Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Pírko

„Klasický” problém vnější balistiky a problém „nový”

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D164--D175

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123383

absorpce ozonu, mělo by se spektrum znovu objeviti. Bohužel jsou tyto části spektra již velmi slabé a teprve v nedávné době podařilo se velmi citlivým počítačem fotonů nalézti stopy slunečního spektra kolem vlnové délky 0,21μ.

„Klasický“ problém vnější balistiky a problém „nový“.

Zdeněk Pírko, Tišnov.

Úvod. Fysikální předpoklady t. zv. *speciálního problému vnější balistiky,* který nazýván stručně problém *„klasický“*, jsou tyto: osa podlouhlé střely leží stále v tečně dráhy, perturbující vlivy země a ovzduší jsou vyloučeny, vertikály tíže zemské jsou paralelní a zrychlení tíže samo je konstantní. Speciální problém studuje pak pohyb těžiště střely, v němž je soustředěna její váha, kdež působí tíže svisle dolů a síla odporu vzduchu leží v tečně dráhy proti směru rychlosti; trajektorie je křivka rovinná. Od problému klasického přejdeme k *„novému“* (nebo *„obecnému“*), jakmile připustíme proměnnost t. zv. *balistického koeficientu* s výškou dráhy a s rychlostí střely. Je samozřejmé, že i takto určený problém zůstává do jisté míry stále speciálním: nepřihlížíme totiž ani v tomto případě ke zmíněným perturbujícím vlivům země a ovzduší, ke konvergenci vertikál a k úbytku tíže s výškou nebo k její změně se zeměpisnou šířkou. Vliv země a ovzduší bychom buďto vůbec nedovedli vystihnouti, nebo bychom dospěli k výrazům nesmírně složitým, ostatně na tyto vlivy lze získané veličiny vždy opraviti dodatečně; vliv sbíhavosti tíže a jejího zmenšování s výškou a pod. je v poměru k praktickým podmínkám nepatrný a kompensován rozptylem. Stejně vylučujeme z obecného problému zvláštní konstrukce střel, v nichž balistický koeficient je také ještě funkcí času, na př. střely s proměnnou vahou, s proměnným profilem a střely raketové. Za všech těchto předpokladů odpovídá „klasickému“ koeficientu balistickému koeficient „obecný“.

1. „Klasický“ speciální problém vnější balistiky. Zvolíme-li pravoúhlou kartézskou soustavu tak, aby její počátek byl v ústí zbraně, osa x byla horizontální a kladná ve směru střelby, osa y vertikální a kladná směrem nahoru, pak t. zv. *speciální problém vnější balistiky*[1]) řeší soustava diferenciálních rovnic

---

[1]) Viz na př. Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, V (Grundlagen der Mechanik der Punkte und starren Körper), 1927, str. 310 a n. nebo Cranz, Lehrbuch der Ballistik, I (Äußere Ballistik), 1925, str. 109 a n.

$$g\,\mathrm{d}x = -\,v^2\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{1}$$
$$g\,\mathrm{d}y = -\,v^2 \operatorname{tg}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{2}$$
$$g\,\mathrm{d}(v\cos\vartheta) = cv\,f(v)\,\mathrm{d}\vartheta; \tag{3}$$

k tomu lze připojiti rovnice

$$g\,\mathrm{d}t = -\,v \sec\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{4}$$
$$g\,\mathrm{d}s = -\,v^2 \sec\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{5}$$

V těchto rovnicích značí x, y souřadnice obecného bodu dráhy, ve kterém je těžiště střely po uplynutí času t a kterým proletuje rychlostí v, při tom směr rychlosti svírá s osou úseček úhel ϑ (kladný na větvi výstupné, záporný na sestupné); s je oblouk dráhy. Dále $f(v)$ značí funkci vystihující odpor vzduchu, který působí na střelu zpožděním

$$\mathrm{R} = -\,c\,f(v); \tag{6}$$

v tomto vztahu je c t. zv. „klasický" *balistický koeficient střely* a jeho konvencionelní hodnota[2]) jest

$$c = i\frac{a^2}{P}\Delta_0, \tag{7}$$

kdež i značí t. zv. koeficient tvaru, charakterisující číselně balistickou výhodnost střely oproti etalonu, pro který byla stanovena experimentálně funkce $f(v)$ a pro který $i = 1$, a je ráže, P váha střely a Δ_0 je normální specifická váha vzduchu v úrovni ústí zbraně. Přesto, že výraz pro c má svůj fysikální rozměr, a to $[L^{-1}]$, užívá se v balistice vnější jen jako číselný faktor; pro moderní typy dělostřeleckých střel se pohybuje v mezích $6 \,.\, 10^{-5} \leq c \leq 200 \,.\, 10^{-5}$.

