Jan Potoček

Poznámky o resonátorech s pružnou stěnou

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, 287--295

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123397`

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

Poznámky o resonátorech s pružnou stěnou.

Jan Potoček, Brno.

(Došlo 7. prosince 1936.)

Účelem tohoto článku je upozorniti na vzorec označený v dalším (12), který je zajímavý pro svou souvislost s Weberovou teorií jazýčkových píšťal a dal by se poměrně snadno přezkoušeti experimentálně. Odvozuji jej zde způsobem, který lépe dbá skutečných podmínek pokusu, než odvození dosavadní.

Resonátory, o nichž článek jedná, jsou válcové trubice kruhového průřezu, na jejichž jednom konci je napjata blána (kaučuk, pergamen), která uzavírá ústí neprodyšně. Druhý konec trubice je buď otevřený — resonátory otevřené, nebo uzavřený nepružným rovinným dnem — resonátory zavřené.

H. Bouasse věnoval ve své Akustice těmto a podobným resonátorům několik odstavců, v nichž pojednává o jejich částkových tónech a počítá vzorce, které udávají závislost kmitočtu částkových tónů na plošné hustotě a vlastním kmitočtu blány a na délce trubice. Jeho výpočty jsou založeny na těchto zjednodušujících předpokladech:

a) Blána je nahrazena rovinnou deskou kolmou na osu trubice, uzavírající jeden konec trubice vzduchotěsně a kmitající ve směru osy bez tření a bez útlumu.

b) V trubici se udržuje stojaté vlnění rovinné s kmitnou (uzlem) na druhém, otevřeném (uzavřeném) konci.

c) Vlnivý pohyb sahá nerušeně až k bláně, která sleduje pohyb sousední vzduchové vrstvy.

d) Účinek pohybu vzduchu na vnější straně blány lze zanedbati.

Označme v dalším písmenem m plošnou hustotu napjaté blány, Ω její vlastní kruhovou frekvenci ve vzduchoprázdnu, L délku trubice, ω kruhovou frekvenci vlnění v trubici, ω_0 resp. ω_1 kruhovou frekvenci základního tónu trubice délky L otevřené na obou koncích resp. uzavřené na jednom konci. Platí

[1]) H. Bouasse, Tuyaux et résonateurs, str. 245 a další.

$$\omega_0 = 2\omega_1 = \frac{\pi V}{L}, \tag{1}$$

kde V je fázová rychlost vlnění.

Položme počátek osy x do rovnovážné polohy blány, kladnou poloosu do trubice a rovnoběžně s její osou. Pak je pošinutí vzduchové částice v uvnitř otevřeného resonátoru dáno podle b) výrazem

$$v = C \cos k\,(L - x) \cos \omega t, \tag{2}$$

kde

$$k = \omega / V.$$

Napišme pohybovou rovnici blány, či lépe řečeno desky, která ji nahrazuje. Kdyby blána — jejíž plocha buď pro jednoduchost rovna jedné — kmitala ve vzduchoprázdnu, vyhovovalo by její pošinutí w rovnici

$$m \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} = - m\Omega^2 w. \tag{3}$$

Ve vzduchu přistoupí na pravou stranu k síle od pružnosti přetlak vzduchu vně trubice proti tlaku, který působí na blánu z vnitřku. Protože se podle d) považuje hodnota tlaku vně blány za stálou a rovnou tlaku průměrnému, objeví se na pravé straně podtlak vzduchu na vnitřní straně blány proti tlaku průměrnému, úměrný dilataci $(\partial v/\partial x)_{x=0}$; konstanta úměrnosti je ϱV^2, kde ϱ je střední hustota vzduchu. Píšeme-li mimo to podle předpokladu c) $v_{x=0}$ a $(\partial^2 v/\partial t^2)_{x=0}$ místo w a $\mathrm{d}w^2/\mathrm{d}t^2$, dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$m \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \Omega^2 v \right) = \varrho V^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ pro } x = 0. \tag{4}$$

