{2}-1}}{2^{2l+\frac{1}{2}r_1m_1+\frac{1}{2}r_2m_2}} \left(\frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{z}{2}} \frac{2^{2m_1+l}}{2^n\sqrt{x}}\,\mathrm{Min}\,(c2^{m_1+m_2},\ c(\eta)\ 2^{\eta(m_1+l)}); \quad (65)$$

für den Summationsbereich darf man entweder (56) oder — wegen **B** — auch den Bereich

$$1 \leqq 2^{m_2} \leqq 2^{m_1} \leqq \sqrt{x},\ n \geqq 0,\ 2^{n+m_2} < c\sqrt{x},\ \frac{1}{2^l} < c\,\frac{2^{2m_1-n}}{\sqrt{x}} \quad (66)$$

benutzen. Man beachte, daß $\left(\text{wegen } \frac{1}{\xi} \leqq x\right)$

$$\mathrm{Min}\left(1, \frac{2^{m_2}}{\xi 2^l}\right) \leqq \left(\frac{x2^{m_2}}{2^l}\right)^{2\eta}. \quad (67)$$

Nun benutze man aus dem letzten „Min“ in (64), (65) das Glied

$c(\eta)\, 2^{\eta(m_1+l)}$ und den Summationsbereich (56); es ist

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l\eta}} < c(\eta); \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(1-\eta)l}} < c(\eta);$$

$$\sum_{n} 2^{n\left(\frac{z}{2}-1\right)} < c x^{\frac{z}{4}-\frac{1}{2}} 2^{-m_2\left(\frac{z}{2}-1\right)}.$$

Daher ist wegen $z \geqq 4$, $1 \leqq 2^{m_2} \leqq 2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$

$$S_1 < x^{\frac{r}{2}-2+2\eta}\, c(\eta) \sum_{m_1, m_2} 2^{\left(2+\eta-\frac{1}{2}r_1\right)m_1+\left(2+2\eta-\frac{1}{2}r_2\right)m_2} < c(\eta)\, x^{\frac{r}{2}-2+5\eta};$$

$$T_1 < x^{\frac{r}{2}-2}\, c(\eta) \sum_{m_1, m_2} 2^{\left(2+\eta-\frac{1}{2}r_1\right)m_1+\left(3-\frac{1}{2}r_2\right)m_2} < c(\eta)\, x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}+\eta};$$

damit ist (50) bewiesen.

Man benutze nun im letzten „Min“ aus (64), (65) das Glied $c2^{m_1+m_2}$, benutze weiter (67) mit $\eta = \frac{1}{16}$ und summiere über den Bereich (66). Es ergibt sich

$$\sum_{l} \left(\frac{x 2^{m_2}}{2^l}\right)^{\frac{1}{8}} < c \left(\frac{\sqrt{x}\, 2^{2m_1+m_2}}{2^n}\right)^{\frac{1}{8}}; \quad \sum_{l} \frac{1}{2^l} < c\, \frac{2^{2m_1}}{2^n \sqrt{x}};$$

$$\sum_{n} \left(\frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{z}{2}} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}\, 2^{2m_1+m_2}}{2^n}\right)^{\frac{1}{8}} < c\, \frac{2^{m_2}}{\sqrt{x}}\, 2^{\frac{1}{4}m_1+\frac{1}{4}m_2}$$

$$\sum_{n} \left(\frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{z}{2}} \cdot \frac{1}{2^{2n}} < c\, \frac{2^{2m_2}}{x} \quad (z > 4).$$

Daher ist für $z > 6$

$$S_1 < c x^{\frac{r}{2}-2} \sum_{m_2, m_1} 2^{\left(3+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r_1\right)m_1+\left(3+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r_2\right)m_2} < c x^{\frac{r}{2}-2}$$

und für $z > 10$

$$T_1 < c x^{\frac{r}{2}-3} \sum_{m_2, m_1} 2^{\left(5-\frac{1}{2}r_1\right)m_1+\left(5-\frac{1}{2}r_2\right)m_2} < c x^{\frac{r}{2}-3}.$$

Hilfssatz 7. *Für* $\frac{1}{x} \leqq \xi < 1$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ *ist*

$$\mathfrak{S}_2(x, \xi) < L(x) \sum_{v, m, n} \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_v\, m^{\frac{1}{2}r_2-1}\, n^{\frac{1}{2}r_1-1}} \left(\frac{mn}{\xi q_v}\right)^{\varepsilon} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1} mn}{x}\right)^{\frac{z}{2}}\right), \quad (68)$$

wo $L(x) = c(\varepsilon)\, x^{\varepsilon}$; *für* $z > 4$ *kann sogar* $L(x) = c(\varepsilon)$ *gesetzt werden;*

$$\mathfrak{T}_2(x) < c \sum_{v,m,n} \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_v^2 m^{\frac{1}{2}r_2-2} n^{\frac{1}{2}r_1-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}mn}{x}\right)^{\frac{z}{2}-\sigma}\right); \tag{69}$$

dabei ist $\sigma = 1$; *für* $z > 6$ *darf sogar* $\sigma = 0$ *gesetzt werden.*

Für $z = 6$ *gilt auch*

$$\mathfrak{T}_2(x) < c \log(2x) \sum_{v,m,n} \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_v^2 m^{\frac{1}{2}r_2-2} n^{\frac{1}{2}r_1-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}mn}{x}\right)^{\frac{z}{2}}\right). \tag{70}$$

In den Summen wird über alle Systeme v, m, n *mit*

$$p_v > 0,\ m/p_v,\ n/q_v,\ m \leqq \sqrt{x},\ n \leqq \sqrt{x} \tag{71}$$

summiert.

