Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Eduard Čech

Topologické prostory

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D225--D264

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123380

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Topologické prostory.

E. Čech.

OBSAH.

1·1. Nechť P je daná množina. Pravíme, že v P je dána topologie nebo, že P je topologický prostor (v dalším krátce prostor), je-li dáno pravidlo přiřazující každé části M množiny P zcela určitou část množiny P, kterou nazveme uzávěrem množiny M a označíme zpravidla $\overline{M}$, při čemž se předpokládá, že jsou splněny následující tři axiomy:

$$(\mathrm{I}^u) \qquad \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

$$(\mathrm{II}^u) \qquad M \subset P \Rightarrow M \subset \overline{M}.$$

$$(\mathrm{III}^u) \qquad M_1 \subset M_2 \subset P \Rightarrow \overline{M}_1 \subset \overline{M}_2.$$

Prvky prostoru nazýváme body a množiny $M \subset P$ nazýváme bodové množiny.

1·2. Označení $\overline{M}$ pro uzávěr množiny $M \subset P$ je ovšem vhodné pouze, když je v P dána jediná topologie, což bude nejčastěji. Je-li v P dána více než jedna topologie, volíme pro každou z nich jeden ze znaků u, v, w atp. a mluvíme na př. o topologii u nebo o prostoru (P, u); uzávěr množiny $M \subset P$ při topologii u označíme pak uM.

Jsou-li u a v dvě topologie v P, řekneme, že u je slabší než v nebo že v je silnější než u, když

$$M \subset P \Rightarrow uM \subset vM.$$

Je-li $\mathfrak{U}$ jakýkoli neprázdný systém topologií v P, pak jeho supremum je topologie v_1 a jeho infimum je topologie v_2, kde pro každou $M \subset P$ jest

$$v_1M = \sum_{u \in \mathfrak{U}} uM, \quad v_2M = \prod_{u \in \mathfrak{U}} uM.$$

Zřejmě v_1 je nejslabší ze všech topologií, jež jsou silnější než každá topologie $u \in \mathfrak{U}$; v_1 patří do $\mathfrak{U}$, když a jen když existuje nejsilnější ze všech topologií $u \in \mathfrak{U}$ a pak v_1 je tou nejsilnější topologií. Obdobně pro v_2. Speciálně existuje vždy v P nejsilnější topologie, při níž

$$(1) \qquad \overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \emptyset \neq M \subset P \Rightarrow \overline{M} = P$$

a nejslabší topologie, při níž

$$(2) \qquad M \subset P \Rightarrow \overline{M} = M.$$

1·3. Množina $M \subset P$ se nazývá uzavřená, když $\overline{M} = M$; vzhledem k axiomu (II^u) stačí žádati $\overline{M} \subset M$. Ježto vždy $\overline{M} \subset P$, platí věta

1·3·1. P je uzavřená množina.

Z axiomu (I^u) následuje věta

1·3·2. $\emptyset$ je uzavřená množina.

Z axiomu (III^u) následuje věta

1·3·3. Průnik libovolného neprázdného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

1·4. Množina $M \subset P$ se nazývá otevřená, když množina $P - M$ je uzavřená. Tedy z vět **1·3·1** až **1·3·3** plynou věty

1·4·1. $\emptyset$ je otevřená množina.

1·4·2. P je otevřená množina.

1·4·3. Součet libovolného neprázdného systému otevřených množin je otevřená množina.

1·5. Nechť je dána topologie u v P a nechť je dána množina $Q \subset P$. Pak zavádíme vždy také do Q topologii v spjatou s danou topologií u v P způsobem, který ihned vysvětlíme. Říkáme pak, že prostor (Q, v) je vnořen do prostoru (P, u). Je-li $M \subset Q$, pak má M dvojí uzávěr, totiž jednak uzávěr uM v prostoru (P, u), jednak uzávěr vM v prostoru (Q, v). Nazýváme obyčejně uM prostě uzávěrem, kdežto vM se nazývá relativní uzávěr.

Definice relativního uzávěru je

$$vM = Q \, . \, uM.$$

Množina $M \subset Q$ je uzavřená (t. j. uzavřená v P), když $uM = M$; M je relativně uzavřená (t. j. uzavřená v Q), když $vM = M$. Podobně mluvíme o relativně otevřených množinách $M \subset Q$.

1·5·1. Když $M \subset P$ je uzavřená, pak QM je relativně uzavřená.

Důkaz. Jest $v(QM) = Q \,.\, u(QM) \subset Q \,.\, uM = QM$.

1·5·2. Když $M \subset P$ je otevřená, pak QM je relativně otevřená.

Důkaz. $P - M$ je uzavřená, tedy $Q - QM = Q(P - M)$ je relativně uzavřená.

2·1. Nechť P je prostor a nechť $a \in P$, $O \subset P$. Pravíme, že O je okolí bodu a (v prostoru P), když a nepatří do $\overline{P - O}$. Z axiomu (I^u) následuje

2·1·1. P je okolí každého $a \in P$.

Z axiomu (II^u) následuje

2·1·2. Když O je okolí bodu a, pak $a \in O$.

Místo, že O je okolím bodu a, říká se také, že a je vnitřní bod množiny O a množina všech vnitřních bodů množiny O se nazývá vnitřek množiny O. Z axiomu (III^u) následuje

2·1·3. Když O je okolí bodu a a když $O \subset O_1 \subset P$, pak také O_1 je okolí bodu a.

2·1·4. Když $a \in P$, $M \subset P$, pak $a \in \overline{M}$ tehdy a jen tehdy, když $OM \neq \emptyset$ pro každé okolí O bodu a.

Důkaz. I. Nechť není $a \in \overline{M}$. Pak $O = P - \overline{M}$ je okolí bodu a a $OM = \emptyset$.

II. Nechť O je okolí bodu a takové, že $OM = \emptyset$. Pak $M \subset P - O$, tedy $\overline{M} \subset \overline{P - O}$ a podle definice okolí není $a \in \overline{P - O}$, takže není ani $a \in \overline{M}$.

Zřejmá je věta

2·1·5. Množina $G \subset P$ je otevřená, když a jen když je okolím každého $a \in G$.

Pravíme, že $O \subset P$ je okolí množiny $M \subset P$ (v prostoru P), když O je okolí každého $a \in M$, tedy když množina M je částí vnitřku množiny O. Z vět **2·1·1** až **2·1·3** plynou věty

2·1·6. P je okolí každé $M \subset P$.

2·1·7. Když O je okolí množiny M, pak $M \subset O$.

2·1·8. Když O je okolí množiny M a když $O \subset O_1 \subset P$, pak také O_1 je okolí množiny M.

2·1·9. Nechť u a v jsou dvě topologie v P. Nechť u je slabší než v. Nechť O je okolí množiny $M \subset P$ při topologii v. Pak O je okolím množiny M při topologii u.

Důkaz. Pro $a \in M$ jest $a \in P - v(P - O)$, $u(P - O) \subset v(P - O)$, tedy $a \in P - u(P - O)$.

2·1·10. Nechť u a v jsou dvě topologie v P. Nechť pro každý $a \in P$ platí, že každé okolí O bodu a při topologii v je také okolím bodu a při topologii u. Pak u je slabší než v.

Důkaz plyne snadno z **2·1·4**.

2·1·11. Nechť Q je vnořen do P a nechť $M \subset Q$. Množina $\Omega \subset Q$ je okolím množiny M v prostoru Q, když a jen když existuje okolí O množiny M v prostoru P takové, že $\Omega = QO$.

Důkaz. I. Nechť O je okolí M v prostoru P. To znamená, že $M . \overline{P - O} = \emptyset$, takže $M . (Q . \overline{Q - QO}) = \emptyset$, t. j. QO je okolím M v prostoru Q.

II. Nechť Ω je okolí M v prostoru Q. To znamená, že $M . (Q . \overline{Q - \Omega}) = M . \overline{Q - \Omega} = \emptyset$. Nechť $O = P - (Q - \Omega)$. Pak $\Omega = QO$ a $M . \overline{P - O} = \emptyset$, t. j. O je okolím M v prostoru P.