Rovnice (3), nazývaná hlavní rovnicí nebo prostě hodografem, je jediná, která za předpokladu, že faktor c je konstantní, obsahuje pouze dvě proměnné v, ϑ. Můžeme tedy tuto rovnici principielně integrovati (počáteční podmínky jsou $\vartheta = \varphi$, $v = v_0$, φ úhel výstřelu, v_0 počáteční rychlost) a obdržíme

$$v = H(\vartheta).$$

Tím jsme úlohu převedli na kvadratury

---

[2]) Tímto způsobem je balistický koeficient definován na př. ve Francii (a u nás); jiné státy užívají i hodnot jiných. Pro nás je ještě důležitý italský (nebo ruský, Siacci a Zabudský) koeficient C, který splňuje vztah

$$Cc = k,$$

kde k je číselná konstanta. V důsledku toho na místo funkce $f(v)$ nastupuje samozřejmě jiná příslušným způsobem modifikovaná funkce odporu vzduchu. Viz podrobněji na př. Okuněv, Vnešnjaja i vnutrennaja ballistika, 1930, str. 84.

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{g} H^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta, \qquad \mathrm{d}y = -\frac{1}{g} H^2(\vartheta)\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta,$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{g} H(\vartheta)\sec\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta, \quad \mathrm{d}s = -\frac{1}{g} H^2(\vartheta)\sec\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta;$$

první dvě z těchto rovnic pak určují trajektorii parametricky.

2. „Obecný" balistický koeficient a „obecný" hodograf. Od „klasického" speciálního problému vnější balistiky přejdeme k *problému „obecnému"* nejjednodušeji na základě podrobnějšího studia faktoru c. Struktura balistického koeficientu byla vytvořena na podkladě experimentálním; tak bylo nalezeno, že síla odporu vzduchu $\mathbf{O}$ může býti vyjádřena v prvním přiblížení vztahem

$$\mathbf{O} = \varkappa a^2 \delta_y F(v),$$

kdež $\varkappa$ je koeficient úměrnosti, δ_y hustota vzduchu ve výšce y, $F(v)$ odporová funkce, která má obecně různou podobu pro různé typy střel. Označíme-li tedy m hmotu střely, je zpoždění odporu vzduchu $\mathbf{R}$ dáno rovnicí

$$|\,\mathbf{R}\,| = \frac{\mathbf{O}}{m} = \frac{g}{P}\,\mathbf{O} = \varkappa\,\frac{a^2}{P}\,\delta_y\,g\,F(v).$$

Tento vztah můžeme psáti jinak

$$|\,\mathbf{R}\,| = \frac{a^2}{P}\,.\,\Delta_0\,.\,\frac{\Delta_y}{\Delta_0}\,.\,\varkappa\,F(v). \tag{1}$$

Obecně však je poměr specifických vah Δ_0, Δ_y funkcí výšky, tedy

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_0} = \varphi(y), \quad \lim \varphi(0) = 1, \quad \lim \varphi(\infty) = 0; \tag{2}$$

posléze výraz $\varkappa\,F(v)$ můžeme psáti v poněkud pozměněném tvaru

$$\varkappa\,F(v) = i\,f(v),$$

kde $f(v)$ představuje experimentální funkci rychlosti pro střelu, kterou jsme přijali za normální (etalon), a i charakterisuje odpor vzduchu na střelu danou vůči odporu, jemuž je vystaven etalon. Není tedy obecně faktor i konstantou, nýbrž

$$i = \varkappa\,\frac{F(v)}{f(v)} = i(v). \tag{3}$$

Z rovnic (1), (2), (3) tudíž plyne

$$\mathbf{R} = -\,i(v)\,\frac{a^2}{P}\,\Delta_0\,\varphi(y)\,f(v),$$

a tudíž pro *„obecný" balistický koeficient střely* hodnota

$$c = i(v)\,\frac{a^2}{P}\,\Delta_0\,\varphi(y). \tag{4}$$

Srovnejme rovnici (4) s rovnicí 1, (7); identifikace vyžaduje, abychom položili

$$i(v) \equiv \text{konst}, \quad \varphi(y) \equiv 1;$$

tyto dva vztahy charakterisují „klasický" speciální problém vůči problému „obecnému"; faktor c je závislý na dvou proměnných podle rovnice (4), na místo aby měl konstantní hodnotu, jak byla dána rovnicí 1, (7). „Klasický" balistický koeficient můžeme považovati buďto za počáteční hodnotu koeficientu „obecného" nebo za jeho střední hodnotu, podle toho, jakým způsobem chceme interpretovati veličiny i a Δ_0 v rovnici 1, (7).