Dosadíme-li sem za v výraz (2) a zavedeme veličiny ω a ω_0 místo k a L, obdržíme vztah, k němuž Bouasse došel:

$$\gamma \left(\frac{\Omega^2}{\omega} - \omega \right) - \operatorname{tg} \frac{\omega}{\omega_0} \pi = 0, \tag{5}$$

kde

$$\gamma = \frac{m}{\varrho V}. \tag{6}$$

Při pevném ω_0 a m vypočtou se kruhové frekvence částkových tónů otevřeného resonátoru jako kořeny této rovnice v ω. O jejich rozložení lze snadno získati představu z grafické konstrukce. Narýsujeme-li v pravoúhlé soustavě souřadné ω, y větév hyperboly $y = \gamma\,(\Omega^2/\omega - \omega)$, $(\omega > 0)$ a tangentoidu $y = \operatorname{tg} \omega\pi/\omega_0$, jsou dány hodnoty kořenů jako úsečky průsečíků hyperboly s větvemi tangentoidy. Hyperbola má asymptoty: osu y a přímku $y = -\gamma\omega$, a seče osu ω v bodě $\omega = \Omega$. Je-li blána velmi tenká a málo napjatá, svírá asymptota s osou ω velmi malý úhel a bod Ω leží blízko počátku: Základní tón je velmi hluboký, svrchní tóny se blíží částkovým tónům trubice bez blány, na obou koncích otevřené. Je-li blána velice napjatá, leží bod Ω daleko od počátku: Částkové tóny blíží se částkovým tónům trubice na jednom konci zavřené.

Pro resonátor zavřený je

$$v = C \sin k (L - x) \cos \omega t$$

a rovnice pro částkové tóny je

$$\gamma \left(\frac{\Omega^2}{\omega} - \omega \right) + \operatorname{cotg} \frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2} = 0. \tag{7}$$

Bouasse a Fouché zjišťovali částkové tóny dvojím způsobem:

1. Resonancí na tón spojitě měněné výšky. Resonance zjištěna podle prudkého pohybu korkových pilin na vodorovné bláně nebo podle utvoření Kundtových obrazců uvnitř trubice.

2. Určením výšky tónu obdrženého foukáním napříč otevřeného kraje trubice. U otevřeného resonátoru dávaly oba způsoby tytéž frekvence.

Výsledky pokusů s otevřeným resonátorem: Je-li Ω značně větší nebo značně menší než ω_0, souhlasí pozorování s teorií; v prvním případě jsou totiž nalezené frekvence přibližně v poměru $1 : 3 : 5 : \ldots$, v druhém případě ozývá se velmi hluboký základní tón a ostatní částkové tóny mají frekvence o něco menší, než částkové tóny otevřené trubice. Neliší-li se však Ω příliš od ω_0, ukáží se mimo částkové tóny odpovídající kořenům rovnice (6) ještě tóny jiné, jejichž frekvence jsou přibližně celými (nejčastěji lichými) násobky frekvence základního hlubokého tónu. Bouasse nepraví nic určitého o původu těchto teorií nepředvídaných tónů; snad že jsou působeny svrchními tóny blány, snad že se dají vyložiti zavedením útlumu blány.

U resonátoru zavřeného se ukázalo, že, zní-li některý částkový tón resonátoru, jsou předpoklady b) a c) splněny; v resonátoru existuje dokonale pravidelné stojaté vlnění s uzlem na uzavřeném konci.

Resonátor s pružnou stěnou je zajímavý tím, že u něho působí kmity vzduchového sloupce na kmity blány, podobně jako působí u jazýčkové píšťaly ozvučna na jazýček.[2]) Jenom že u resonátoru

---

[2]) Uvedená teorie je v podstatě totožná s Weberovou teorií jazýčkové píšťaly a vzorec (5) je vzorec Weberův. Viz Bouasse, l. c. str. 249, dále Instruments à vent I., str. 74, W. E. Weber, Theorie der Zungenpfeifen, Pogg. Ann., Bd. 17 (1829).

jsou poměry mnohem jednodušší. Není zde proudu vzduchu a pak, zjišťují-li se částkové tóny způsobem uvedeným pod 1., působí na blánu zvenčí síla o dané periodě; jazýček však dostává proud vzduchu, který si soustava jazýček—ozvěna rozděluje periodicky sama. Mimo to u resonátoru zavřeného není opravy na otevřený konec. Pokusné zkoumání zpětného působení vzduchového sloupce bylo by tedy snad jednodušší u resonátoru než u jazýčkové píšťaly, zvláště u resonátoru zavřeného. Bylo by i zajímavo zjistit, do jaké míry vyhovuje skutečnosti zvláště vzorec (7); v akustice vzduchových sloupců není mnoho takových vzorců, které by se daly experimentálně vyzkoušet. Ovšem, je zde zatím možnost, že útlum blány má vliv na výšku částkových tónů. Pokusme se tedy vzíti tento útlum do počtu.