Beweis. Soll

$$\frac{h_1 k_2}{h_2 k_1} = \frac{p_v}{q_v}$$

sein, so muß mit lauter positiven ganzen Zahlen gelten:

$$p_v = mn',\ q_v = m'n;\ h_1 = a_1 n',\ k_2 = b_1 m,\ h_2 = a_2 m',\ k_1 = b_2 n;$$

$$a_1 b_1 = a_2 b_2,\ \{a_1, b_2\} = \{a_2, b_1\} = 1;$$

also

$$a_1 = a_2 = a,\ b_1 = b_2 = b,\ bm \leqq \sqrt{x},\ bn \leqq \sqrt{x}.$$

$$\frac{k_2}{h_2} = \frac{k_2 k_1}{h_2 k_1} = \frac{bmn}{aq_v};$$

$$|\beta_2 - \beta_1| = \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_2}{k_2}\left|\frac{k_2 h_1}{h_2 k_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| \sim \frac{a}{bmnq_{v+1}} \geqq \frac{1}{bmnq_{v+1}};$$

$$\operatorname{Min}\left(1, \frac{bmn}{\xi a q_v}\right) \leqq \left(\frac{bmn}{\xi a q_v}\right)^{\varepsilon}.$$

Man setze noch

$$A(v, m, n) = \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_v} \sum_{0<b\leqq\sqrt{x}} \left(\frac{bmn}{\xi q_v}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{b^{\frac{r}{2}-1} m^{\frac{1}{2}r_2-1} n^{\frac{1}{2}r_1-1}} \times$$

$$\times \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{bmnq_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}}\right). \tag{72}$$

$$B(v, m, n) = \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_v^2} \sum_{0<b\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{b^{\frac{r}{2}-2} m^{\frac{1}{2}r_2-2} n^{\frac{1}{2}r_1-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{bmnq_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}}\right). \tag{73}$$

Dann ist nach (35), (36)

$$\mathfrak{S}_2(x, \xi) < c \sum_{v,m,n} A(v, m, n) \sum_{a=1}^{\infty} a^{-1-\varepsilon}, \tag{74}$$

$$\mathfrak{T}_2(x) < c \sum_{v,m,n} B(v, m, n) \sum_{a=1}^{\infty} a^{-2}. \tag{75}$$

Man beachte nun: $\frac{r}{2} - \frac{z}{2} \geqq \frac{z}{2}$

$$\sum_b b^{-\frac{r}{2}+\frac{z}{2}+1+\varepsilon} < c \text{ für } z > 4, \text{ bzw. } < c(\varepsilon)\, x^{\varepsilon} \text{ für } z = 4;$$

$$\sum_b b^{-\frac{r}{2}+\frac{z}{2}+2} < c \text{ für } z > 6, \ \sum_b b^{-\frac{r}{2}+\frac{z}{2}+2} < c \log(2x) \text{ für } z = 6.$$

Wegen (72), (73), (74), (75) ist damit (68), (70) und für $z > 6$ auch (69) bewiesen. Weiter: für $\frac{mnq_{v+1}}{x} \geqq 1$ benutze man $\sum_b b^{-\frac{r}{2}+2} < c$; für $\frac{mnq_{v+1}}{x} < 1$ benutze man

$$\sum_b \frac{1}{b^{\frac{r}{2}-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{bmnq_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}}\right) = \sum_{b > \frac{x}{mnq_{v+1}}} b^{-\frac{r}{2}+2} + \left(\frac{mnq_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}} \times$$

$$\times \sum_{b \leqq \frac{x}{mnq_{v+1}}} b^{-\frac{r}{2}+\frac{z}{2}+2} < c \left(\frac{mnq_{v+1}}{x}\right)^{\frac{r}{2}-3} + c \left(\frac{mnq_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}$$

$\left(\text{wegen } -\frac{r}{2} + \frac{z}{2} + 2 \leqq 0\right)$; wegen $\frac{r}{2} - 3 \geqq \frac{z}{2} - 1$ ist damit (69) auch für $4 \leqq z \leqq 6$ bewiesen.

Hilfssatz 8. *Es sei* $0 < \lambda < 1$, $v > 0$,

$$\frac{\lambda \alpha_1}{3} q_{v+1} \leqq a < b \leqq \frac{\alpha_1}{3} q_{v+1}, \tag{76}$$

$$b - a > \frac{2\alpha_2}{q_v}. \tag{77}$$

Dann ist

$$\int_a^b |\,\mathsf{P}(y)\,|\, dy > c_{26}(\lambda) \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1}}{q_v} (b - a). \tag{78}$$

Beweis. Es sei N die Anzahl aller ganzen Zahlen m mit

$$a \leqq \frac{\alpha_2 m}{q_v} < \frac{\alpha_2(m+1)}{q_v} \leqq b; \tag{79}$$

wegen (77) ist offenbar

$$N > c_{27} q_v (b - a). \tag{80}$$

Man setze

$$Q_1(u) = \alpha_2 \left(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2 + \frac{p_v}{q_v} (u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2)\right),$$

sodaß

$$| Q(u) - Q_1(u) | = \alpha_2 \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{p_v}{q_v} \right| (u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) \leqq \frac{\alpha_2 Q(u)}{\alpha_1 q_v q_{v+1}}. \tag{81}$$