Použijeme-li vztahů (2) a (3) na základní soustavu 1, (1) až (5), vidíme, že zůstane nezměněna až na rovnici 1, (5): „klasický" hodograf přejde v hodograf obecný, závislý nyní na třech proměnných v, ϑ, y

$$g\,\mathrm{d}(v\cos\vartheta) = c\,f(v)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{5}$$

kdež značí nyní $c = a^2\Delta_0/P =$ konst. a funkce $f(v)$ nahražuje vlastně součin $i(v)\,v\,f(v)$. Jestliže soustavy 1, (1) až (5) mohlo býti v jistých případech dosud dobře použito pro výpočet drah s poměrně malou rychlostí počáteční ($v_0 < 10^3$ m sek^{-1}), kdy prakticky mohla býti zanedbána změna specifické váhy vzduchu s výškou, nemůžeme této soustavy již použíti pro data balistiky moderní (velká počáteční rychlost, úhel výstřelu větší než 45^0, a tedy značná výška trajektorie nad úrovní ústí zbraně). Tu se ukázalo nutným přihlížeti ke změně specifické váhy vzduchu s výškou.[3])

[3]) V roce 1914 bylo v Německu propočítáno dalekonosné dělo ($a = 0{,}355$ m, $v_0 = 1150$ m sek^{-1}, $P = 340$ kg) „klasickou" metodou a byl očekáván dostřel 38 km. Při pokusné střelbě bylo dosaženo však dostřelu 49 km; příčina tkvěla v příliš vysoko odhadnuté střední specifické váze vzduchu ve vrstvě asi 20 km vysoké. Správné respektování úbytku váhy s výškou vedlo pak v roce 1918 k sestrojení dalekonosného děla (Eberhard, Rausenberger) s dostřelem 120 km a s výškou vrcholu 40 km. Podobné zkušenosti byly získány i ve Francii v roce 1915 (De Sparre, $a = 0{,}406$ m, $v_0 = 940$ m sek^{-1}, $P = 920$ kg) u drah s výškou vrcholu asi 12 km. Podle ruských zpráv bylo již v roce 1930 v Americe propočítáno dělo ($a = 0{,}254$ m, $v_0 = 2590$ m sek^{-1}, $P = 181$ kg), jež má dosáhnouti dostřelu 195 km při výšce trajektorie 78 km; střely tohoto děla by se v okolí vrcholu nacházely již v hydrogeniumsféře! Viz Cavalli, Il problema balistico del prossimo avenire, Riv. Artigl. Gen., 1921 a 1922.

Ve vakuu úhel největšího dostřelu je $\varphi = 45^0$; ve skutečném prostředí byl za tento úhel dlouho pokládán úhel menší než 45^0, a to asi $43^0\,30'$ pro většinu dělostřeleckých projektilů, s tendencí zmenšovati se při rostoucím balistickém koeficientu (střely puškové, u nichž je tento úhel v mezích 30^0—35^0). Pro malé koeficienty (děla velkorážná a těžké střely) tento úhel v některých případech měří o málo více než $43^0\,30'$, a to zejména tehdy, když tak zv. stupeň odporu vzduchu n (v jednočlenném zákonu

3. Funkce $\varphi(y)$ a $i(v)$. Sledujme úbytek specifické váhy vzduchu s výškou podrobněji. Specifickou váhu vzduchu ve výši y označíme Δ_y, jeho tlak a absolutní teplotu p_y resp. T_y, odpovídající hodnoty ve výšce $y = 0$, Δ_0, p_0, T_0. Stavová rovnice ideálního plynu zní

$$\frac{p_y}{\Delta_y} = \frac{p_0}{\Delta_0 T_0} T_y; \tag{1}$$

při tom pro 50% relativní vlhkost, tlak 760 mm Hg, t. j. $p_0 = 10333$ kg/m², $T_0 = 291{,}5$ a $\Delta_0 = 1{,}206$ kg/m³ jest

$$R = \frac{p_0}{\Delta_0 T_0} = 29{,}393.$$

Podmínka vertikální rovnováhy v ovzduší je vyjádřena rovnicí

$$dp_y = -\Delta_y\, dy, \tag{2}$$

k tomu připojíme předpoklady o úbytku teploty s výškou

pro troposféru: $T_y = T_0 - \lambda y$, (3)

pro stratosféru: $T = k = \text{konst};$ (4)

teplotní gradient λ je dán podmínkou, že od rozhraní troposféry a stratosféry je teplota konstantní a rovna k abs.