Výše uvedené předpoklady změníme takto:

1. Předpoklad a) doplníme tím, že zavedeme útlum blány. Předpokládáme, že se pohyb desky zastupující blánu děje ve vzduchoprázdnu podle rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + 2H \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + K^2 w = 0, \tag{8}$$

místo podle rovnice (3).

2. Předpoklad d) vynecháme a budeme uvažovati o případu, že se částkové tóny zavřeného resonátoru zjišťují metodou resonance uvedenou výše pod 1. Protože má blána útlum, reaguje na každou výšku tónu budícího zdroje, a úloha je vypočísti, při kterých frekvencích budícího tónu nabývá rozkmit blány maxima.

Zvukový zdroj budiž umístěn před blanou v ose resonátoru a tak daleko od blány, abychom mohli považovali vlny dopadající na blánu v kladném směru osy x za rovinné. Jejich amplitudu označme A, jejich kruhovou frekvenci ω. Mimo ně bude v prostoru před blanou vlnění odražené od blány, pak vlnění prošlé blanou, odražené ode dna a opět prošlé blanou atd. Tato vlnění dají složena vlnění postupující záporným směrem osy x, amplitudy B a s fásovým pošinutím η; B a η závisí na dané frekvenci dopadajícího vlnění ω. Lze tedy vzíti v prostoru před blanou pošinutí vzduchové částice u ve tvaru

$$u = A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx + \eta).$$

Uvnitř trubice může být při ustáleném pohybu — nepočítáme-li s útlumem vln ve vzduchu — jen stojaté vlnění s uzlem na dně. Je tedy uvnitř trubice

$$v = C \sin k\,(L - x) \cos(\omega t - \vartheta),$$

kde ϑ opět závisí na ω.

Na bláně, t. j. pro $x = 0$, musí být $u = v = w$, kde

$$w = P \cos \omega t + Q \sin \omega t$$

značí výchylku blány. Vyjádříme-li tuto podmínku a napíšeme-li, že jí musí vyhovovati při ustáleném stavu členy se $\sin \omega t$ a členy s $\cos \omega t$ zvlášť, dostaneme:

$$\begin{cases} A + B \cos \eta = C \sin kL \cos \vartheta = P \\ \quad - B \sin \eta = C \sin kL \sin \vartheta = Q. \end{cases}$$

Podmínku pro kmity blány (4) doplníme na levé straně členem od útlumu, na pravé členem, znamenajícím přetlak vzduchu na vnější straně blány proti tlaku střednímu:

$$m \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial v}{\partial t} + K^2 v \right) = \varrho V^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \text{ pro } x = 0. \qquad (9)$$

Koeficient útlumu H a konstanta K platí pro blánu kmitající ve vzduchoprázdnu. Pro odlišení od koeficientu útlumu, který by se naměřil u volné blány na vzduchu za předpokladu, že platí rovnice (8), budu označovati H jako vlastní koeficient útlumu. Dosadíme-li sem příslušné výrazy za u, v, dostaneme opět dvě rovnice, které lze napsati po krátké úpravě ve tvaru

$$\begin{aligned} [\gamma (K^2 - \omega^2) + \omega \operatorname{cotg} kL]\, C \sin kL \cos \vartheta + 2\omega H \gamma C \sin kL \sin \vartheta &= \\ = \omega B \sin \eta&, \\ [\gamma (K^2 - \omega^2) + \omega \operatorname{cotg} kL]\, C \sin kL \sin \vartheta - 2\omega H \gamma C \sin kL \cos \vartheta &= \\ = \omega B \cos \eta - \omega A&. \end{aligned}$$

Máme tedy čtyři rovnice pro B, C, η, ϑ. Užijeme-li prvých dvou, lze psáti druhé dvě

$$\left[\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) + \operatorname{cotg} kL \right] P + (2H\gamma + 1)\, Q = 0,$$

$$-(2H\gamma + 1)\, P + \left[\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) + \operatorname{cotg} kL \right] Q = -2A.$$

Odtud

$$P = \frac{1}{D}\, 2\, (2H\gamma + 1)\, A,$$

$$Q = -\frac{1}{D}\, 2 \left[\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) + \operatorname{cotg} kL \right] A,$$

kde

$$D = \left[\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) + \operatorname{cotg} kL \right]^2 + (2H\gamma + 1)^2.$$

Z toho dostaneme pro amplitudu blány $U = \sqrt{P^2 + Q^2}$ vzorec

$$U = \frac{2A}{\sqrt{\left[\gamma\left(\frac{K^2}{\omega} - \omega\right) + \operatorname{cotg} kL\right]^2 + (2H\gamma + 1)^2}}. \tag{10}$$

