ÚLOHY.

Jsou-li n, k celá čísla, $0 < k \leqq n$, potom nechť $\sigma_k(n)$ značí v úlohách 2, 3, 4 součet všech součinů po k činitelích, vybraných z řady $1, 2, \ldots, n$. Na př. $\sigma_1(n) = 1 + 2 + \ldots + n$; $\sigma_2(4) = 1 . 2 + 1 . 3 + 1 . 4 + 2 . 3 + 2 . 4 + 3 . 4$ atd.

Úloha 2. Najděte obecný tvar celých kladných čísel n, pro něž číslo $\sigma_2(n)$ je dělitelno číslem $\sigma_1(n)$. Najděte nejmenší takové n.

E. Bunický.

Úloha 3. Dokažte, že pro každé celé $n \geqq 3$ je číslo $\sigma_3(n)$ dělitelno číslem $\sigma_1(n)$. Jaký význam má podíl $\sigma_3(n) : \sigma_1(n)$? *E. Bunický.*

Úloha 4. Najděte obecný tvar celých čísel $n \geqq 3$, pro něž číslo $\sigma_3(n)$ je dělitelno číslem $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. *E. Bunický.*

V úlohách 5, 6, 7 značí $t_1, t_2, \ldots$ řadu Fibonacciho, definovanou vztahy $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Úloha 5. Dokažte, že pro $n = 2, 3, \ldots$ jest $t_{2n} = t_n^2 + t_{n-1}^2$.

J. Lapšin.

Úloha 6. Dokažte, že platí

$$t_{2n+1} = t_{n+1}^2 - t_{n-1}^2, \quad t_{n+1}^2 - t_n^2 = t_{n-1}\, t_{n+2},$$
$$t_{2n+1} = t_{n-1}\, t_{n+2} + t_{n-2}\, t_{n+1}, \quad t_{2n} = \tfrac{1}{2}(t_{n+1}^2 + t_{n-2}^2),$$
$$t_{2n} = t_{n+1}\, t_{n-1} + t_n\, t_{n-2},$$
$$t_{4n} = t_n^4 + 6t_n^2 t_{n-1}^2 - 4t_n\, t_{n-1}^3 + 2t_{n-1}^4$$
$$(= (t_n^2 + t_{n-1}^2)^2 + t_{n-1}^2\,(2t_n - t_{n-1})^2).$$

Ve třetím, čtvrtém a pátém vzorci jest předpokládati $n > 2$, v ostatních $n > 1$. *E. Bunický.*

Úloha 7. Dokažte, že pro $n > 3$ platí rovnice

$$t_n^2 = t_{n'}^2 + (-1)^n\, t_{n''}^2,$$

kde

$$n' = \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4}(1 + (-1)^{n+1}), \quad n'' = \tfrac{1}{2}n - 1 - \tfrac{1}{4}(1 + (-1)^{n+1}).$$

E. Bunický.

Návod. Kořeny rovnice $u^2 = u + 1$ hoví vztahu $u^{n+2} = u^{n+1} + u^n$. Odtud snadno odvodíte vyjádření čísel t_n ve tvaru $t_n = a\alpha^n + b\beta^n$, kde α, β jsou kořeny rovnice $u^2 = u + 1$ a čísla a, b nezávisí na n. Tohoto vyjádření čísel t_n užijte k řešení úloh 5, 6, 7.

Úloha 8. Budiž $\varphi(m)$ počet oněch čísel v řadě $1, 2, \ldots, m$, jež jsou nesoudělná s m ($m > 0$ celé). Ukažte, že při daném m výraz

$$\sqrt[n-1]{\frac{(\varphi(m))^n}{\varphi(m^n)}} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

nezávisí na n. Jaká je hodnota tohoto výrazu? *E. Bunický.*

* * *

Symetrický determinant n-tého stupně je funkcí $\frac{1}{2}n(n+1)$ proměnných veličin a_{ii}, $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq k)$. Vypočítejte numerické součinitele jednotlivých členů; ty jsou vždy, nehledě ke znaménku, mocninami čísla 2. Tak na př. v determinantu stupně desátého je součin

$$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{56}a_{67}a_{75}a_{89}a_{9,10}a_{10,8}$$

násoben -2^3. Podejte obecné pravidlo. (Časopis **60** (1931), str. 263, úloha 8.) *Petr.*

Řešení. (Zaslali pp. prof. Dr. A. Hyška, Jaroměř a prof. K. Lerl, Valašské Meziříčí.)

Každý člen předloženého determinantu má tvar

$$\pm A = \pm a_{1r_1}a_{2r_2}\ldots a_{nr_n}.$$

Permutaci $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{pmatrix}$ lze psáti jednoznačně jako součin cyklů

$$\pi = (k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)(l_1, l_2, \ldots, l_\sigma)\ldots \tag{1}$$

bez společných prvků. Jestliže k nějaké permutaci π', různé od π, přísluší člen A', jenž se v důsledku vztahu $a_{ij} = a_{ji}$ rovná členu A, potom se člen A', příslušný k permutaci π', liší od A formálně jen tím, že některá a_{ij} jsou nahražena členy a_{ji}; tedy na př. místo $a_{k_1k_2}$ bude $a_{k_2k_1}$; permutace π' nahrazuje tedy index k_2 indexem k_1; dále musí v A' vystupovati člen $a_{k_2k_3}$ nebo $a_{k_3k_2}$ — první možnost je vyloučena, takže π' nahrazuje index k_3 indexem k_2 atd.; prostě π' obsahuje cyklus $(k_\varrho, k_{\varrho-1}, \ldots, k_1)$. Podobně je tomu u ostatních cyklů. Hledaný součinitel rovná se tedy až na znamení počtu permutací, jež se liší od π nejvýše tím, že některé cykly píšeme v opačném pořádku (znamení všech těchto členů je stejné, ježto třída permutace je určena počtem cyklů ve vyjádření (1), píšeme-li tam i cykly jednočlenné). Uvažme nyní, že cyklus $(k_1, \ldots, k_\varrho)$ je totožný s cyklem $(k_\varrho, \ldots, k_1)$ tehdy a jen tehdy, je-li $\varrho = 1$ nebo $\varrho = 2$. Hledaný součinitel je tedy roven 2^λ, kde λ je počet cyklů alespoň trojčlenných ve vyjádření (1).