Nun sei m eine ganze Zahl mit (79) und es sei $u = (u_1, \ldots, u_r)$ ein Gitterpunkt mit

$$\frac{\alpha_2 (m + \frac{1}{3})}{q_v} < Q(u) < \frac{\alpha_2 (m + \frac{2}{3})}{q_v}; \tag{82}$$

dann ist nach (79), (76)

$$Q(u) < \tfrac{1}{3} \alpha_1 q_{v+1},$$

also nach (81)

$$\frac{\alpha_2 m}{q_v} < Q_1(u) < \frac{\alpha_2 (m+1)}{q_v};$$

dies ist aber unmöglich, da für ganze $u_1, \ldots, u_r$ der Wert von $Q_1(u)$ ein Vielfaches von $\frac{\alpha_2}{q_v}$ sein muß. Also gibt es keine Gitterpunkte mit (82), also ist im Intervalle

$$\frac{\alpha_2 (m + \frac{1}{3})}{q_v} < y < \frac{\alpha_2 (m + \frac{2}{3})}{q_v} \tag{83}$$

die Funktion $A(y) = A_Q(y)$ konstant, also (vgl. (3), (2))

$$-\frac{\mathrm{d}\mathsf{P}(y)}{\mathrm{d}y} = c_{28} \frac{\mathrm{d}y^{\frac{r}{2}}}{\mathrm{d}y} > c_{29}(\lambda)\, q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1}.$$

Diejenigen y des Intervalles (83), für welche

$$| \mathsf{P}(y) | < c_{29}(\lambda)\, q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} \cdot \frac{\alpha_2}{8 q_v}$$

ist, füllen daher höchstens ein Intervall der Länge $\frac{\alpha_2}{4 q_v}$ aus.

Daher ist

$$\int_{\frac{\alpha_2 m}{q_v}}^{\frac{\alpha_2(m+1)}{q_v}} | \mathsf{P}(y) | \,\mathrm{d}y \geqq \frac{\alpha_2}{q_v} (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4})\, c_{29}(\lambda)\, q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} \cdot \frac{\alpha_2}{8 q_v}.$$

Wegen (80) ist also

$$\int_a^b | \mathsf{P}(y) | \,\mathrm{d}y > \frac{\alpha_2{}^2 c_{29}(\lambda) q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1}}{12 \,.\, 8 q_v{}^2}\, c_{27}\, q_v\, (b - a).$$

Hilfssatz 9. *Es sei* $a < b$, $A > 0$. $f(y)$ *reell und integrierbar in* $\langle a, b \rangle$. *Es sei entweder*

$$f(y) \leqq A \tag{84}$$

für alle y *mit* $a \leqq y \leqq b$ *oder*

$$f(y) \geqq -A \tag{85}$$

für alle y *mit* $a \leqq y \leqq b$.

Dann ist

$$\int_a^b | f(y) | \,\mathrm{d}y \leqq \left| \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y \right| + 2A\,(b-a).$$

Beweis. Man darf voraussetzen, daß (85) gilt (sonst betrachte man $-f$ statt f). Dann ist aber $| f(y) | \neq f(y)$ nur dann, wenn $0 > f(y) \geqq -A$; also ist

$$\int_a^b | f(y) | \,\mathrm{d}y - \left| \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y \right| \leqq \int_a^b | f(y) | \,\mathrm{d}y - \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y \leqq 2A\,(b-a).$$

Hilfssatz 10. *Für* $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq x$ *ist*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \mathsf{P}(y)\,\mathrm{d}y \right| < c_{30} x^{\frac{r}{2}-1}.$$

Beweis. Wegen $\frac{1}{2} r_j \geqq 2$ ist (man beachte n/q_v. m/p_v. $p_v \sim q_v$)

$$\sum_{v,m,n} q_v^{-2} m^{-\frac{1}{2} r_1 + 2} n^{-\frac{1}{2} r_1 + 2} < c \sum_v q_v^{-1} < c;$$

aus (34), (49), (50), (69) folgt also wegen $\frac{1}{4} r + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} r - 1$ die Behauptung.

Hilfssatz 11. *Es sei* $\frac{1}{4} > \varepsilon > 0$. $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq x$.

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < \infty; \tag{86}$$

dann ist

$$| \mathsf{P}(x) | < c(\varphi, \varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\, \psi^{-1}(x), \tag{87}$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \mathsf{P}(y)\, dy \right| < c_{31}(\varphi, \varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-1}\, \psi^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(x). \tag{88}$$

Für $z > 6$ ist schärfer

$$| \mathsf{P}(x) | < c(\varphi)\, x^{\frac{r}{2}-1}\, \psi^{-1}(x) \tag{89}$$

und für $z > 10$ ist schärfer

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \mathsf{P}(y)\, dy \right| < c_{32}(\varphi)\, x^{\frac{r}{2}-1}\, \psi^{-2}(x). \tag{90}$$