3·1. O množině $M \subset P$ řekneme, že je $\mathbf{G}_\delta$ [určitěji, že je $\mathbf{G}_\delta(P)$], když je průnikem spočetného systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ otevřených množin.

Zřejmé jsou věty

3·1·1. Každá otevřená množina je $\mathbf{G}_\delta$.

3·1·2. Průnik spočetného systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ množin $\mathbf{G}_\delta$ je množina $\mathbf{G}_\delta$.

O množině $M \subset P$ řekneme, že je $\mathbf{F}_\sigma$ [určitěji že je $\mathbf{F}_\sigma(P)$], když je součtem spočetného systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ uzavřených množin.

Zřejmé jsou věty

3·1·3. Množina $M \subset P$ je $\mathbf{F}_\sigma$, když a jen když množina $P - M$ je $\mathbf{G}_\delta$.

3·1·4. Každá uzavřená množina je $\mathbf{F}_\sigma$.

3·1·5. Součet spočetného systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ množin $\mathbf{F}_\sigma$ je množina $\mathbf{F}_\sigma$.

Nechť Q je prostor vnořený do P. O množině $M \subset Q$ pravíme, že je $\mathbf{G}_\delta$, když je $\mathbf{G}_\delta(P)$ a že je relativní $\mathbf{G}_\delta$, když je $\mathbf{G}_\delta(Q)$; podobně mluvíme i o relativních $\mathbf{F}_\sigma$. Z vět **1·5·1** a **1·5·2** následují věty

3·1·6. Když $M \subset P$ je $\mathbf{F}_\sigma$, pak QM je relativní $\mathbf{F}_\sigma$.

3·1·7. Když $M \subset P$ je $\mathbf{G}_\delta$, pak QM je relativní $\mathbf{G}_\delta$.

3·2. O množině $M \subset P$ řekneme, že je $\mathbf{G}_d$ [určitěji, že je $\mathbf{G}_d(P)$], když je průnikem nějakého systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ otevřených množin.

Zřejmé jsou věty

3·2·1. Každá množina $\mathbf{G}_\delta$ je $\mathbf{G}_d$.

3·2·2. Průnik libovolného systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ množin $\mathbf{G}_d$ je množina $\mathbf{G}_d$.

Dále platí věta

3·2·3. Součet libovolného systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ množin $\mathbf{G}_d$ je množina $\mathbf{G}_d$.

Důkaz.[1]) Ke každé $M \in \mathfrak{S}$ existuje systém $\mathfrak{T}(M) \neq \emptyset$ otevřených množin takový, že

(1) $$\prod_{G \in \mathfrak{T}(M)} G = M.$$

Označme Φ systém všech pravidel φ, jež přiřazují každé $M \in \mathfrak{S}$ otevřenou množinu $\varphi(M) \in \mathfrak{T}(M)$. Pro každou $\varphi \in \Phi$ množina

(2) $$\Gamma(\varphi) = \sum_{M \in \mathfrak{S}} \varphi(M)$$

je otevřená podle **1·4·3**, takže stačí dokázati, že

(3) $$\sum_{M \in \mathfrak{S}} M = \prod_{\varphi \in \Phi} \Gamma(\varphi).$$

Nechť předně bod a náleží do levé strany rovnice (3). Pak existuje množina $M_0 \in \mathfrak{S}$ taková, že $a \in M_0$. Zvolme libovolně $\varphi \in \Phi$. Máme dokázati, že $a \in \Gamma(\varphi)$. Ježto $\varphi \in \Phi$, je $\varphi(M_0) \in \mathfrak{T}(M_0)$, takže podle (1) je $a \in \varphi(M_0)$, tedy podle (2) je $a \in \Gamma(\varphi)$. Nechť za druhé bod a nenáleží do levé strany rovnice (3). Podle (1) lze každé $M \in \mathfrak{S}$ přiřaditi množinu $\varphi_0(M) \in \mathfrak{T}(M)$ tak, že a nenáleží do $\varphi_0(M)$. Pak je $\varphi_0 \in \Phi$ a podle (2) a nenáleží do $\Gamma(\varphi_0)$, takže a nenáleží do pravé strany rovnice (3).

O množině $M \subset P$ řekneme, že je $\mathbf{F}_s$ [určitěji, že je $\mathbf{F}_s(P)$], když je součtem nějakého systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ uzavřených množin.

Zřejmé jsou věty

3·2·4. Množina $M \subset P$ je $\mathbf{F}_s$, když a jen když množina $P - M$ je $\mathbf{G}_d$.

3·2·5. Každá množina $\mathbf{F}_\sigma$ je $\mathbf{F}_s$.

3·2·6. Součet libovolného systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ množin $\mathbf{F}_s$ je množina $\mathbf{F}_s$.

Z vět **3·2·3** a **3·2·4** vyplývá věta

3·2·7. Průnik libovolného systému $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ množin $\mathbf{F}_s$ je množina $\mathbf{F}_s$.

Nechť Q je prostor vnořený do P. O množině $M \subset Q$ pravíme, že je $\mathbf{G}_d$, když je $\mathbf{G}_d(P)$ a že je relativní $\mathbf{G}_d$, když je $\mathbf{G}_d(Q)$; podobně mluvíme i o relativních $\mathbf{F}_s$. Z vět **1·5·1** a **1·5·2** následují věty

3·2·8. Když $M \subset P$ je $\mathbf{F}_s$, pak QM je relativní $\mathbf{F}_s$.

3·2·9. Když $M \subset P$ je $\mathbf{G}_d$, pak QM je relativní $\mathbf{G}_d$.

3·3. Souhvězdím množiny $M \subset P$ nazveme průnik všech okolí množiny M; označme je M^s. Speciálně $a^s (a \in P)$ je souhvězdí bodu a, t. j. jednobodové množiny (a).

3·3·1. Nechť $a \in P$, $M \subset P$. Jest $a \in M^s$, když a jen když $M \,.\, \bar{a} \neq \emptyset$. [Poznámka: $\bar{a}$ znamená uzávěr bodu a, t. j. jednobodové množiny (a).]

Důkaz. I. Nechť $M \,.\, \bar{a} = \emptyset$. Pak $P - (a)$ je okolí množiny M, které neobsahuje a, takže a nepatří do M^s.

[1]) Kratší důkaz je podán v **6·3** (po větě **6·3·6**).

II. Nechť $M \,.\, \bar{a} \neq \emptyset$ a nechť O je okolí množiny M. Máme dokázati, že $a \in O$. Existuje bod $b \in M \,.\, \bar{a}$. Ježto $b \in M$, O je okolí bodu b. Ježto $b \in \bar{a}$, následuje z **2·1·4**, že $O \,.\, (a) \neq \emptyset$, t. j. že $a \in O$.

Zřejmé jsou věty

3·3·2. $\emptyset^s = \emptyset$.

3·3·3. $M \subset P \Rightarrow M \subset M^s$.

Ze **3·3·1** se snadno odvodí věta

3·3·4. Pro každý neprázdný systém $\mathfrak{S}$ bodových množin jest

$$(1) \qquad \sum_{M \in \mathfrak{S}} M^s = \Big(\sum_{M \in \mathfrak{S}} M\Big)^s.$$

Snadno se dokáže věta

3·3·5. Když $M \subset P$ je $\mathbf{G}_\delta$, pak $M = M^s$.

Z **2·1·11** plyne věta

3·3·6. Nechť prostor Q je vnořen do prostoru P a $M \subset Q$. Pak souhvězdí množiny M v prostoru Q je průnik Q se souhvězdím množiny M v prostoru P.

4·1. Úplný systém okolí bodu $a \in P$ je systém $\mathfrak{O}(a)$ okolí bodu a takový, že ke každému okolí Ω bodu a existuje množina O taková, že $O \subset \Omega$ a $O \in \mathfrak{O}(a)$.

