Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jaroslav Bílek

Pythagorova věta ve třetí třídě středních škol

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D265--D268

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123381

VYUČOVÁNÍ.

Pythagorova věta ve třetí třídě středních škol.

Dr. **Jaroslav Bílek,** Praha.

Podle dřívějších osnov se učilo Pythagorově větě ve třetí třídě až ke konci školního roku, někdy v květnu. A nebylo to jinak možné. Neboť předpokládá znalost druhých mocnin a odmocnin čísel zvláštních, které se probíraly v aritmetice téměř až ke konci látky III. tř. A bylo to jen ke škodě. Neboť Pythagorova věta — tak důležitá z látky třetí třídy — nemohla se náležitě zažíti, utvrditi. Když však podle Návrhu nových osnov tyto početní výkony byly přesunuty do druhé třídy, bylo možno také k Pythagorově větě dříve se dostati. Ale zase to vyžaduje náležité průpravy.

Učitel by neměl dříve k ní přikročiti — kdyby mu snad vybýval čas, může jíti dopředu a probrati proměnu lichoběžníka — dokud neprodělá v aritmetice rovnici základního tvaru $x + a = b$. Při nich upozorní a procvičí, že lze z rovnice $a + b = c$ vypočísti a neb b, podobně z rovnice $a^2 + b^2 = c^2$ vypočísti a^2 neb b^2. V geometrii třeba předem před ní zopakovati umocňování a odmocňování čísel zvláštních na obsahu čtverce. Vypočísti obsah čtverce, je-li dána jeho strana. Lze uvésti příklad, čemu se rovná obsah čtverce o straně $a = 5{,}7$; jiného čtverce o straně $b = 7{,}6$; jiného o straně $c = 9{,}5$. Dáti žákům sečísti obsahy prvních dvou čtverců a součet srovnati s obsahem čtverce třetího. (Údiv některých žáků vysvětlí repetenti.) Podobně zase z obsahu čtverce se vypočítává strana. Tak zopakovány druhé odmocniny a uvedeno řešení rovnice tvaru $x^2 = a$.

Po této průpravě uloží učitel žákům za domácí cvičení stať z knihy: Valouch-Špaček: Měřictví pro III. třídu s. š., 7. vydání, str. 19, 20, odst. 5. Tuto stať někdy uprostřed hodiny dá žákům přečísti, zdůrazní jednotlivé věty a upozorní, že za domácí cvičení mají si — ovšem na rozdíl od knihy — vystřihnouti 8 shodných pravoúhlých trojúhelníků z barevného nalepovacího papíru, sestrojiti si do domácího sešitu 2 čtverce o straně $a + b$, do každého podle návodu a obrázků v knize uvedeného vlepiti vždy 4 trojúhelníky a zodpověděti naznačené otázky. Do školního sešitu jako domácí cvičení mají narýsovati pod sebou trojúhelníky pravoúhlé o odvěsnách: 1,1; 1,2; 1,3 opět podle návodu v geometrii (str. 19, odst. 4).

Příští hodinu ihned přikročí k důkazu Pythagorovy věty. Vyjde se od úkolů napsaných ve školním sešitě, kam již žáci doma si narýsovali příslušné trojúhelníky a dokáže se — vlastně dokáží žáci sami — platnost $a^2 + b^2 = c^2$ pro speciální případy trojúhelníků postupem naznačeným v geometrii.

Tyto speciální případy se rozšíří na další speciální případy ($a = 3$, $b = 4$, $c = 5$) prostým měřením. Poté dojde se k obecnému důkazu věty. Žáci otevrou si domácí sešity s úkolem daným minulou hodinu. Každý žák do školního sešitu na novou stránku narýsuje si svůj trojúhelník pravoúhlý, jak si jej doma vystřihl. K němu připojí čtverec o straně $a + b$, do něhož vkreslí — na základě prvního obrázku domácího cvičení — ještě další 3 trojúhelníky, jak je byl vlepil. Ony trojúhelníky nyní vyčárkuje a zbývá čtverec o straně c. K tomuto čtverci připojí dolů druhý čtverec o straně $a+b$, do něhož vkreslí zase podle domácího cvičení 4 trojúhelníky, a zbývají 2 čtverce o obsahu a^2, b^2. — Žáci sami dojdou k výsledku po diskusi a po zodpovědění otázek v knize uvedených:

čtverec $= 4\triangle + c^2$,

čtverec $= 4\triangle + a^2 + b^2$, z čehož odvodí $a^2 + b^2 = c^2$.