Beweis. Es sei $0 < \eta < \frac{1}{4}$. Man setze in diesem Beweis

$$A(v, m, n) = \left(\frac{\psi(x)\, mn}{q_v}\right)^{\eta} \frac{1}{q_v\, m^{\frac{1}{2} r_2 - 1}\, n^{\frac{1}{2} r_1 - 1}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{mn q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}}\right),$$

$$B_\sigma(v, m, n) = \frac{1}{q_v^2\, m^{\frac{1}{2} r_2 - 2}\, n^{\frac{1}{2} r_1 - 2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{mn q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-\sigma}\right),$$

$\sigma = 0$ oder $\sigma = 1$. Wegen (86), (8) ist

$$q_{v+1} < c(\varphi)\, \varphi(q_v),\quad q_v > c(\varphi)\, \psi(q_{v+1}).$$

Bei jedem v und jedem $\eta > 0$ ist die Anzahl der m/p_v, n/q_v kleiner als $c(\eta)\, q_v^{\eta}$.

Wegen $\frac{z}{2} \geqq 2$, $m \leqq p_v$, $n \leqq q_v$, $p_v \sim q_v$ ist

$$B_1(v, m, n) < c \operatorname{Min}\left(\frac{1}{q_v^2}, \frac{q_{v+1}}{x}\right).$$

Man definiere (alles für $x > c(\varphi)$) w durch

$$q_w\, q_{w-1}^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{x}{\sqrt{\psi(x)}} < q_{w+1}\, q_w^{\frac{1}{2}};$$

aus (86) folgt also

$$\frac{x}{\sqrt{\psi(x)}} < c(\varphi)\, q_w^{\frac{1}{2}}\, \varphi(q_w),\quad q_w > \psi\left(\frac{x}{c(\varphi)\sqrt{q_w\, \psi(x)}}\right),$$

also nach (8)

$$q_w > \frac{1}{c(\varphi)\sqrt{q_w \psi(x)}} \cdot \psi(x),\quad q_w^{\frac{3}{2}} > c(\varphi)\sqrt{\psi(x)}.$$

Daher ist[11])

$$\sum_{v,m,n} B_1(v, m, n) < c \sum_{v \geqq w} q_v^{-\frac{3}{2}} + c \sum_{v<w} \frac{1}{x} q_{v+1} q_v^{\frac{1}{2}}$$

$$< c q_w^{-\frac{3}{2}} + c \cdot \frac{1}{x} \cdot q_w q_{w-1}^{\frac{1}{2}} < c(\varphi) \cdot \psi^{-\frac{1}{2}}(x).$$

Also ist (vgl. (69))

$$\mathfrak{T}_2(x) < c(\varphi)\, x^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-\frac{1}{2}}(x). \tag{91}$$

Aus (34), (49), (50), (91) folgt $\left(\text{wegen } x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \leqq \psi^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(x),\ \frac{r}{4} + \right.$ $\left. + \frac{1}{2} \leqq \frac{r}{2} - \frac{3}{2}\right)$ die Ungleichung (88).

Man ordne jetzt — bis zum Schluß des Beweises dieses Hilfssatzes — jedem $x > c(\varphi)$ ein $V = V(x)$ durch

$$\varphi(q_{V-1}) \leqq x < \varphi(q_V), \text{ also } q_{V-1} \leqq \psi(x) < q_V \tag{92}$$

zu. Es ist

$$\mathfrak{A}_1 = \sum_{\substack{v \geqq V \\ m,n}} A(v, m, n) \leqq \sum_{\substack{v \geqq V \\ m,n}} \frac{\psi^\eta(x)}{q_v^{1+\eta} (mn)^{\frac{1}{2}z-1-\eta}},$$

also (wegen $\frac{z}{2} - 1 \geqq 1,\ m \leqq \sqrt{x},\ n \leqq \sqrt{x}$)

$$\mathfrak{A}_1 \leqq c(\eta)\, x^\eta \psi^\eta(x) \sum_{v \geqq V} q_v^{-1-\eta} \leqq c(\eta)\, x^\eta \psi^\eta(x)\, q_V^{-1-\eta},$$

also wegen (92)

$$\mathfrak{A}_1 < c(\eta)\, x^\eta \psi^{-1}(x). \tag{93}$$

Für $z > 6$, $\eta = \frac{1}{8}$ kann man den Faktor x^η unterdrücken (wegen $\frac{1}{2}z - 1 - \eta > 1$), also

$$\mathfrak{A}_1 < c\, \psi^{-1}(x) \tag{94}$$

für $z > 6$. Für $z > 10$ ist ebenso

$$\mathfrak{B}_1 = \sum_{\substack{v \geqq V \\ m,n}} B_0(v, m, n) \leqq \sum_{\substack{v \geqq V \\ m,n}} \frac{1}{q_v^2 (mn)^{\frac{z}{2}-2}} \leqq c q_V^{-2},$$

$$\mathfrak{B}_1 < c\, \psi^{-2}(x) \tag{95}$$

für $z > 10$.

[11]) Der Summationsbereich für v, m, n ist durch (71) gegeben; eventuelle weitere Einschränkungen werden immer besonders gekennzeichnet.