Je-li $\mathfrak{O}(a)$ úplný systém okolí bodu a, pak následuje z **2·1·1** a **2·1·2**:

$$(\mathrm{I}^o) \qquad \mathfrak{O}(a) \neq \emptyset.$$

$$(\mathrm{II}^o) \qquad O \in \mathfrak{O}(a) \Rightarrow a \in O.$$

Obráceně nechť je každému prvku a dané množiny P přiřazen systém $\mathfrak{O}(a)$ částí množiny P, vyhovující axiomům (I^o), (II^o); pak existuje v P právě jedna topologie, při níž pro každý $a \in P$ jest $\mathfrak{O}(a)$ úplný systém okolí bodu a. Neboť z definice úplného systému následuje podle **2·1·4**, že

4·1·1. Uzávěr množiny $M \subset P$ je množina těch $a \in P$, pro něž

$$O \in \mathfrak{O}(a) \Rightarrow OM \neq \emptyset.$$

Mimo to, definujeme-li uzávěr pomocí **4·1·1**, nahlédneme snadno, že platí axiomy (I^u) až (III^u) a že pro každý $a \in P$ jest $\mathfrak{O}(a)$ úplný systém okolí bodu a.

Když byla do P zavedena topologie tím, že pro každý $a \in P$ byl předepsán systém $\mathfrak{O}(a)$ vyhovující axiomům (I^o) a (II^o), říkáme, že $\mathfrak{O}(a)$ je systém definujících okolí bodu a. Tento způsob zavedení topologie je velmi oblíbený v praksi. Jest ovšem míti na paměti, že stejná topologie může býti zavedena různými volbami definujících okolí. Když $\mathfrak{O}_1$ a $\mathfrak{O}_2$ jsou dvě volby, máme stejnou topologii, když a jen když pro každý bod $a \in P$ systémy $\mathfrak{O}_1(a)$ a $\mathfrak{O}_2(a)$ jsou ekvivalentní, což znamená, že ke každé $O_1 \in \mathfrak{O}_1(a)$ existuje $O_2 \in \mathfrak{O}_2(a)$ taková, že $O_2 \subset O_1$ a že také obráceně ke každé

$O_2 \in \mathfrak{O}_2(a)$ existuje $O_1 \in \mathfrak{O}_1(a)$ taková, že $O_1 \subset O_2$. Obecněji se může státi pro každý $a \in P$, že ke každé $O_1 \in \mathfrak{O}_1(a)$ existuje $O_2 \in \mathfrak{O}_2(a)$ taková, že $O_2 \subset O_1$ (ale třeba ne obráceně). Lehko se přesvědčíme, že to nastane tehdy a jen tehdy, když první topologie je silnější než druhá.

Nechť prostor Q je vnořen do prostoru P. Nechť $\mathfrak{O}(a)$ je úplný systém okolí bodu a v prostoru P. Z **2·1·11** plyne, že systém všech množin $Q \,.\, O$, kde $O \in \mathfrak{O}(a)$, je úplný systém okolí bodu a v prostoru Q.

4·2. Obecněji nazveme úplným systémem okolí množiny $M \subset P$ systém $\mathfrak{O}(M)$ okolí množiny M takový, že ke každému okolí Ω množiny M existuje množina O taková, že $O \subset \Omega$ a $O \in \mathfrak{O}(M)$.

Zřejmá je věta

4·2·1. Když $\mathfrak{O}(M)$ je úplný systém okolí množiny $M \subset P$, pak

$$\prod_{O \in \mathfrak{O}(M)} O = M^s.$$

Pro každou $M \subset P$ existuje aspoň jeden úplný systém okolí, totiž systém všech jejích okolí. Každý úplný systém má určitou mohutnost. Jelikož v každé neprázdné množině kardinálních čísel existuje nejmenší prvek, existují úplné systémy minimální mohutnosti. Tuto mohutnost označíme $\chi(M)$ [určitěji $\chi_P(M)$ nebo $\chi_u(M)$, když u je daná topologie] a nazveme ji charakterem[2]) množiny M (v prostoru P). Specielně má každý bod $a \in P$ svůj charakter. Řekneme, že a je bod spočetnosti, když

$$\chi(a) \leqq \aleph_0.$$

Říká se, že P splňuje první axiom spočetnosti,[3]) když každý $a \in P$ je bodem spočetnosti.

Z **2·1·11** vyplývá věta

4·2·2. Když $M \subset Q \subset P$, pak

$$\chi_Q(M) \leqq \chi_P(M).$$

Speciálně Q splňuje první axiom spočetnosti, je-li vnořen do P, splňujícího první axiom spočetnosti.

4·2·3.[4]) Nechť $\mathfrak{O}(M)$ je úplný systém okolí množiny $M \subset P$. Pak lze z $\mathfrak{O}(M)$ vybrati úplný systém okolí množiny M, jehož mohutnost je $\chi(M)$.

Poznámka. Speciálně, když je v P zavedena topologie po-

---

[2]) P. Alexandroff a P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts (Verhandlingen Akad. Amsterdam 1929), str. 2.

[3]) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig, Veit & Comp., 1914), str. 263.

[4]) Loc. cit. sub[2]), str. 62.

mocí definujících systémů $\mathfrak{O}(a)$ okolí jednotlivých $a \in P$, pak každý $a \in P$ má úplný systém okolí, který je obsažen v $\mathfrak{O}(a)$ a má mohutnost $\chi(a)$.

Důkaz. Existuje úplný systém $\mathfrak{O}_0(M)$ okolí množiny M, jehož mohutnost je $\chi(M)$. Jelikož $\mathfrak{O}(M)$ je úplný systém, lze každé množině $\Omega \in \mathfrak{O}_0(M)$ přiřaditi množinu $\varphi(\Omega) \in \mathfrak{O}(M)$ tak, že $\varphi(\Omega) \subset \Omega$. Systém všech $\varphi(\Omega)$ pro $\Omega \in \mathfrak{O}_0(M)$ je úplný systém okolí množiny M, je částí systému $\mathfrak{O}(M)$ a jeho mohutnost je $\leqq \chi(M)$, tedy $= \chi(M)$.

4·3. Pseudoúplný systém okolí množiny $M \subset P$ je neprázdný systém $\mathfrak{O}(M)$ okolí množiny M takový, že

$$\prod_{O \in \mathfrak{O}(M)} O = M^s.$$

Podobně jako u úplných systémů každá $M \subset P$ má pseudoúplný systém okolí s minimální mohutností. Tuto mohutnost označíme $\psi(M)$ [určitěji $\psi_P(M)$ nebo $\psi_u(M)$, když u je daná topologie] a nazveme ji pseudocharakterem[5]) množiny M (v prostoru P). Speciálně má každý bod $a \in P$ svůj pseudocharakter $\psi(a)$.

Z **2·1·11** plyne věta

4·3·1. Když $M \subset Q \subset P$, pak

$$\psi_Q(M) \leqq \psi_P(M).$$

Vedle $\chi(M)$ a $\psi(M)$ zavedeme ještě třetí kardinální číslo, které označíme $\omega(M)$ [určitěji $\omega_P(M)$ nebo $\omega_u(M)$] a nazveme vnitřním charakterem množiny M. Rozeznáváme dva případy. Když předně M^s je okolí množiny M, položíme $\omega(M) = 1$. Když za druhé M^s není okolí množiny M, existuje aspoň jeden neprázdný systém $\mathfrak{O}(M)$ okolí množiny M [na př. systém všech okolí] takový, že

(*) $$\prod_{O \in \mathfrak{O}(M)} O \text{ není okolím množiny } M.$$

Pak existuje systém $\mathfrak{O}(M)$ s vlastností (*) a s minimální mohutností. Tato mohutnost (která je $\geqq 2$) je právě naše kardinální číslo $\omega(M)$. Specielně má každý bod $a \in P$ svůj vnitřní charakter $\omega(a)$.