Integrací soustavy rovnic (1), (2), (3) obdržíme *pro troposféru*

$$\varphi(y) = \frac{\Delta_y}{\Delta_0} = \left(1 - \lambda \frac{y}{T_0}\right)^{\frac{1}{R\lambda} - 1}. \tag{I}$$

Abychom i v případě troposféry dospěli k vztahu takového typu, který odvodíme pro stratosféru, nahraďme proměnnou teplotu T_y

---

odporu vzduchu typu $f(v) = v^n$) je větší než 3 nebo dokonce je větší než 45° pro $n \geq 5$. Viz na př. tyto teoretické úvahy: Astier, Rev. Art., IX, 1877, str. 313; Siacci, Mitt. Geg. Art. Gen.-Wes., 1888, str. 49; Zabudský, Ugol najbolšej dalnosti, 1888; a j. Ostatní literaturu o úhlu největšího dostřelu uvádí Cranz, l. c., str. 549—550. Tu však musíme uvésti, že všechna tato teoretická vyšetřování dála se pro dráhy „klasické", t. j. za předpokladu konstantní hustoty vzduchu podél celé trajektorie a byla více nebo méně na místě, pokud se jednalo o počáteční rychlosti poměrně malé a o dostatečně velké balistické koeficienty. Tu dráhy měly malou výšku a hustota se měnila v úzkých mezích, takže bylo prakticky možné zavésti za hustotu vzduchu vhodné hodnoty střední. Jakmile však přejdeme k drahám „moderním", úhel výstřelu příslušný maximálnímu dostřelu vzrůstá velmi značně nad 45°. Tak na př. pro dělo ($a = 0{,}355$ m, $v_0 = 1150$ m sek^{-1}, $P = 340$ kg, $i = 0{,}37$) nalezneme pomocí Fasellových tabulek (Tavole balistiche secondarie, 1901) největší dostřel 59 551 m, příslušný k $\varphi = 50°$ (ostrý úhel doletu $\omega = 60°\,14'$); pro zmíněné dalekonosné dělo německé z roku 1918 měřil úhel největšího dostřelu dokonce 55°. Rozborem úhlu výstřelu příslušného k maximálnímu vodorovnému dostřelu v případě, že balistický koeficient je s výškou proměnný, zabývám se zvlášť v práci další.

konstantní střední teplotou T_*. Pak rovnice analogické k rovnicím (1), (2) jsou

$$\frac{p_y}{\Delta_y} = RT_*, \quad (T_* = \text{konst.}), \tag{1'}$$

$$\mathrm{d}p_y = -\Delta_y \,\mathrm{d}y; \tag{2'}$$

integrací obdržíme

$$p_y = p_0 e^{-\frac{y}{RT_*}}.$$

a tedy vzhledem k rovnici (1') $\left(R = \frac{p_0}{\Delta_0 T_0}\right)$

$$\varphi(y) = \frac{\Delta_y}{\Delta_0} = \frac{T_0}{T^*} e^{-\frac{y}{RT_*}}; \tag{II}$$

abychom mohli použíti tohoto vzorce, musíme znáti teplotu v jednotlivých vrstvách vzduchových.

Integrací soustavy rovnic (1), (2), (4), od výšky $y = 12000$ obdržíme *pro stratosféru* nejprve z rovnice

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{p_y} = -\frac{\mathrm{d}y}{RT_y}$$

vztah

$$\frac{p_y}{p_{12000}} = e^{-\frac{y-12000}{RT_{12000}}}.$$

Poněvadž $p_y/\Delta_y = p_{12000}/\Delta_{12000}$ vzhledem k předpokladu o konstantní teplotě, jest dále

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_0} = \frac{\Delta_{12000}}{\Delta_0}\frac{p_y}{p_{12000}} = \frac{\Delta_{12000}}{\Delta_0} e^{-\frac{y-12000}{RT_{12000}}},$$

a tedy konečně vzhledem ke vztahu (3) a (I)

$$\varphi(y) = \frac{\Delta_y}{\Delta_0}\left(1 - \lambda\,\frac{12000}{T_0}\right)^{\frac{1}{R\lambda}-1} e^{-\frac{y-12000}{R(T_0-12000)}}. \tag{III}$$