Další postup použití Pythagorovy věty jest známý.

Ale hned další hodinu jest radno upustiti od obvyklého psaní Pythagorovy věty a raději zavésti rovnici, jak vyplývá ze slovního znění:

(1) $o_1^2 + o_2^2 = p^2$; [(1′) $p^2 = o_1^2 + o_2^2$].

Na základě tohoto označení slabší a méně chápaví žáci rychleji se orientují, než úvahami, že to, co bylo označeno c v pravoúhlém trojúhelníku, není c, ale b v trojúhelníku rovnoramenném, nebo a (v kosočtverci), že to, co bylo v trojúhelníku b, jest zase $\frac{1}{2}c$, nebo $\frac{1}{2}e$ jinde atd.

Učitel upozorní, že při vypočítání přepony jest dobře vyjíti od rovnice (1′), jinak od rovnice (1). Jest dobře při výpočtu odvěsny na počátku odvozovati vše od základu, a neučiti žáky nějakému odříkávání: „Odvěsna se vypočte, když . . .“.

Na příklad při trojúhelníku rovnoramenném

$$o_1^2 + o_2^2 = p^2, \quad (\tfrac{1}{2}c)^2 + v^2 = b^2, \quad (\tfrac{1}{2}c)^2 + 4^2 = 5^2 \text{ atd.}$$

Tento postup je trochu zdlouhavější, během doby se však zredukuje a bystřejší žáci sami si jej zjednodušují.

Pro propracování Pythagorovy věty na speciálních příkladech nejlépe vyjíti od řešení trojúhelníku pravoúhlého, obdélníku, trojúhelníku rovnoramenného, kosočtverce, lichoběžníku rovnoramenného a pravoúhlého, jichž strany jsou dány zvláštními čísly. Mezitím učitel musí si v aritmetice připravovati látku pro další, probrati mocniny (slučování, násobení), mocnění součinu a zlomku, aby žákům bylo jasné $(2a)^2$, $(\frac{1}{2}a)^2$ atd. Ale také musí probrati základní výkony s druhou odmocninou čísel obecných. Učitel po mocninách zařadí si látku, která by se měla podle učebnice probírati teprve až v pozdější době (Lad. Červenka, Aritmetika pro třetí třídu, 1934; odstavec 70, 71; Muk, Aritmetika III., 1933; str. 118—121, str. 125—126), na př. odmocňování dvěma součinu a zlomku, aby žákům bylo známé $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Když si byl učitel již předem toto připravil v aritmetice, může přistoupiti v geometrii k obecnému výpočtu úhlopříčky čtverce, výšky a obsahu trojúhelníka rovnostranného, obsahu trojúhelníka pravoúhlého rovnoramenného, dána-li přepona a pod.

Pythagorovy věty lze ihned pak uplatniti u důkazu věty Eukleidovy. Důkaz 1. věty Eukleidovy, jak jest podán v Měřictví pro III. třídu škol střed. (Valouch-Špaček, 7. vydání, str. 21, 22) jest pro terciány dosti složitý pro zapamatování. Proto je lépe vyjíti od důkazu 2. věty Eukleidovy a na základě ní a věty Pythagorovy dokázati 1. větu.

Důkaz 2. věty zase si odvodí téměř žáci sami v domácím cvičení. V jedné hodině učitel žákům naznačí jen základní postup. Sestrojte si trojúhelník pravoúhlý (na př. s přeponou pro lepší názornost vhodně položenou) a jeho výšku. Výška rozdělí přeponu na dva úseky c_1, c_2. Sestrojte nad výškou čtverec (na př. barevnou tužkou) u úseku c_1. Tento čtverec má se proměniti v obdélník, jehož základnou jest c_1 (barevně). Zkoumejte, čemu se rovná druhá strana obdélníka. Proveďte úkol ještě jednou s obměnou, že čtverec nad výškou sestrojíte u úseku c_2. Tento čtverec promění se v obdélník o základně c_2 a má se vyšetřiti, čemu se rovná druhá strana obdélníka. Příští druhou hodinu provedou žáci na základě domácího cvičení s učitelem důkaz 2. věty Eukleidovy ($\triangle ABC$, výška $\overline{CD} = v$, $\overline{AD} = c_2$, $\overline{DB} = c_1$, čtverec $DEFC$, obdélník $DBGH$, úhlopříčka DL, průsečík M).