Lehko se dokáže věta

4·3·2. Pro každou $M \subset P$ je

$$\chi(M) = 1 \Leftrightarrow \psi(M) = 1 \Leftrightarrow \omega(M) = 1.$$

4·3·3. Pro každou $M \subset P$ je

$$\omega(M) \leqq \psi(M) \leqq \chi(M).$$

Důkaz. Podle **4·3·2** můžeme předpokládati, že $\omega(M) > 1$, tedy že M^s není okolí množiny M. Pak každý pseudoúplný systém

[5]) Loc. cit. sub[2]), str. 60.

okolí má vlastnost (*), takže $\psi(M) \geqq \omega(M)$. Podle **4·2·1** každý úplný systém okolí je pseudoúplný, takže $\chi(M) \geqq \psi(M)$.

5·1. Nechť P je daná množina. Nechť $\mathfrak{S}$ je daný systém částí množiny P. Nechť je dáno pravidlo přiřazující každé množině $S \in \mathfrak{S}$ množinu $vS \subset P$, při čemž nechť jsou splněny následující tři axiomy.

$(\mathrm{I})^{\mathfrak{S}}$ Když $\emptyset \in \mathfrak{S}$, pak $v\emptyset = \emptyset$.

$(\mathrm{II})^{\mathfrak{S}}$ $S \in \mathfrak{S} \Rightarrow S \subset vS$.

$(\mathrm{III})^{\mathfrak{S}}$ $S_1 \in \mathfrak{S},\ S_2 \in \mathfrak{S},\ S_1 \subset S_2 \Rightarrow vS_1 \subset vS_2$.

V tom zvláštním případě, že $\mathfrak{S}$ je systém všech částí množiny P, jsou naše axiomy splněny tehdy a jen tehdy, když v je topologie v P. V obecném případě existuje v P vždy aspoň jedna topologie u taková, že $uS = vS$ pro každou $S \in \mathfrak{S}$. Dokonce existuje v systému $\mathfrak{U}$ všech takových topologií nejslabší topologie u_1 a nejsilnější topologie u_2. Uzávěry u_1M a u_2M jsou pro libovolnou $M \subset P$ takto definovány. Když v $\mathfrak{S}$ neexistuje žádná $S \subset M$, jest $u_1M = M$; když v $\mathfrak{S}$ existuje aspoň jedna $S \subset M$, pak $u_1M = M + T$, kde T je součet všech vS pro $S \in \mathfrak{S}$, $S \subset M$. Dále jest $u_2\emptyset = \emptyset$. Když $M \neq \emptyset$ a když v $\mathfrak{S}$ neexistuje žádná $S \supset M$, jest $u_2M = P$; když $M \neq \emptyset$ a když v $\mathfrak{S}$ existuje aspoň jedna $S \supset M$, pak u_2M je průnik všech vS pro $S \in \mathfrak{S}$, $S \supset M$. Důkazy učiněných tvrzení jsou lehké.

Nyní předpokládejme, že je v P dána topologie u a zvolme libovolně systém $\mathfrak{S}$ bodových množin. Pro každou $S \in \mathfrak{S}$ položme $vS = uS$ a definujme u_1 a u_2 jako výše. Stane-li se, že $u = u_1$, řekneme, že $\mathfrak{S}$ je dolní base topologie u [nebo prostoru (P, u)]. Stane-li se, že $u = u_2$, řekneme, že $\mathfrak{S}$ je horní base topologie u [nebo prostoru (P, u)].

5·2. Na obecné úvahy ve **5·1** můžeme navázati úvahy speciálnější, které by se mohly ukázat plodnými. Nechť je v P dána topologie u.

Předně zvolme kardinální číslo $\mathfrak{a}$ a zvolme za $\mathfrak{S}$ systém těch $S \subset P$, jejichž mohutnost je $< \mathfrak{a}$. Pak můžeme utvořiti topologii $u_1 = u_1(\mathfrak{a})$, která je vždy slabší než u a je jednoznačně určena topologií u a kardinálním číslem $\mathfrak{a}$. Existuje nejmenší kardinální číslo $\tau(u)$ takové, že $u_1[\tau(u)] = u$. Číslo $\tau(u)$ je důležitý „invariant“ topologie u.

Za druhé zvolme za $\mathfrak{S}$ systém těch $S \subset P$, pro něž množina $\overline{S} - S$ je jednobodová. Důležitý typ topologie máme, nastane-li případ, že $\mathfrak{S}$ je dolní base. Tento typ se dá vyjádřiti takto: Když $M \subset P$, $a \in \overline{M} - M$, pak existuje $S \subset M$ taková, že $\overline{S} = S + (a)$. Tuto úvahu můžeme modifikovati tím, že místo $\mathfrak{S}$ vezmeme systém $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$ těch $S \in \mathfrak{S}$, jejichž mohutnost je $< \mathfrak{a}$. Opět je zajímavý případ, že $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$ je dolní base.

Za třetí zvolme za $\mathfrak{S}$ systém těch $S \subset M$, které mají následující vlastnosti. Množina S je nekonečná a spočetná; existuje bod $a \in P$ (ovšem závislý na S) takový, že pro každou nekonečnou část T množiny S je $\overline{T} = T + (a)$. Když $\mathfrak{S}$ je dolní base, řekneme, že u je L-topologie [nebo že (P, u) je L-prostor]. K pojmu L-prostoru můžeme dojíti také následujícím způsobem. Předpokládejme, že při dané množině P byly některé bodové (t. j. takové, že $a_n \in P$) posloupnosti nazvány konvergentní a že byl každé konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$ přiřazen bod $\lim a_n$ tak, že jsou splněny následující axiomy

$(\mathrm{I})^L$ Když $\{a_n\}$ je konvergentní, když $\lim a_n = a$ a když $\{b_n\}$ je vybrána z $\{a_n\}$, pak také $\{b_n\}$ je konvergentní a $\lim b_n = a$.

(II^L) Když $a_n = a$ pro každý index n, pak $\{a_n\}$ je konvergentní a $\lim a_n = a$.

Za této situace můžeme do P zavésti topologii tím, že za uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ prohlásíme množinu všech $\lim a_n$, kde $\{a_n\}$ probíhá všecky konvergentní posloupnosti takové, že $a_n \in M$ pro každý index n. Snadno se přesvědčíme, že při této topologii P je L-prostor. Obráceně se každý L-prostor P dá takto vytvořiti vhodnou definicí konvergentních posloupností a jejich limit. Jedna (obecně ne jediná) taková definice se dá popsati takto. Nechť $\{a_n\}$ je bodová posloupnost a nechť S je množina všech a_n. Když S je konečná, prohlásíme ji za konvergentní, když a jen když $S = (a)$ obsahuje jediný bod a pak položíme $\lim a_n = a$. Když S je nekonečná, prohlásíme ji za konvergentní, když a jen když (1) $a_m \neq a_n$ pro $m \neq n$, (2) $S \in \mathfrak{S}$, takže existuje (a je ovšem jednoznačně určen) bod $a \in P$ takový, že $\overline{T} = T + (a)$ pro každou nekonečnou $T \subset S$; pak položíme $\lim a_n = a$.

6·1. Řekneme, že P je *U*-prostor, nebo že topologie daná v P je *U*-topologie, když vedle axiomů (I^u) až (III^u) je ještě splněn axiom

$$(\mathrm{IV}^u)_U \qquad M \subset P \Rightarrow \overline{\overline{M}} = \overline{M}.$$

Vzhledem k axiomu (II^u) stačí místo $(\mathrm{IV}^u)_U$ žádati formálně méně, totiž

$$M \subset P \Rightarrow \overline{\overline{M}} \subset \overline{M}.$$

Vzhledem k definici uzavřených množin (**1·3**) lze axiom $(\mathrm{IV}^u)_U$ vysloviti ve tvaru: Pro každou $M \subset P$ množina $\overline{M}$ je uzavřená. Dokonce platí věta

6·1·1. Když P je *U*-prostor, pak pro každou $M \subset P$ je $\overline{M}$ nejmenší uzavřená množina nad M (t. j. obsahující M).

Důkaz. Víme, že $\overline{M}$ je uzavřená a [axiom (II^u)], že $\overline{M} \supset M$. Když F je uzavřená a $F \supset M$, pak $\overline{F} \supset \overline{M}$ podle (III^u), avšak $\overline{F} = F$, tedy $F \supset \overline{M}$.