Teorie, zabývající se změnou hustoty vzduchu s výškou, představuje ve všech svých podrobnostech stavbu pro účely balistiky velmi složitou.[4]) Zde aspoň poznamenejme, že za předpokladu stálosti veličin T_0 (normální hodnota), T_{y*} (střední hodnota), T_* (střední hodnota), vedou rovnice (II), (III) na známý zákon Besselův typu (α, β konstanty)

$$\varphi(y) = \alpha e^{-\beta y}.$$

---

[4]) Obsažnou literaturu o tomto předmětu uvádí Cranz, l. c., str. 548. Zde uveďme aspoň jako základní práci pro studium těchto otázek: Eberhard, Einiges über die Ballistik großer Schußweiten, Art. Monatshf., 1923.

Předcházející text je třeba doplniti několika poznámkami. Aby vystihl úbytek specifické váhy vzduchu s výškou, užíval Saint-Robert (od roku 1872) lineární závislosti tvaru

$$\Delta_y = \Delta_0 (1 - 0{,}00008y);$$

postupem doby se ukázalo, že pravděpodobnější hodnota číselného koeficientu je větší, tak Charbonnier (od roku 1904) užívá vztahu

$$\Delta_y = \Delta_0 (1 - 0{,}00011y).$$

Oba tyto vztahy je možno použíti jen pro dráhy, jejichž výška vrcholu nepřesahuje 3000 m; v dalším spojuji lineární závislost se jménem Saint-Robertovým. Vzorce Besselova užívá balistika od roku 1918 ve tvaru Everlingově

$$\Delta_y = \Delta_0 e^{-0{,}000\,106y}.$$

Úbytek specifické váhy vzduchu s výškou snažil se již roku 1783 vystihnouti Legendre, který kladl

$$\Delta_y = \Delta_0 \frac{1}{1 + 10^{-4}y}.$$

Je patrno, že vztahy Saint-Robertův a Legendreův aproximují zákon Besselův, který — jak ukázal Eberhard — je dosud pro účely balistiky nejvhodnější, neboť velmi věrně representuje úbytek specifické váhy vzduchu až po ty výšky, kterých dosáhly střely za světové války (asi 50 km). Přes to i zákony Saint-Robertův a Legendreův mají význam pro balistické výpočty, neboť v určitých intervalech mohou nahraditi teoretický zákon Besselův a tak podstatně zkrátiti zdlouhavý číselný výpočet dráhy střely. Těmito zákony lze totiž v takových intervalech přibližně vyjádřiti exponenciální závislost Besselovu lineárně (tetivami) nebo kvadraticky (obloukem hyperboly).

Jestliže se nacházíme při teoretickém studiu funkce $\varphi(y)$ na poli poměrně úzkém, ukazuje funkce $i(v)$ („Koeffizient unserer Unkenntnis", Cranz) v míře největší na souhrn těch pochyb, které má vnější balistika o absolutní platnosti balistického koeficientu.[5]) Funkcionální podstata koeficientu i je totiž věcí konvence. Jednak, vezmeme-li v úvahu zákony jednočlenné tvaru μv^ν, vidíme, že můžeme položiti

$$f(v) \sim i(v)\, v\, f(v) = \mu v^{\nu_1} v^{\nu_2} v, \quad \nu_1 + \nu_2 + 1 = \nu;$$

s druhé strany a fortiori panuje stejná libovůle při zákonech vícečlenných. A tak tomu je nejen při empirických zákonech o od-

---

[5]) I v tomto případě se jedná o literaturu velmi obsáhlou. Uvádím aspoň: Dupuis, Expériences récentes sur la résistance de l'air, Mém. Art. Franç., 1928.

poru vzduchu, ale i při zákonech odvozených teoreticky, které vesměs mají tvar složitější, jako je na př. první zákon Lorenzův (1907) (k, k' konstanty), závisící na průřezu a délce střely, c rychlost zvuku)

$$f(v) \sim i(v)\, v\, f(v) \equiv k_1 v + k_2 v^2 + \frac{k_3 v^3 + k_4 v^4}{\sqrt{(c^2 - v^2)^2 + k'_2 v^2}},$$

nebo druhý (1917), formálně poněkud jednodušší,

$$f(v) \sim i(v)\, v\, f(v) \equiv k_2 v^2 \left(1 + \frac{k_4 v^4}{(v^2 - c^2)^2 + k'_2 v^2}\right) + k_1 v,$$

a zákon Sommerfeldův (1910, odvozený původně pro teorii setrvačníku)

$$f(v) \sim i(v)\, v\, f(v) \equiv k_2 v^2 + k\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right).$$