Weiter ist

$$\mathfrak{A}_2 = \sum_{\substack{v<V\\ m,n}} A(v, m, n) \leqq \sum_{\substack{v<V\\ m,n}} \frac{\psi^\eta(x)\, x^\eta}{q_v^{1+\eta}\, mn} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}\, mn}{x}\right)^2\right).$$

Dabei ist $m^{-1}n^{-1} \leqq \frac{q_{v+1}}{x}$ für $mn \geqq \frac{x}{q_{v+1}}$; da die Anzahl der m, n bei festem v kleiner als $c(\eta)\, q_v^{\frac{1}{2}\eta}$ ist, so ist

$$\mathfrak{A}_2 < c(\eta) \sum_{v<V} \frac{\psi^\eta(x) \,.\, x^\eta}{q_v} \frac{q_{v+1}}{x} < c(\varphi, \eta)\, x^{2\eta} \sum_{v<V} \frac{\varphi(q_v)}{x q_v}.$$

Wegen $q_{V-1} \leqq \varphi(q_{V-1}) \leqq x$ ist hier die Gliederzahl kleiner als $c(\eta)\, x^\eta$, also

$$\mathfrak{A}_2 < c(\varphi, \eta)\, x^{3\eta} \frac{\varphi(q_{V-1})}{x q_{V-1}} \leqq c(\varphi, \eta)\, x^{3\eta} \frac{\varphi(\psi(x))}{x\, \psi(x)} = c(\varphi, \eta) \frac{x^{3\eta}}{\psi(x)}. \tag{96}$$

Für weitere Zwecke rechne ich vor: ist $\tau = 0$ oder $\tau = 1$, so ist

$$\sum_{mn \geqq \frac{x}{q_{v+1}}} (mn)^{-\frac{5}{2}-\tau+\frac{1}{8}} \leqq \sum_{a \geqq \frac{x}{q_{v+1}}} a^{-\frac{5}{2}-\tau+\frac{1}{8}} \sum_{d/a} 1 < c \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{3}{2}+\tau-\frac{1}{4}} \tag{97}$$

$$\sum_{mn < \frac{x}{q_{v+1}}} (mn)^{1+\tau+\frac{1}{8}} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{7}{2}+2\tau} \leqq c \left(\frac{x}{q_{v+1}}\right)^{2+\tau+\frac{1}{4}} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{7}{2}+2\tau} =$$

$$= c \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{3}{2}+\tau-\frac{1}{4}}. \tag{98}$$

Weiter: für $0 < \alpha < \beta$ ist

$$\frac{(\varphi(q_{v+1}))^\beta}{q_{v+1}^\alpha} \geqq \left(\frac{q_{v+1}}{q_v}\right)^{\beta-\alpha} \frac{(\varphi(q_v))^\beta}{q_v^\alpha}. \tag{99}$$

Für $z > 6$ bekommt man (mit $\eta = \frac{1}{8}$) nach (97), (98), (86), (99) mit $\tau = 0$, $\alpha = \frac{9}{8}$, $\beta = \frac{10}{8}$

$$\mathfrak{A}_2 \leqq \sum_{\substack{v<V\\ m,n}} \left(\frac{\psi(x)}{q_v}\right)^{\frac{1}{8}} \frac{1}{q_v (mn)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{8}}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{mn q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{7}{2}}\right).$$

$$< c(\varphi) \sum_{v<V} \frac{(\psi(x))^{\frac{1}{8}}}{q_v^{\frac{9}{8}}} \left(\frac{\varphi(q_v)}{x}\right)^{\frac{10}{8}} < c(\varphi) \frac{(\psi(x))^{\frac{1}{8}}}{q_{V-1}^{\frac{9}{8}}} \left(\frac{\varphi(q_{V-1})}{x}\right)^{\frac{10}{8}},$$

$$\mathfrak{A}_2 < c(\varphi) \frac{(\psi(x))^{\frac{1}{8}}}{(\psi(x))^{\frac{9}{8}}} \left(\frac{\varphi(\psi(x))}{x}\right)^{\frac{10}{8}} = c(\varphi)\,\psi^{-1}(x). \qquad (100)$$

Für $z > 10$ bekommt man nach (97), (98), (86), (99) mit $\tau = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{9}{4}$ (der Exponent $\frac{1}{8}$ in der folgenden Formel ist sogar überflüssig)

$$\mathfrak{B}_2 = \sum_{\substack{v<V\\ m,n}} B_0(v, m, n) \leqq \sum_{\substack{v<V\\ m,n}} \frac{1}{q_v^{\,2}(mn)^{\frac{7}{2}-\frac{1}{8}}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{mnq_{v+1}}{x}\right)^{\frac{11}{2}}\right)$$

$$< c(\varphi) \sum_{v<V} \frac{1}{q_v^{\,2}} \left(\frac{\varphi(q_v)}{x}\right)^{\frac{9}{4}} < c(\varphi) \frac{1}{q_{V-1}^{2}} \left(\frac{\varphi(q_{V-1})}{x}\right)^{\frac{9}{4}}.$$

$$\mathfrak{B}_2 < c(\varphi)\,\psi^{-2}(x) \left(\frac{\varphi(\psi(x))}{x}\right)^{\frac{9}{4}} = c(\varphi)\,\psi^{-2}(x). \qquad (101)$$

Aus (34), (49), (52), (69), (95), (101) folgt (90) (da $\frac{r}{4} + \frac{1}{2} \leqq \frac{r}{2} - 3$ für $z > 10$, $\psi^{-2}(x) \geqq x^{-2}$).