Ostatní veličiny vypočtou se podle vzorců

$$\begin{aligned} C &= U/\sin kL, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= Q/P, \\ B^2 &= (P - A)^2 + Q^2, \\ \operatorname{tg} \eta &= Q/(A - P). \end{aligned} \tag{11}$$

Je patrno, že rozkmit blány dosahuje maxima $2A/(1 + 2H\gamma)$, je-li výraz v hranaté závorce ve vzorci (9) roven nule, neboli, resonance nastává pro tóny, jejichž kruhová frekvence ω vyhovuje rovnici

$$\gamma\left(\frac{K^2}{\omega} - \omega\right) + \operatorname{cotg} \frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2} = 0. \tag{12}$$

Výsledek tedy je: *Tóny, na něž resonuje zavřený resonátor nezávisí na vlastním útlumu blány H. Resonátory týchž rozměrů, jejichž blány se liší při stejné hmotě a stejných koeficientech K jen hodnotami vlastních útlumů, resonují na tytéž tóny.*

Ovšem vlastní frekvence těchto blan ve vzduchoprázdnu se od sebe liší, protože souvisí s H podle známého vztahu $\Omega^2 = K^2 - H^2$. V mezním případě, je-li vlastní útlum H roven nule, je Ω totožné s K. Ve skutečnosti tomu tak není. V tom je rozdíl mezi vzorcem (7) a (12), který se od něho liší jen tím, že K stojí místo vlastní frekvence Ω.

Vzorec pro C praví, že rozkmit stojatého vlnění uvnitř resonátoru není nikdy menší než rozkmit blány (rovnost nastává jen pro $\omega = (2n + 1)\,\omega_1$), a že maxima rozkmitu vlnění nastávají pro jiné frekvence ω budícího tónu než maxima rozkmitu blány. Zároveň nastanou jen, je-li $K = \omega = (2n + 1)\,\omega_1$. (Viz Bouasse, l. c. odst. 131.)

Konstantu K lze určiti přímo z pozorování kmitů blány pod recipientem na př. způsobem uvedeným v Bouassově knize Cordes et membranes, str. 448. K jinému, nepřímému způsobu vede tato úloha v podstatě řešená v několikrát citované knize v odstavci 133.

Kolmo na blánu napjatou ve velmi tenkém rámci dopadá zvukové vlnění vysílané píšťalou. Nechť je blána dosti veliká a dosti vzdálená od píšťaly, abychom mohli považovat dopadající vlnění za rovinné. Nalézti, jak závisí rozkmit blány na frekvenci tónu píšťaly.

Úloha je (opět za zjednodušujícího předpokladu, že místo blány lze vzíti rovinný oscilátor) vlastně rozřešena, ale výsledek je napsán jen pro zvláštní případy. Poněvadž je výpočet velmi krátký, podám jej zde doplněný, s malou změnou.

Osa x budiž kolmá na blánu, počátek položme do rovnovážné polohy. Vlnění, které dopadá v kladném směru, měj tvar

$$A \cos(\omega t - kx).$$

Od blány se odráží část $B \cos(\omega t + kx + \alpha)$, takže pošinutí u před blanou je

$$u = A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx + \alpha).$$

Vlnění blanou prošlé je

$$v = A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Pro $x = 0$ je $u = v = w$, kde w je výchylka blány:

$$w = P \cos \omega t - Q \sin \omega t,$$
$$P = A + B \cos \alpha,$$
$$Q = B \sin \alpha.$$

Pohybová rovnice blány je opět rovnice (9). Dosadíme za u a v příslušné výrazy a obdržíme po úpravě:

$$\gamma\left(\frac{K^2}{\omega} - \omega\right) P - (2 + 2H\gamma)\, Q = 0,$$

$$(2 + 2H\gamma)\, P + \gamma\left(\frac{K^2}{\omega} - \omega\right) Q = 2A.$$

Odtud vypočteme P a Q. Pro rozkmit blány $U = \sqrt{P^2 + Q^2}$ máme výsledek:

$$U = \frac{A}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}\left(\frac{K^2}{\omega} - \omega\right)^2 + (1 + H\gamma)^2}}.$$

Je zřejmo, že maximum rozkmitu blány nastane, když kruhová frekvence ω budícího tónu nabude hodnoty K[3]). Je tedy možno určiti K metodou resonance. Bouasse a Fouché určovali touto metodou vlastní frekvenci blány, u níž zanedbávali útlum; měřili tedy vlastně K. Vlastní frekvence blány s útlumem je ve vzduchoprázdnu (držíme-li se stále užívaných zjednodušení) $\sqrt{K^2 - H^2}$, na vzduchu ještě menší. Je známo, že blána resonuje na tón vyšší, než jaký vydá sama rozkmitána úderem. (Viz na př. Lord Rayleigh, Theory of Sound I, str. 346, H. Bouasse, Cordes et membranes, odst. 258.)