Přirozeně vnější balistika snažila se nalézti vzorce vlastní a z nich nejdůležitější jsou Eberhardův[6]) a Trofimův.[6]) jejichž tvar je resp.

$$\frac{1}{i(v)} = k + \frac{k_{-1}}{v} + k_1 v,$$

$$i(v) \equiv 1 - k_1 (v - k_2)^k,$$

které ovšem platí s určitými hodnotami konstant jen pro určité typy střel a určité intervaly rychlostí; hodnota funkcí $i(v)$ s klesající rychlostí nepatrně stoupá. V celku však, a to je nejdůležitější, hodnota funkce $i(v)\, v\, f(v)$ s klesající rychlostí střely nutně klesá.

Pro teoretické úvahy není tvar této funkce nijak podstatný; nám jde pouze o to, abychom ukázali, že takové funkce existují, jsou analytické v určitém oboru a mají skutečně fysikální význam.

4. Redukce obecného hodografu. Simultánní soustavu dvou diferenciálních rovnic 1, (2), a 2, (5) mezi třemi proměnnými ϑ, v, y můžeme redukovati na jedinou rovnici řádu druhého mezi proměnnými v, ϑ, tedy na *obecný hodograf v pravém slova smyslu.* Postup je tento: Z první z rovnic

$$g\,\mathrm{d}(v \cos \vartheta) = c\, f(v)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}\vartheta, \tag{1}$$

$$g\,\mathrm{d}y = - v^2 \operatorname{tg} \vartheta\, \mathrm{d}\vartheta \tag{2}$$

vypočteme postupně $\varphi(y)$, y, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\vartheta}$ a dosadíme do rovnice druhé; obdržíme tak

$$g\, \Phi'(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta + v^2 \operatorname{tg} \vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = 0, \tag{3}$$

kde Φ je inversní funkce k funkci φ, dále značí

[6]) Cranz, l. c., str. 60; Okuněv, l. c., str. 82.

$$\Phi'(\zeta) = \frac{\mathrm{d}\,\Phi(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}, \quad \zeta = \frac{g}{c}\frac{1}{f(v)}\frac{\mathrm{d}(v\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}.$$

Rovnice (3) je diferenciální rovnicí druhého řádu o dvou proměnných; rozepíšeme-li ji, obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\vartheta^2} - \frac{1}{f(v)}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta}\right)^2 - \left[2 - \frac{v}{f(v)}\right]\operatorname{tg}\vartheta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta} = v - \frac{c}{g^2}\frac{v^2}{\Phi'}\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}f(v).$$

Formálně můžeme tuto redukci provésti ještě jinak. Na př. logaritmickou derivací obdržíme z rovnice (1)

$$\frac{\mathrm{d}^2(v\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta^2} = \left[\frac{f'(v)}{f(v)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta} + \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\vartheta}\right]\frac{\mathrm{d}(v\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}, \tag{4}$$

tento vztah přejde vzhledem k rovnici (2) v jiný tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2(v\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta^2} = \left[\frac{f'(v)}{f(v)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta} - \frac{1}{g}\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}v^2\operatorname{tg}\vartheta\right]\frac{\mathrm{d}(v\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}.$$

Do této rovnice bychom dosadili hodnoty, které plynou pro veličiny $\varphi(y)$ a $\varphi'(y)$ z rovnic (1), (2) a dospěli bychom opět k diferenciální rovnici obecného hodografu. Položme však podle Bessela

$$\varphi'(y) + \beta\,\varphi(y) = 0, \text{ t. j. } \varphi(y) = \alpha e^{-\beta y};$$

obdržíme tak diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2(v\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta^2} = \left[\frac{f'(v)}{f(v)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta} + \frac{\beta}{g}v^2\operatorname{tg}\vartheta\right]\frac{\mathrm{d}(v\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}, \tag{I}$$

kterou nazveme stručně *hodografem Besselovým.*

Nebo jinak, vypočtěme z rovnice (1)

$$\varphi(y) = \frac{g}{c}\frac{1}{f(v)}\frac{\mathrm{d}(v\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = \mathbf{P}\left(v, \vartheta, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta}\right);$$

určíme-li funkci $\varphi(y)$ tak, že platí

$$\mathrm{d}\mathbf{P}\left(v, \vartheta, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta}\right) = \mathrm{d}\varphi(y) = -\alpha\,\mathrm{d}y, \text{ t. j. } \varphi(y) = 1 - \alpha y,$$

obdržíme ihned z rovnice (2)

$$\frac{g^2}{\alpha c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left[\frac{1}{f(v)}\frac{\mathrm{d}(v\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\right] - v^2\operatorname{tg}\vartheta = 0. \tag{II}$$