Wird weiter $\xi = \psi^{-1}(x)$ gesetzt, was wegen $\psi^{-1}(x) \geqq x^{-1}$, $\psi(x) \to \infty$ für $x > c(\varphi)$ erlaubt ist, so folgt (87) bzw. (89) aus (33), (48), (50) bzw. (51), (68), (93) bzw. (94), (96) bzw. (100).

Beweis des Satzes 3. Es sei $0 < \lambda < 1$,

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} > 0$$

und man wähle ein $A > 0$ so, daß es unendlichviele V mit

$$\frac{q_{V+1}}{\varphi(q_V)} > A \qquad (102)$$

gibt; mit V werde ich jetzt nur solche Indizes bezeichnen, für welche (102) gilt. Mit $d_1, d_2, \ldots$ werde ich zur Abkürzung Zahlen $c(\varphi, \lambda, A)$ bezeichnen. Aus (102), (8) folgt

$$q_V < \psi\left(\frac{q_{V+1}}{A}\right) < d_1\psi(q_{V+1}). \qquad (103)$$

Für $0 < \eta < \zeta$ ist

$$\frac{\eta^{\frac{r}{2}-1}}{\psi(\eta)} < \frac{\zeta^{\frac{r}{2}-1}}{\psi(\zeta)} < \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{r}{2}-1} \frac{\eta^{\frac{r}{2}-1}}{\psi(\eta)}; \tag{104}$$

für

$$\frac{\lambda\alpha_1}{3} q_{V+1} \leqq x \leqq \frac{\alpha_1}{3} q_{V+1}$$

ist also nach (103), (104)

$$\frac{q_{V+1}^{\frac{r}{2}-1}}{q_V} > \frac{1}{d_1} \frac{q_{V+1}^{\frac{r}{2}-1}}{\psi(q_{V+1})} > d_2 \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{\psi(x)}. \tag{105}$$

Ist nun

$$\frac{\lambda\alpha_1}{3} q_{V+1} \leqq x - \delta < x \leqq \frac{\alpha_1}{3} q_{V+1}, \tag{106}$$

so ist nach Hilfssatz 8 und (105)

$$\int_{x-\delta}^{x} |\,\mathsf{P}(y)\,|\, dy > d_3 \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{\psi(x)} \delta, \text{ wenn } \delta > \frac{2\alpha_2}{q_V}. \tag{107}$$

Wir machen nun folgende Voraussetzung: x, δ seien so gewählt, daß (106) gilt und man setze voraus, daß entweder $\mathsf{P}(y) < < \frac{1}{4} d_3 y^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(y)$ für alle y mit $x - \delta \leqq y \leqq x$ oder $\mathsf{P}(y) > - - \frac{1}{4} d_3 y^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(y)$ für alle y mit $x - \delta \leqq y \leqq x$. Dann ist also nach Hilfssatz 9 und (107)

$$\left| \int_{x-\delta}^{x} \mathsf{P}(y)\, dy \right| > \frac{1}{2} d_3 \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{\psi(x)} \delta, \tag{108}$$

wenn

$$\delta > \frac{2\alpha_2}{q_V}. \tag{109}$$

Daraus wollen wir für gewisse δ einen Widerspruch ableiten.

Erstens: ist

$$\delta \geqq \frac{2c_{30}}{d_3} \psi(x),$$

so gilt (109) für $V > d_4$ und Hilfssatz 10 gibt den Widerspruch gegen (108).

Zweitens: es sei auch

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < \infty,$$

also

$$q_{v+1} < d_5\, \varphi(q_v), \quad q_v > d_6\, \psi(q_{v+1}).$$

Ist $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$,

$$\delta \geqq \frac{2c_{31}(\varphi, \varepsilon)}{d_3} \psi^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(x),$$

so gilt (109) für $V > c(\varphi, \lambda, A, \varepsilon)$ und Hilfssatz 11 gibt den Widerspruch gegen (108).

Man beachte nun, daß

$$\frac{2\alpha_2}{q_V} < \frac{2\alpha_2}{d_6\, \psi(q_{V+1})} < \frac{d_7}{\psi(x)}.$$

Ist nun $z > 10$,

$$\delta \geqq \operatorname{Max}\left(\frac{2c_{32}(\varphi)}{d_8}, d_7\right) \cdot \frac{1}{\psi(x)},$$

so gilt (109) und Hilfssatz 11 gibt einen Widerspruch gegen (108).

Damit sind die Behauptungen 2, 3 des Satzes 3 bewiesen.[12]) Die Behauptung 1 ist im Hilfssatz 11 enthalten.