[3]) Zajímavý je rozdíl proti výsledku podobné úlohy pro hmotný bod, jenž kmitá ponechán sám sobě po přímce podle rovnice (8). Působí-li naň síla tvaru $A \sin \omega t$, nabývá jeho rozkmit maxima pro hodnotu $\omega = \sqrt{K^2 - 2H^2}$, závislou na útlumu.

Při odvozování vzorce (10) počítali jsme tak, jako by byly předpoklady b) a c) splněny pro každé ω a jako by se dal zanedbati útlum vlnění v resonátoru. Toto zanedbání vede pro ta ω, pro něž nastává minimum rozkmitu blány, k zřejmému rozporu se skutečností. Na př. pro $\omega = 2\omega_1$ plyne z rovnice (10) a z prvního vzorce (11), že rozkmit blány je roven nule a že se uvnitř resonátoru udržuje stojaté vlnění o amplitudě $2A$ s uzly na dně a na bláně, což není možné. (Srov. s odst. 127, 3° cit. knihy.) Počítáme-li s útlumem vlnění a vezmeme pošinutí v uvnitř resonátoru ve tvaru

$$v = Ce^{-\delta x} \sin [\omega t + k(L - x) - \vartheta] - Ce^{-\delta(2L-x)} \,.\, \sin [\omega t - k(L - x) - \vartheta],$$

dojdeme týmž postupem ke vzorci obdobnému vzorci (10), který z něho plyne položením $\delta = 0$. Tento vzorec zde neuvádím, protože je velmi složitý a protože podmínka pro maximum rozkmitu z něho plynoucí neliší se při malém δ prakticky od podmínky (12). Zmíněný rozpor však už neobsahuje, protože dává pro minimum rozkmitu hodnotu sice malou, ale od nuly různou. Rovnici (12) lze pokládati za správně odvozenou, platí-li vzorec (10) aspoň v jakémsi okolí resonance. Pro resonanci byla však platnost předpokladů b) a c) zjištěna pokusem. Je ovšem nutno míti na zřeteli, že rovnice (12) byla odvozena za předpokladů velmi zjednodušujících, které vyloučily z úvahy vliv svrchních tónů blány.

U resonátoru otevřeného dostali bychom rovnici obdobnou

$$\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) - \operatorname{tg} \frac{\omega}{\omega_0} \pi = 0,$$

která se však hodí ke zkoušení daleko méně, protože je nutno počítati s opravou na otevřený konec. Mohli bychom sice zavésti tuto opravu přibližným způsobem do počtu a dojíti k vzorci složitějšímu, ale jeho zkoušení neřeklo by nic o tom, do jaké míry jsou výše uvedená zjednodušení přípustná, protože případné odchylky jimi způsobené nedaly by se odlišit od odchylek způsobených nepřesností opravy.

Poslední rovnice neobsahuje, stejně jako rovnice (5), frekvence, jež by byly celými násobky frekvence hlubokého základního tónu.

*

Remarques sur les vibrations de la membrane au bout d'un bourdon.

(Extrait de l'article précédent.)

M. Bouasse a établi dans son livre Tuyaux et résonateurs la relation (7) qui a lieu entre la pulsation ω d'un partiel de la membrane au bout d'un bourdon, la masse m de la membrane par unité d'aire et la pulsation ω_1 du fondamental du bourdon. M. Bouasse a fait le calcul en supposant la membrane sans amortissement propre, dont les vibrations dans le vide sont régies par l'équation (3) et en négligeant les variations de la pression extérieure.

Supposons la membrane avec l'amortissement propre (l'équation (3) sera remplacée par celle (8)) et considérons le cas ou la membrane est excitée par une onde extérieure $A \cos (\omega t - kx)$. Calculons la valeur de l'amplitude U de la membrane en fonction de ω.

Le résultat est donné par la formule (10), L étant la longueur du bourdon. Il s'ensuit que l'amplitude de la membrane est maximum pour les valeurs de ω qui satisfont l'équation (12). Ces valeurs sont indépendantes de facteur amortissant propre H de la membrane.