Tuto rovnici, která splňuje podmínku Saint-Robertovu, nazveme stručně *hodografem Saint-Robertovým.*

Posléze obdobným postupem vypočteme z rovnice (1)

$$\frac{1}{\varphi(y)} = \frac{1}{\mathbf{P}\left(v, \vartheta, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta}\right)}, \quad \mathrm{d}\left[\frac{1}{\mathbf{P}\left(v, \vartheta, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta}\right)}\right] = \mathrm{d}\left[\frac{1}{\varphi(y)}\right],$$

a určíme funkci $\varphi(y)$ tak, že splňuje podmínku Legendreovu

$$\mathrm{d}\left[\frac{1}{\varphi(y)}\right] = \alpha\, \mathrm{d}y, \quad \text{t. j.} \quad \varphi(y) = \frac{1}{1+\alpha y};$$

z rovnice (2) obdržíme snadno

$$\frac{c}{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left[\frac{f(v)\,\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}(v\cos\vartheta)}\right] + v^2 \operatorname{tg}\vartheta = 0, \tag{III}$$

nazveme ji tudíž stručně *hodografem Legendreovým.*

Význam hodografu Besselova, Saint-Robertova a Legendreova spočívá v tom, že tyto rovnice přibližně vystihují změnu specifické váhy s výškou a dále, že za jistých předpokladů o funkci odporu, balisticky významných, dají se integrovati elementárními metodami.[7])

5. Teorém o rychlosti obecné dráhy. Euler a Saint-Robert[8]) udali řadu vlastností všeobecného rázu, které jsou splněny na drahách „klasických". Tyto vlastnosti se však podstatně modifikují, jakmile přejdeme k drahám obecným, t. j. jakmile sledujeme zejména úbytek specifické váhy s výškou. Pro nás představuje nejzajímavější otázku průběh rychlosti podél dráhy. U drah „klasických" s poměrně malou výškou vrcholu rychlosti stále ubývá až do bodu minimální rychlosti v_m, který je za vrcholem trajektorie; prvky bodu minimální rychlosti ϑ_m, v_m splňují vztah

$$c\, f(v_m) + g \sin \vartheta_m = 0,$$

zde je c „klasický" balistický koeficient s vhodně volenými hodnotami Δ_0 a i, $f(v)$ odporová funkce pro etalon střely. Od bodu minimální rychlosti rychlost stále roste k t. zv. mezné rychlosti Huyghensově v_l, kterou nemůže překročiti a která jest určena rovnicí

$$c\, f(v_l) - g = 0.$$

U drah „obecných" je tomu jinak. Pohybová rovnice podél tečny dráhy na oblouku vzestupném má tvar

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -c\, f(v)\, \varphi(y) - g \sin \vartheta, \tag{1}$$

kdež

$$c \sim \frac{a^2}{P}\Delta_0, \quad f(v) \sim i(v)\, v\, f(v).$$

Z tohoto vztahu nejprve plyne, že na celé vzestupné větvi je tangenciální zrychlení stále záporné, t. j. rychlosti od ústí až do vrcholu

---

[7]) Speciální případy integrability rovnice (3) se zabývám v práci jiné.

[8]) Přehledně uvádí tyto vlastnosti každá učebnice vnější balistiky; podrobná literatura pro speciální otázky je udána v Cranz, l. c., str. 549 a n.