Die Behauptung 4 ist aber trivial: ist $\varepsilon > 0$, $1 < x_1 < x_2$, $\mathsf{P}(x_1) > \varepsilon x_1^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(x_1)$, $\mathsf{P}(x_2) < -\varepsilon x_2^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(x_2)$, so ist (da $A(x)$ nicht abnimmt)

$$-\varepsilon x_2^{\frac{r}{2}-1} \psi^{-1}(x_2) > \mathsf{P}(x_2) - \mathsf{P}(x_1) >$$

$$> -c\,(x_2^{\frac{r}{2}} - x_1^{\frac{r}{2}}) > -c x_2^{\frac{r}{2}-1} (x_2 - x_1),$$

also

$$x_2 - x_1 > c\varepsilon\, \psi^{-1}(x_2).$$

Beweis des Satzes 2. Sind die g_v beschränkt, so setze man $\varphi(\eta) = \eta$, also $\psi(\eta) = \eta$. Dann ist für *alle* v

$$1 \leqq \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < c_{34}. \tag{110}$$

---

[12]) Zu (14) beachte man noch die Fußnote [7]). Das Intervall K_z in (14) ist wesentlich länger als das für $z > 10$ brauchbare Intervall (15). Die hier entwickelten Methoden würden auch erlauben, K_z für $z = 5$, $z = 6, \ldots$ nach und nach zu verkürzen, bis man für $z > 10$ zu (15) kommt. Ich verzichte darauf, weil die Resultate zu kompliziert und dabei nicht so scharf wie (15) wären.

Ist $B > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ und wird $A = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2c_{34}}$ gesetzt, so gilt für $x > c(B)$ folgendes: wegen (110) (wo $\varphi(q_v) = q_v$) gibt es ein V mit $\frac{3}{\alpha_1} x < q_{V+1} < c_{34} \frac{3}{\alpha_1} x$, also

$$\lambda \frac{\alpha_1}{3} q_{V+1} = \frac{\alpha_1}{6c_{34}} q_{V+1} < \frac{1}{2} x < x - x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} < x - \frac{B}{x} <$$

$$< x < \frac{\alpha_1}{3} q_{V+1}, \quad \frac{q_{V+1}}{\varphi(q_V)} > A$$

und die Behauptungen 1, 3, 4 des Satzes 3 ergeben Satz 2.

Beweis des Satzes 1. Für beschränkte g_v folgt er aus Satz 2. Also seien die g_v nicht beschränkt und zur Abkürzung sei $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma$. Wählt man φ so, wie es in der Einleitung vor dem Satz 3 gesagt wurde, so ist $x^{-1} \psi(x) \to 0$, $\psi(x) \to \infty$, also nach Satz 3, Behauptung 1: $f(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1$ und nach Satz 3, Behauptung 2: $f_+(Q) \geqq \frac{r}{2} - 2$, $f_-(Q) \geqq \frac{r}{2} - 2$.[13] Ist $\gamma < \infty$, $\gamma < \gamma' < \infty$, so gilt (8') mit $\varphi(\eta) = \eta^{\gamma'}$ und Satz 3, Beh. 1 ergibt[14]) $f(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma}$; für $\gamma = \infty$ ist dies wegen $f(Q) \leqq \frac{1}{2} r - 1$ auch wahr. Ist $\gamma > 1$, $1 < \gamma' < \gamma$, so gilt (9) mit $\varphi(\eta) = \eta^{\gamma'}$ und Satz 3, Behauptung 2 ergibt[13]), [14]) $f_+(Q) \geqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma}$, $f_-(Q) \geqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma}$; für $\gamma = 1$ ist dies wegen $f_+(Q) \geqq \frac{1}{2} r - 2$, $f_-(Q) \geqq \frac{1}{2} r - 2$ auch wahr.

Beweis des Satzes 5. Die zweite Behauptung folgt aus Satz 2; die erste folgt aus Satz 3, Behauptung 2, da man hier, wie vor dem Satz 3 in der Einleitung bemerkt wurde, $\varphi(\eta)$ so wählen kann, daß (9) und $x^{-1} \psi(x) \to 0$ gilt.

Beweis des Satzes 4. Es sei $0 \leqq \mu < 1$, $0 < \eta < \frac{1}{20}$, $x > q_2$. Man definiere w durch $q_w \leqq x < q_{w+1}$. Die Zeichen v, m, n sollen

---

[13]) Nämlich: es sei $B > 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$; jedes Intervall $\left\langle \lambda \frac{\alpha_1}{3} q_{V+1}, \frac{\alpha_1}{3} q_{V+1} \right\rangle$, wo $V > c(\varphi, B)$, enthält wegen $x^{-1} \psi(x) \to 0$ ein Intervall der Gestalt $\langle x - B \psi(x), x \rangle$, z. B. für $x = \frac{\alpha_1}{3} q_{V+1}$. Vgl. auch die analoge Fußnote [9]).

[14]) Da γ' beliebig nahe an γ gewählt werden darf.

durch $p_v > 0$, m/p_v, n/q_v, $m \leqq \sqrt{x}$, $n \leqq \sqrt{x}$ eingeschränkt sein. Man setze

$$D(v, m, n) = \frac{1}{q_v m^{\frac{1}{2}r_2-1} n^{\frac{1}{2}r_1-1}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}mn}{x}\right)^{\frac{z}{2}}\right), \tag{111}$$

also nach (18)

$$D(v, m, n) \leqq G(x), \tag{112}$$

insbesondere

$$G(x) \geqq D(w, 1, 1) = \frac{1}{q_w} \geqq \frac{1}{x}. \tag{113}$$

Die Anzahl der Systeme v, m, n mit $v \leqq w$, m/p_v, n/q_v ist kleiner als $c(\eta)\, x^\eta$. Also nach (112), (113)

$$\sum_{\substack{v \leqq w \\ m,n}} D(v, m, n) < c(\eta)\, x^\eta\, G(x). \tag{114}$$

$$\sum_{\substack{v > w \\ m,n}} D(v, m, n) < \sum_{\substack{v > w \\ m,n}} (q_v mn)^{-1} < c(\eta) \sum_{v > w} q_v^{-1+\eta} <$$

$$< c(\eta)\, q_{w+1}^{-1+\eta} < c(\eta)\, x^{-1+\eta} < c(\eta) x^\eta\, G(x). \tag{115}$$