6·1·2. P je U-prostor, když a jen když systém $\mathfrak{F}$ všech uzavřených množin je jeho horní base.

Důkaz. I. Když P je U-prostor, pak **6·1·1** praví, že $\mathfrak{F}$ je horní base.

II. Nechť $\mathfrak{F}$ je horní base a nechť $M \subset P$. Podle **1·3·1** existuje aspoň jedna $F \in \mathfrak{F}$, $F \supset M$. Ježto $\mathfrak{F}$ je horní base, $\overline{M}$ je průnik všech $F \in \mathfrak{F}$, $F \supset M$. Tedy podle **1·3·3** je $\overline{M} \in \mathfrak{F}$, t. j. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Nechť $\mathfrak{F}$ je systém podmnožin dané množiny P. Aby v P existovala topologie u, při níž $\mathfrak{F}$ je právě systém všech uzavřených množin, musí podle **1·3·1** až **1·3·3** býti splněny axiomy

(I^f) $P \in \mathfrak{F}$.

(II^f) $\emptyset \in \mathfrak{F}$.

(III^f) Průnik libovolného neprázdného systému množin patřících do $\mathfrak{F}$ patří do $\mathfrak{F}$.

6·1·3. Je-li $\mathfrak{F}$ systém podmnožin množiny P splňující axiomy (I^f) až (III^f), existuje v P přesně jedna U-topologie u, při níž $\mathfrak{F}$ je právě systém všech uzavřených množin. Je-li v jiná topologie v P taková, že každá $F \in \mathfrak{F}$ je uzavřená při v, pak v je slabší než u.

Důkaz plyne z **5·1**, neboť topologie v P, při nichž každá $F \in \mathfrak{F}$ je uzavřená, vzniknou, když v **5·1** volíme $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$ a $vF = F$ pro každou $F \in \mathfrak{F}$. Stačí si všimnouti ještě věty **6·1·2.**

6·1·4. Nechť jsou v P dány dvě U-topologie u a v. Pak u je slabší než v, když a jen když každá $M \subset P$ uzavřená při v je také uzavřená při u.

Důkaz. I. Nechť u je slabší než v. Když $M \subset P$ je uzavřená při v, pak

$$M \subset uM \subset vM = M,$$

tedy $M = uM$.

II. Nechť

$$M = vM \Rightarrow M = uM.$$

Pak následuje z **6·1·1** snadno, že u je slabší než v.

Z **6·1·3** následuje, že když se omezíme na U-topologie, lze celou topologii budovati na pojmu uzavřené množiny podrobené axiomům (I^f) až (III^f); uzávěr bodové množiny je pak definován větou **6·1·1.** V obecném případě však pojem uzavřené množiny nestačí jako základ topologie. Neboť když je v P dána jakákoli topologie v a když je $\mathfrak{F}$ systém všech množin uzavřených při v, pak podle **6·1·3** existuje v P přesně jedna U-topologie u, jejíž uzavřené množiny tvoří zase týž systém $\mathfrak{F}$. Když v není U-topologie, je ovšem $u \neq v$. Řekneme, že u je U-modifikace topologie v.

6·1·5. Nechť (P, v) je libovolný prostor. Nechť u je U-modifikace topologie v. Pak u je nejslabší ze všech U-topologií silnějších než v.

I. Když $M \subset P$, pak pro každou $F \subset P$ uzavřenou při v a takovou, že $F \supset M$, platí $F = vF \supset vM$. Avšak uM je průnik všech F, takže $uM \supset vM$. Tedy v je slabší než u.

II. Nechť U-topologie w je silnější než v. Když $F \subset P$ je uzavřená při w, pak

$$F \subset vF \subset wF = F,$$

tedy $vF = F$, t. j. F je uzavřená při v a tudíž i při u. Tedy w jen silnější než u podle **6·1·4.**

6·2. Nechť prostor Q je vnořen do prostoru P. Zřejmá je věta

6·2·1. Když P je U-prostor, také Q je U-prostor.

6·2·2. (Obrácení věty **1·5·1.**) Když P je U-prostor a když $M \subset Q$ je relativně uzavřená, existuje uzavřená F taková, že $M = QF$.

Důkaz. Položme $F = \overline{M}$.

6·2·3. (Obrácení věty **1·5·2.**) Když P je U-prostor a když $M \subset Q$ je relativně otevřená, existuje otevřená G taková, že $M = QG$.

Důkaz. $Q - M$ je relativně uzavřená, takže (**6·2·2**) existuje uzavřená F, $M = QF$. Položme $G = P - F$.

6·2·4. Když P není U-prostor, lze zvoliti $Q \subset P$ tak, že věty **6·2·2** a **6·2·3** jsou nesprávné.

Důkaz. Existuje $M \subset P$ taková, že $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}} \neq \overline{M}$. Zvolme $a \in \overline{\overline{M}} - \overline{M}$ a položme $Q = \overline{M} + (a) \neq M$. Jest $Q\overline{M} = M$, tedy M je relativně uzavřená. Když F je uzavřená a $M \subset F$ [což by nastalo pro $M = QF$], pak $\overline{M} \subset \overline{F} = F$, tedy $\overline{\overline{M}} \subset \overline{F} = F$, tedy $a \in F$, tedy $Q \subset F$, tedy $QF \neq M$. Ježto M je relativně uzavřená, $(a) = Q - M$ je relativně otevřená. Kdyby bylo $(a) = QG$ s otevřenou G, bylo by $M = QF$ s uzavřenou $F = P - G$.

6·3. O bodě $a \in P$ řekneme, že je to slabý U-bod, když

$$M \subset P,\ a \in \overline{\overline{M}} \Rightarrow a \in \overline{M}.$$

Otevřené okolí bodu $a \in P$ nebo množiny $M \subset P$ je takové okolí, které je otevřenou množinou, tedy (**2·1·5**) je to otevřená množina obsahující a nebo M.

O bodě $a \in P$ řekneme, že je to silný U-bod, když jeho otevřená okolí tvoří úplný systém okolí bodu a.

6·3·1. Když a je silný U-bod, pak a je slabý U-bod.

Důkaz. V opačném případě existuje množina M taková, že $a \in \overline{\overline{M}} - \overline{M}$. Ježto $a \in P - \overline{M}$, $P - M$ je okolí bodu a. Ježto a je silný U-bod, existuje otevřená množina G taková, že $a \in G \subset P - M$. Tedy $M \subset P - G$, tedy $\overline{M} \subset \overline{P - G} = P - G$, tedy $\overline{\overline{M}} \subset \overline{P - G} = P - G$, tedy $a \in P - G$, což je spor.

Nechť P_1 se skládá z přirozených čísel a ze symbolu ∞. Nechť uzávěr bodu ∞ je bod ∞; nechť uzávěr přirozeného čísla n se skládá z čísel n a $n + 1$; uzávěr konečné množiny nechť je součet uzávěrů jejích bodů; uzávěr nekonečné množiny M nechť je P_1. Pak P_1 je A-prostor[6]) a ∞ je slabý U-bod, ale ∞ není silný U-bod.

Zřejmá je věta

6·3·2. Když každý $a \in P$ je slabý U-bod, pak P je U-prostor.

6·3·3. Když P je U-prostor, pak každý $a \in P$ je silný U-bod.

Důkaz. Nechť P je U-prostor a nechť O je okolí bodu $a \in P$. Pak $a \in P - \overline{P - O}$ a množina $\overline{P - O}$ je uzavřená. Tedy $P - \overline{P - O}$ je otevřené okolí bodu a obsažené v O. Tedy a je silný U-bod.

Zřejmá je věta

6·3·4. Nechť prostor Q je vnořen do prostoru P a nechť $a \in Q$. Když a je slabý U-bod prostoru P, pak a je slabý U-bod prostoru Q, když a je silný U-bod prostoru P, pak a je silný U-bod prostoru Q.