($\vartheta = 0$) stále ubývá. Za vrcholem však oba členy pravé strany rovnice (1) mají znaménko opačné, negativní člen $- c\, f(v)\, \varphi(y)$ zprvu klesá, neboť odporová funkce s klesající rychlostí klesá velmi rychle a funkce $i(v)$, $\varphi(y)$ vzrůstají velmi pomalu, positivní člen $- g \sin \vartheta = g \sin (-\vartheta)$ roste s rostoucím $-\vartheta$. Limitní hodnota v_m je pak určena rovnicí

$$c\, f(v_m)\, \varphi(y_m) + g \sin \vartheta_m = 0;$$

uvážíme-li, že limitní hodnota y_m, za těch omezujících předpokladů, které jsme vytkli v úvodu, je plně určena počátečními podmínkami c, v_0, $\vartheta_0 = \varphi$ (φ úhel výstřelu), můžeme tuto rovnici psáti přehledněji

$$F(c, v_0, \varphi; v_m) + g \sin \vartheta_m = 0. \tag{2}$$

Pomocí rovnic (viz 1 (4))

$$\frac{dv}{dt} = - F(c, v_0, \varphi; v) + g \sin (-\vartheta),$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = - F'(c, v_0, \varphi; v) \frac{dv}{dt} + \frac{g^2}{v} \cos^2 \vartheta$$

a rovnice (2) pak dokážeme,[9]) že rychlost v tomto bodě je minimální, je-li $\varphi \neq \pm \frac{1}{2}\pi$, t. j. jedná-li se o dráhu křivou. Pro nás představuje nejdůležitější výsledek okolnost, že bod nejmenší rychlosti existuje i na drahách „obecných", a to opět v blízkosti vrcholu a na větvi sestupné.

Sledujme „obecnou" dráhu dále. Obě dráhy, „klasická" i „obecná", mají svislou asymptotu; ve vzdálenosti dostatečně velké můžeme tedy psáti pohybovou rovnici „obecné" dráhy podél příslušné vertikály ve tvaru

$$\mathbf{R} \equiv \frac{dv}{dt} = g - c\, f(v)\, \varphi(y), \tag{3}$$

aproximujíce skutečný pohyb pohybem přímočarým a vertikálním. Na této části trajektorie je jistě rychlost dostatečně malá a můžeme tudíž položiti $f(v) = \lambda v^2$; aniž bychom přihlíželi ke struktuře výrazu $f(v) \sim i(v)\, v\, f(v)$, vystihujeme tu pouze obě síly, které na střelu působí. Položíme-li tedy $dy/dt = v$, $2c\lambda = \varkappa$, můžeme psáti rovnici (3) ve tvaru

$$\frac{dv^2}{dy} = 2g - \varkappa v^2\, \varphi(y).$$

Integrací této rovnice obdržíme

---

[9]) Viz Siacci, Riv. Artigl. Gen., 1901 nebo Cavalli, Balistica esterna, Testo, 1928, str. 91 a n.

$$v^2 = 2g \frac{\int\limits_0^y e^{\varkappa \int\limits_0^y \varphi(y) \mathrm{d}y} \mathrm{d}y}{e^{\varkappa \int\limits_0^y \varphi(y) \mathrm{d}y}} + v_1{}^2 e^{-\varkappa \int\limits_0^y \varphi(y) \mathrm{d}y}; \qquad (4)$$

při tom předpokládáme, že pro počátek pohybu na této uvažované části dráhy platí $y = 0$ a $v = v_1$; výšku y měříme dolů ve smyslu kladném. Za těchto předpokladů je funkce

$$\varDelta_y = \varDelta_0 \, \varphi(y)$$

stále rostoucí s rostoucím y a dále

$$\lim_{y=\infty} \int\limits_0^y \varphi(y) \, \mathrm{d}y = 0, \quad \lim_{y=\infty} e^{-\varkappa \int\limits_0^y \varphi(y) \mathrm{d}y} = 0.$$

Skutečná hodnota prvního členu pravé strany rovnice však jest

$$\lim_{y=\infty} \frac{e^{\varkappa \int\limits_0^y \varphi(y) \mathrm{d}y}}{\varkappa e^{\varkappa \int\limits_0^y \varphi(y) \mathrm{d}y} \varphi(y)} = \frac{1}{\varkappa} \lim_{y=\infty} \frac{1}{\varphi(y)} = 0;$$

tedy za bodem minimální rychlosti se rychlost „obecné" dráhy blíží k nule. To však znamená, že rychlost střely na „obecné" dráze stále klesá až do bodu minimální rychlosti, poté prochází maximem a teprve potom klesá.[10])

---

[10]) Tyto výsledky dává i pracný výpočet po obloucích postupných. Na př. pro dělo ($a = 0{,}355$ m, $v_0 = 1150$ m sek^{-1}, $P = 340$ kg, $i = 0{,}37$, $\varphi = 50^0$) nalezneme: rychlost ve vrcholu 455 msek^{-1}, rychlost minimální 450 m sek^{-1}, rychlost maximální 588 m sek^{-1}, rychlost konečná v úrovni ústí zbraně 547 m sek^{-1}.