Podle konstrukce plyne $\square DEFC = \square DBGH$. Ale $\triangle DHE$ i $\triangle DEM$ je shodný s $\triangle ADC$. (Odvěsna v stejná a úhly stejné. Proč?) $\triangle ADC$ má stejné úhly jako $\triangle DCB$. Přímka DL jest úhlopříčkou $DBLC$ a také $DEMH$. Další úhlopříčky CB, HE jsou rovnoběžné. Proto úhly trojúhelníka DME jsou rovny úhlům DBC a pod. dále. Ze shodnosti trojúhelníků vyplývá, že $\overline{EM} = \overline{AD}$ Tedy druhá strana sestrojeného obdélníku jest druhý úsek přepony c_2. Tedy podle konstrukce plyne $v^2 = c_1c_2$. Učitel dá žákům slovy vysloviti příslušnou rovnici.

Poté přistoupí učitel k důkazu 1. věty Eukleidovy. Žáci si sestrojí opět trojúhelník pravoúhlý ABC, výšku $\overline{CD}$. Pro trojúhelník ADC se použije věty Pythagorovy. Nad b, v, c_2 se sestrojí příslušné čtverce, pro něž platí $b^2 = v^2 + c_2^2$ (1). Ježto podle 2. věty Eukleidovy $v^2 = c_1 c_2$, lze ke čtverci c_2^2 ($ADLK$) připojiti obdélník $LKMN$ o stranách c_1, c_2. Tím vznikne obdélník $ADMN$ o straně c_2 a o straně $c_2 + c_1 = c$, tedy o obsahu $c \cdot c_2$. Z rovnosti obsahů odvodí žáci, že čtverec b^2 rovná se obdélníku $ADMN$ o obsahu cc_2, čili že platí $b^2 = cc_2$. Obdobně doma dokáží, že $a^2 = cc_1$. Tyto rovnice žáci sami slovně vyjádří.

Vím, že tímto metodickým příspěvkem nepodal jsem nic nového, že většina kolegů tímto způsobem postupuje. Ale chtěl jsem upozorniti mladší kolegy (jakási zkušenost z ustanovovacích zkoušek profesorských), jakým způsobem lze vyhověti požadavkům, jež kladou Návrhy nových osnov (v tomto případě hlavně: III. Poznámky k osnovám. Úvodní slovo, pátý odstavec). Mimo to chtěl jsem podati ukázku jak se i u nás vyučuje postupem, který se vynáší jako zvláštnost v jiných zemích. Vždyť i učebnice aritmetiky i geometrie jsou hodně pro takový postup přizpůsobeny. (Viz na př. referát o učebnici Bydžovský-Teplý-Vyčichlo: Aritmetika pro IV. třídu Č. m. f., roč. roč. 64, D str. 58.) Upozorňuji tím na článek p. doc. dr. Příhody ve Věstníku pedagogickém č. 4/36, „Středoškolský student v Americe“ a na kritiku článku od Lad. Prella ve Věstníku čsl. profesorů roč. 44/36 (čís. 9—10), str. 136.

O matematických úlohách v Rozhledech.

A. Hyška, Jaroměř.

Ke článku p. kol. Lerla v loňském ročníku chci připojit několik dalších statistických dat a pokusím se načrtnouti pokyny k nápravě. Přihlížím speciálně k úlohám matematickým — doufám, že i ostatní úlohy dojdou povšimnutí některého z kolegů.

Všimněme si nejprve čísel všeobecných. V následujících tabulkách uvádím jen data z ročníků I.—III., VII.—XV. Rozhledů, zbývající tři jsem nesehnal. Při tom v první tabulce jsem v I., XIII.—XV. ročníku počet správných řešení zmenšil v poměru daných úloh, abychom mohli jednotlivé ročníky srovnávat (v I. roč. bylo 22, v XIII.—XV. roč. 25, v ostatních 20 úloh). Uvažuji také jen řešitele ze středních škol, tím se také počet (ovšem vesměs) poněkud zmenší.

ročník	I.	II.	III.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.
počet správných řešení	423	416	541	328	397	214	431	157	132	96	197	214