6·3·5. Nechť P je U-prostor a nechť $M \subset P$. Systém $\mathfrak{G}$ všech otevřených okolí množiny M je úplný systém.

Důkaz. Nechť O je okolí množiny M. Pak O je okolí každého $a \in M$, takže podle **6·3·3** lze každému $a \in M$ přiřaditi otevřenou množinu $G(a)$ tak, že $a \in G(a) \subset O$. Nechť $G = \sum_{a \in M} G(a)$. Pak $M \subset G \subset O$ a podle **1·4·3** je $G \in \mathfrak{G}$.

6·3·6. (Obrácení věty **3·3·5.**) Když P je U-prostor a když $M = M^s$, pak množina M je $\mathbf{G}_d$.

Důkaz. Podle **6·3·5** tvoří otevřená okolí množiny M úplný systém, takže množina M^s je $\mathbf{G}_d$ podle **4·2·1.**

Nový důkaz věty **3·2·3.** Nechť každá $M \in \mathfrak{S}$ je $\mathbf{G}_d$. Máme dokázati, že $S = \sum_{M \in \mathfrak{S}} M$ je $\mathbf{G}_d$. Podle **6·1·3** existuje v P U-topologie, která má s danou topologií společné uzavřené množiny, tedy také množiny $\mathbf{G}_d$. Tudíž stačí dokazovati za předpokladu, že P je U-prostor. Podle **3·3·5** je $M \in \mathfrak{S} \Rightarrow M = M^s$ a podle **3·3·4** je $S^s = \sum_{M \in \mathfrak{S}} M^s$, tedy $S^s = S$, takže S je $\mathbf{G}_d$ podle **6·3·6.**

Když úplný systém $\mathfrak{O}(a)$ okolí bodu a se skládá z otevřených okolí [což lze, když a jen když a je silný U-bod], pak je vedle axiomů (I°) a (II°) vyslovených ve **4·1** splněn ještě axiom

$(\mathrm{III}^o)_U$ Když $O \in \mathfrak{O}(a)$, $b \in O$, pak existuje množina $\Omega \in \mathfrak{O}(b)$ taková, že $\Omega \subset O$.

Při tom znamená $\mathfrak{O}(b)$ libovolný úplný systém okolí bodu b.

---

[6]) Viz **7·1.**

Obráceně nechť je P daná množina a Q daná její část. Nechť je každému $a \in P$ přiřazen systém $\mathfrak{O}(a)$ částí množiny P tak, že pro každý $a \in P$ platí axiomy (I^o) a (II^o) a mimo to pro každý $a \in Q$ ještě axiom (III^o)$_U$. Pak můžeme do P zavésti topologii tím, že vezmeme $\mathfrak{O}(a)$ za definující systémy okolí a nahlédneme snadno, že každý $a \in Q$ je silný U-bod a že pro každý $a \in Q$ se $\mathfrak{O}(a)$ skládá z otevřených okolí. Speciálně pro $Q = P$ je P U-prostor a všecka definující okolí jsou otevřená.

6·4. Nechť P je U-prostor. Systém $\mathfrak{B}$ částí prostoru P nazveme jeho otevřenou basí, když každá $B \in \mathfrak{B}$ je otevřená a když každá otevřená $G \neq \emptyset$ je součtem některých množin systému $\mathfrak{B}$.

6·4·1.[7] Systém $\mathfrak{B}$ otevřených množin U-prostoru P je jeho otevřená base, když a jen když pro každý $a \in P$ systém $\mathfrak{B}(a)$ těch $B \in \mathfrak{B}$, jež obsahují a, je úplný systém okolí bodu a.

Důkaz. I. Nechť $\mathfrak{B}$ je otevřená base. Nechť O je okolí bodu $a \in P$. Podle **6·3·3** existuje otevřená množina G taková, že $a \in G \subset O$. Ježto $\mathfrak{B}$ je otevřená base, G je součet některých množin systému $\mathfrak{B}$. Ježto $a \in G$, existuje $B \in \mathfrak{B}(a)$ taková, že $B \subset G$, tedy $B \subset O$. Ježto množiny systému $\mathfrak{B}$ jsou otevřené, B je okolí bodu a. Tedy $\mathfrak{B}(a)$ je úplný systém okolí bodu a.

II. Nechť $\mathfrak{B}(a)$ je úplný systém okolí bodu a pro každý $a \in P$. Nechť $G \neq \emptyset$ je otevřená množina. Pak G je okolí každého $a \in G$, takže lze každému $a \in G$ přiřaditi množinu $B(a) \in \mathfrak{B}(a) \subset \mathfrak{B}$ tak, že $B(a) \subset G$. Zřejmě

$$G = \sum_{a \in G} B(a).$$

Tedy $\mathfrak{B}$ je otevřená base.

Když je $\mathfrak{B}$ otevřená base U-prostoru P, pak zřejmě

(I^b) Ke každému $a \in P$ existuje $B \in \mathfrak{B}$ taková, že $a \in B$.

Obráceně nechť P je daná množina a nechť $\mathfrak{B}$ je daný systém jejích částí splňující axiom (I^b). Pak existuje v P přesně jedna U-topologie, při níž je $\mathfrak{B}$ otevřená base. Neboť, existuje-li taková topologie, pak podle **6·4·1** pro každý $a \in P$ musí býti systém $\mathfrak{O}(a)$ těch $B \in \mathfrak{B}$, pro něž $a \in B$, úplným systémem okolí bodu a. Avšak systémy $\mathfrak{O}(a)$ vyhovují axiomům (I^o) a (II^o), takže skutečně zavádějí do P topologii u, a mimo to vyhovují i axiomu (III^o)$_U$, takže u je U-topologie a množiny $B \in \mathfrak{B}$ jsou otevřené. $\mathfrak{B}$ je otevřená base podle **6·4·1**.

Když $\mathfrak{B}$ je otevřená base U-prostoru P a když Q je vnořen do P [Q je U-prostor podle **6·3·2** a **6·3·4**], pak systém $\mathfrak{B}_0$ všech QB pro $B \in \mathfrak{B}$ je (**6·4·1**) otevřená base prostoru Q.

Každý U-prostor P má aspoň jednu otevřenou basi, totiž systém všech otevřených množin. Každá otevřená base má určitou

[7]) Loc. cit. sub[2]), str. 3.

mohutnost. Jelikož v každé neprázdné množině kardinálních čísel existuje nejmenší prvek, existují otevřené base s minimální mohutností. Tuto mohutnost označíme $\chi^t(P)$ [určitěji $\chi_u{}^t(P)$, když u je daná topologie] a nazveme ji totálním charakterem prostoru P. Říká se, že U-prostor P splňuje druhý axiom spočetnosti,[8]) když

$$\chi^t(P) \leqq \aleph_0.$$

Zřejmé jsou věty

6·4·2. Když Q je vnořen do U-prostoru P, pak $\chi^t(Q) \leqq \leqq \chi^t(P)$.

6·4·3. Nechť P je U-prostor. Pak $\chi(a) \leqq \chi^t(P)$ pro každý $a \in P$.

6·4·4.[9]) Nechť $\mathfrak{B}$ je otevřená base U-prostoru P. Pak lze z $\mathfrak{B}$ vybrati otevřenou basi s mohutností $\chi^t(P)$.

Důkaz. I. Nechť číslo $\chi^t(P)$ je konečné. Pak existuje konečná otevřená base, takže P má jen konečný počet otevřených množin. Označme $\mathfrak{M}$ systém otevřených množin G takových, že existuje bod $a \in G$ takový, že když H je otevřené okolí bodu a obsažené v G, je $H = G$. Ježto P má jen konečný počet otevřených množin, dokáže se snadno, že $\mathfrak{M}$ je otevřená base a že $\mathfrak{M}$ je částí každé otevřené base. Tedy $\mathfrak{M}$ má mohutnost $\chi^t(P)$ a $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$.