Nach (33), (48), (50), (68) mit $\xi = \frac{1}{x}$ und mit η statt ε ist $\Bigl($man beachte, daß $\left(\frac{mn}{\xi q_v}\right)^\eta \leqq x^{2\eta}\Bigr)$

$$|\, \mathsf{P}(x)\, | < c(\eta)\, x^{\frac{r}{2}-2+\eta} + c(\eta)\, x^{\frac{r}{2}-1+3\eta} \sum_{v,m,n} D(v, m, n),$$

also nach (113), (114), (115)

$$|\, \mathsf{P}(x)\, | < c(\eta)\, x^{\frac{r}{2}-1+4\eta}\, G(x), \tag{116}$$

womit (20) bewiesen ist.

Es sei nun $z \geqq 6$. Dann ist (man beachte m/p_v, n/q_v) nach (112), (113)

$$\sum_{\substack{q_v > x^{\frac{1}{4}} \\ m,n}} D(v, m, n) \frac{mn}{q_v} \leqq \sum_{\substack{q_v > x^{\frac{1}{4}} \\ m,n}} \frac{1}{q_v^2} < c(\eta) \sum_{q_v > x^{\frac{1}{4}}} q_v^{-2+\eta} <$$

$$< c(\eta)\, x^{-\frac{1}{2}+\frac{\eta}{4}} < c(\eta)\, x^{1-6\eta}\, G(x) \tag{117}$$

$$\sum_{\substack{q_v \leqq x^{\frac{1}{4}} \\ m,n}} D(v, m, n) \frac{mn}{q_v} < c(\eta)\, x^{\frac{1}{4}+\eta}\, G(x) < c(\eta)\, x^{1-6\eta}\, G(x). \tag{118}$$

Nach (34), (49), (50), (70) bzw. (69) (für $z > 6$, $\sigma = 0$) ist also

(mit η statt ε)

$$\left|\int\limits_{\mu x}^{x} \mathsf{P}(y)\,\mathrm{d}y\right| < c(\eta)\, x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}+\eta} + c(\eta)\, x^{\frac{r}{2}-1+\eta} \sum_{v,m,n} D(v, m, n)\frac{mn}{q_v}.$$

Also nach (113), (117), (118)

$$\left|\int\limits_{\mu x}^{x} \mathsf{P}(y)\,\mathrm{d}y\right| < c(\eta)\, G(x)\, x^{\frac{r}{2}-5\eta}. \tag{119}$$

Wäre nun für $\mu x \leqq y \leqq x$ entweder stets $\mathsf{P}(y) \leqq y^{\frac{r}{2}-1-5\eta}\, G(y)$ oder stets $\mathsf{P}(y) \geqq - y^{\frac{r}{2}-1-5\eta}\, G(y)$, so wäre nach (116), Hilfssatz 9, (119)[15])

$$\int\limits_{\mu x}^{x} \mathsf{P}^2(y)\,\mathrm{d}y \leqq c(\eta)\, x^{\frac{r}{2}-1+4\eta}\, G(x) \int\limits_{\mu x}^{x} |\,\mathsf{P}(y)\,|\,\mathrm{d}y \leqq$$

$$\leqq c(\eta)\, x^{\frac{r}{2}-1+4\eta}\, G(x) \left(\left|\int\limits_{\mu x}^{x} \mathsf{P}(y)\,\mathrm{d}y\right| + 2\,(1-\mu)\, x^{\frac{r}{2}-5\eta}\, G(x)\right) \leqq$$

$$\leqq c(\mu, \eta)\, x^{r-1-\eta}\, G^2(x),$$

was für $x > c(\mu, \eta)$ im Widerspruch gegen (19) steht.

*

Příspěvek k teorii mřížových bodů v elipsoidech $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq x$.

2. pojednání.

(Obsah předešlého článku.)

V práci vyšetřuje autor mřížový zbytek $\mathsf{P}(x)$ pro elipsoidy tvaru

$$\alpha_1\,(u_1{}^2 + \ldots + u_{r_1}{}^2) + \alpha_2\,(u_{r_1+1}{}^2 + \ldots + u_r{}^2) \leqq x$$

$\left(\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\ \text{iracionální},\ z = \mathrm{Min}\,(r_1, r - r_1) \geqq 4\right)$. Autor vyšetřuje nejen absolutní hodnotu, nýbrž i znamení funkce $\mathsf{P}(x)$ a rychlost, se kterou se střídají její kladné a záporné hodnoty.

---

[15]) Man beachte: nach (18) nimmt $y^z G^2(y)$ nicht ab; also auch $y^{\frac{z}{2}} G(y)$, also auch $y^{\frac{r}{2}-1-5\eta}\, G(y)$, da $\frac{r}{2} \geqq \frac{z}{2} + 2$; daher ist $y^{\frac{r}{2}-1-5\eta}\, G(y) \leqq$ $\leqq x^{\frac{r}{2}-1-5\eta}\, G(x)$ für $\mu x \leqq y \leqq x$.