II. Nechť číslo $\chi^t(P) = \mathfrak{a}$ je nekonečné, takže $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Zvolme otevřenou basi $\mathfrak{A}$ s mohutností $\mathfrak{a}$. Označme $\mathfrak{C}$ systém těch párů $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, k nimž existuje aspoň jedna množina $B \in \mathfrak{B}$ taková, že $A_1 \subset B \subset A_2$. Pro každý pár $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$ zvolme množinu $\varphi(A_1, A_2) \in \mathfrak{B}$ tak, že $A_1 \subset \varphi(A_1, A_2) \subset A_2$. Označme $\mathfrak{B}_0$ systém všech $\varphi(A_1, A_2)$ pro $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$. Pak je $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_0$ je systém otevřených množin a mohutnost systému $\mathfrak{B}_0$ je $\leqq \mathfrak{a}$.

Zbývá dokázati, že $\mathfrak{B}_0$ je otevřená base. Nechť O je okolí bodu $a \in P$. Podle **6·4·1** stačí dokázati, že existuje pár $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$ takový, že $a \in \varphi(A_1, A_2) \subset O$. Ježto $\mathfrak{A}$ je otevřená base, existuje (zase podle **6·4·1**) $A_2 \in \mathfrak{A}$ taková, že $a \in A_2 \subset O$. Ježto $\mathfrak{B}$ je otevřená base, existuje $B \in \mathfrak{B}$ taková, že $a \in B \subset A_2$. Ježto $\mathfrak{A}$ je otevřená base, existuje $A_1 \in \mathfrak{A}$ taková, že $a \in A_1 \subset B$. Ježto $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, $A_1 \subset B \subset A_2$, je $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$ a $A_1 \subset \varphi(A_1, A_2) \subset A_2$. Ježto $a \in A_1$, $A_2 \subset O$, je $a \in \varphi(A_1, A_2) \subset O$.

Nazveme totálním pseudocharakterem U-prostoru P a označíme $\psi^t(P)$ nejmenší mohutnost systému otevřených množin, v němž lze ke každému $a \in P$ nalézti podsystém $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ takový, že

$$\prod_{G \in \mathfrak{S}} G = a^s.$$

Nazveme vnitřním totálním charakterem U-prostoru P

[8]) Loc. cit. sub[3]), str. 263 a 268.
[9]) Loc. cit. sub[2]), str. 4.

a označíme $\omega^t(P)$ nejmenší mohutnost systému otevřených množin, v němž ke každému $a \in P$, pro nějž $\omega(a) \geqq 2$, lze nalézti podsystém $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ takový, že každá $G \in \mathfrak{S}$ jest, kdežto průnik všech $G \in \mathfrak{S}$ není okolím bodu a.

Zřejmé jsou věty

6·4·5. Když P je U-prostor, pak

$$\omega^t(P) \leqq \psi^t(P) \leqq \chi^t(P).$$

6·4·6. Když P je U-prostor, pak $\psi(a) \leqq \psi^t(P)$ pro každý $a \in P$.

6·4·7. Nechť P je U-prostor. Jest $\omega^t(P) = 0$, když a jen když $\omega(a) = 1$ pro každý $a \in P$. Když $\omega^t(P) > 0$, pak $\omega(a) \leqq \leqq \omega^t(P)$ pro každý $a \in P$.

6.5. Nechť (P, u) je libovolný prostor. Přiřadíme[10]) každému ordinálnímu číslu $\xi > 0$ topologii u^ξ v P definujíce pro každou $M \subset P$ transfinitní indukcí: (1) $u^1 M = uM$, (2) $u^{\xi+1}M = u(u^\xi M)$, (3) když α je limitní číslo, pak $u^\alpha M = \sum_{\xi < \alpha} u^\xi M$. Transfinitní indukcí se dokáže, že u^ξ je topologie pro každé ordinální číslo $\xi > 0$.

Pro libovolnou $M \subset P$ je zřejmě

$$\xi < \eta \Rightarrow u^\xi M \subset u^\eta M \subset P.$$

Z toho následuje, že každé množině $M \subset P$ lze přiřaditi ordinální číslo $\varphi(M)$, což je nejmenší ordinální číslo α, pro něž platí $u^{\alpha+1}M = u^\alpha M$. Dále lze prostoru přiřaditi ordinální číslo $\vartheta(P)$, jež je nejmenší ordinální číslo β, pro něž platí $\varphi(M) \leqq \beta$ pro každou $M \subset P$, nebo, což je ekvivalentní, pro něž platí $u^{\beta+1}M = u^\beta M$ pro každou $M \subset P$.

Zřejmě $\vartheta(P) = 1$, když a jen když u je U-topologie. V obecném případě je $u^{\vartheta(P)}$ U-topologie. Lehko se dokáže, že topologie u a $u^{\vartheta(P)}$ mají stejné uzavřené množiny, takže $u^{\vartheta(P)}$ je U-modifikace (**6·1·3**) topologie u.

7·1. Řekneme, že P je A-prostor, nebo že topologie daná v P je A-topologie, když vedle axiomů (I^u) a (II^u) je ještě splněn axiom

$(\mathrm{III}^u)_A$ $\qquad M_1 \subset P,\ M_2 \subset P \Rightarrow \overline{M_1 + M_2} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$

Není třeba žádati (III^u), neboť ten je důsledkem $(\mathrm{III}^u)_A$. Když však výslovně žádáme axiom (III^u), stačí místo $(\mathrm{III}^u)_A$ žádati pouze

$$M_1 \subset P,\ M_2 \subset P \Rightarrow \overline{M_1 + M_2} \subset \overline{M}_1 + \overline{M}_2,$$

neboť z toho a ze (III^u) už plyne $(\mathrm{III}^u)_A$.

Nechť P je libovolný prostor a $a \in P$. Řekneme, že a je A-bod, když

$$M_1 \subset P,\ M_2 \subset P,\ a \in \overline{M_1 + M_2} \Rightarrow a \in \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$$

---

[10]) F. Hausdorff., Fund. Math. XXV (1935), str. 490.

Zřejmé jsou věty

7·1·1. P je A-prostor, když a jen když každý $a \in P$ je A-bod.

7·1·2. Prostor vnořený do A-prostoru je A-prostor.

7·1·3. Nechť Q je vnořen do P a nechť $a \in Q$ je A-bod prostoru P. Pak a je A-bod prostoru Q.

7·1·4. Když P je A-prostor, pak součet konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

Důkaz stačí provésti pro dvě uzavřené množiny F_1 a F_2. Jest $\overline{F}_1 = F_1$, $\overline{F}_2 = F_2$, tedy $\overline{F_1 + F_2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = F_1 + F_2$.

Věta **7·1·4** může platiti v P i když P není A-prostor. Příklad dává prostor P_2, složený ze tří bodů a, b, c. V P je $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{a} = \bar{b} = (a) + (b)$, $\bar{c} = (c)$, kdežto uzávěr více než jednobodové množiny je P_2. Pak v P_2 platí **7·1·4**, ač P_2 není A-prostor.

7·1·5. Nechť P je U-prostor a nechť součet konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina. Pak P je A-prostor.

Důkaz. Nechť $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$. Jest $M_1 + M_2 \subset \overline{M}_1 + \overline{M}_2$, tedy $\overline{M_1 + M_2} \subset \overline{\overline{M}_1 + \overline{M}_2}$. Ježto P je U-prostor, jsou $\overline{M}_1$ a $\overline{M}_2$ uzavřené, takže také $\overline{M}_1 + \overline{M}_2$ je uzavřená, t. j. $\overline{\overline{M}_1 + \overline{M}_2} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$, takže $\overline{M_1 + M_2} \subset \overline{M}_1 + \overline{M}_2$.

Ze **7·1·5** plyne, že teorii AU-prostorů (t. j. těch prostorů, jež jsou i A-prostory i U-prostory) lze budovati na pojmu uzavřené množiny, podrobeném vedle axiomů (I^f) až (III^f) vyslovených v **6·1** ještě axiomu

(IV^f)$_A$ $\qquad F_1 \in \mathfrak{F},\ F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 + F_2 \in \mathfrak{F}.$

Ze **7·1·4** plyne věta

7·1·6. Když P je A-prostor, pak průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

7·1·7. Nechť $M \subset P$, $N \subset P$. Nechť každý $a \in M$ je A-bod. Nechť O je okolí množiny M. Pak

$$M \,.\, \overline{N} = M \,.\, \overline{NO}.$$

Důkaz. Ježto $\overline{NO} \subset \overline{N}$, stačí uvésti ke sporu předpoklad $a \in M \,.\, \overline{N} - \overline{NO}$. Ježto $a \in M$, a je A-bod. Ježto $a \in \overline{N}$, $N = NO + (N - O)$, jest $a \in \overline{NO} + \overline{N - O}$, tedy $a \in \overline{NO} + \overline{P - O}$. Ježto $a \in P - \overline{NO}$, je $a \in \overline{P - O}$. To je spor, neboť $a \in M$, takže O je okolí bodu a.

Zvláštním případem (místo M, N, O klademe G, M, G) věty **7·1·7** je

7·1·8. Nechť P je A-prostor. Nechť $M \subset P$. Nechť $G \subset P$ je otevřená množina. Pak

$$G \,.\, \overline{M} = G \,.\, \overline{MG}.$$

Ve větě **7·1·8** nelze vynechati předpoklad, že P je A-prostor. Nechť P_3 obsahuje tři body a, b, c. Když $M \subset P$, nechť $\overline{M} = M$, má-li M nejvýš jeden bod, $\overline{M} = P$, má-li M více než jeden bod. Nechť $M = (a) + (b)$, $G = (a) + (c)$. Pak G je otevřená množina, $G\overline{M} = (a) + (c)$, $G . \overline{MG} = (a) \neq G\overline{M}$.

Zřejmá je věta

7·1·9. Každý L-prostor je A-prostor.

7·2. Zřejmá je věta

7·2·1. Bod $a \in P$ je A-bod, když a jen když pro každý pár O_1, O_2 okolí bodu a platí, že také O_1O_2 je okolí bodu a.

Nechť $\mathfrak{O}(a)$ je úplný systém okolí bodu a. Ze **7·2·1** následuje snadno, že a je A-bod, když a jen když je vedle axiomů (I^o) a (II^o) vyslovených ve **4·1** ještě splněn axiom

(III^o)$_A$ Když $O_1 \in \mathfrak{O}(a)$, $O_2 \in \mathfrak{O}(a)$, pak existuje množina $O \in \mathfrak{O}(a)$ taková, že $O \subset O_1O_2$.

Řekneme, že $M \subset P$ je A-množina, když průnik libovolných dvou jejích okolí je zase jejím okolím. Ze **7·2·1** následuje

7·2·2. Jednobodová množina (a) je A-množina, když a jen když a je A-bod.

Zřejmé jsou věty

7·2·3. Nechť Q je vnořen do P. Když $M \subset Q$ je A-množina v prostoru P, pak M je A-množina v prostoru Q.

7·2·4. Nechť $M \subset P$. Nechť každý $a \in M$ je A-bod. Pak M je A-množina.

7·2·5. Nechť $M \subset P$ je A-množina. Nechť $\mathfrak{O}(M)$ je úplný systém okolí množiny M. Nechť Ω je dané okolí množiny M. Nechť $\mathfrak{O}_0(M)$ je systém těch $O \in \mathfrak{O}(M)$, pro něž platí $O \subset \Omega$. Pak $\mathfrak{O}_0(M)$ je úplný systém okolí množiny M.

Důkaz. Nechť H je okolí množiny M. Ježto M je A-množina, také $H\Omega$ je okolí množiny M. Ježto $\mathfrak{O}(M)$ je úplný systém, existuje $O \in \mathfrak{O}(M)$ taková, že $O \subset H\Omega$. Pak je $O \in \mathfrak{O}_0(M)$, $O \subset H$.

7·2·6. Věta **7·2·5** je nesprávná, když M není A-množina.

Důkaz. Ježto M není A-množina, existují okolí O_0, Ω množiny M taková, že $O_0\Omega$ není okolí množiny M. Nechť $\mathfrak{O}(M)$ je úplný systém okolí množiny M a nechť $\mathfrak{O}_0(M)$ je systém těch $O \in \mathfrak{O}(M)$, pro něž platí $O \subset \Omega$. Kdyby byl $\mathfrak{O}_0(M)$ úplný systém, existovala by množina $O \in \mathfrak{O}_0(M)$ taková, že $O \subset O_0$. Pak by bylo $O \subset O_0\Omega$, takže by (**2·1·8**) také $O_0\Omega$ byla okolím množiny M.

7·2·7. Nechť charakter množiny $M \subset P$ je konečný. M je A-množina, když a jen když $\chi(M) = 1$.

Důkaz. I. Nechť M je A-množina. Existuje konečný úplný systém $\mathfrak{O}(M)$ okolí množiny M. Průnik O všech množin systému $\mathfrak{O}(M)$ je okolím množiny M. Zřejmě množina O sama o sobě tvoří úplný systém okolí množiny M.

II. Nechť $\chi(M) = 1$. Pák existuje množina O, která sama o sobě tvoří úplný systém okolí množiny M. Jsou-li O_1 a O_2 dvě okolí množiny M, jest $O \subset O_1$, $O \subset O_2$, takže (**2·1·8**) také O_1O_2 je okolí množiny M.

7·3. Nechť (P, v) je daný prostor a nechť $Q \subset P$. Pro každý $a \in P$ zvolme úplný systém $\mathfrak{O}(a)$ okolí bodu a. Když $a \in Q$, nechť $\mathfrak{O}_1(a)$ znamená systém těch množin, z nichž každá je průnikem konečného počtu množin patřících do $\mathfrak{O}(a)$. Když $a \in P - Q$, pak nechť $\mathfrak{O}_1(a) = \mathfrak{O}(a)$. Snadno se přesvědčíme, že systémy $\mathfrak{O}_1(a)$ vyhovují axiomům (I^o) a (II^o) (**4·1**) a když $a \in Q$, také axiomu $(\mathrm{III}^o)_A$ (**7·2**). Tedy systémy $\mathfrak{O}_1(a)$ definují v P topologii u, při níž každý $a \in Q$ je A-bod. Řekneme, že u je A-modifikace topologie v redukovaná na Q. V důležitém případě $Q = P$ (v němž u podle **7·1·1** je A-topologie), řekneme krátce, že u je A-modifikace topologie v. Topologie u závisí na volbě úplných systémů $\mathfrak{O}(a)$ jenom zdánlivě, neboť je charakterisována větou

7·3·1. Nechť (P, v) je prostor a nechť $Q \subset P$. Nechť u je A-modifikace topologie v redukovaná na Q. Pak (1) každý $a \in Q$ je A-bod při topologii u, (2) topologie u je slabší než v, (3) u je nejsilnější topologie s vlastnostmi (1) a (2).

Důkaz. Už jsme si všimli, že u má vlastnost (1). Že u má vlastnost (2), plyne snadno ze **4·1·1**, neboť $\mathfrak{O}(a) \subset \mathfrak{O}_1(a)$. Nechť tedy w je topologie slabší než v, při níž každý $a \in Q$ je A-bod. Nechť $M \subset P$. Máme dokázati, že $wM \subset uM$. Nechť tedy $a \in wM$. Když $O \in \mathfrak{O}(a)$, pak podle **2·1·9** O je okolím bodu a při topologii w. Ježto každý $a \in Q$ je A-bod při w, následuje snadno, že (ať již náš bod a patří do Q či do $P - Q$), každá $O \in \mathfrak{O}_1(a)$ je okolím bodu a při topologii w. Tedy, ježto $a \in wM$, následuje ze **4·1·1**, že pro každou $O \in \mathfrak{O}_1(a)$ je $OM \neq \emptyset$, takže podle **4·1·1** je $a \in uM$.

7·3·2. Nechť (P, v) je prostor a nechť $Q \subset P$. Nechť u je A-modifikace topologie v redukovaná na Q. Pak

$$a \in Q \Rightarrow \chi_u(a) \leqq \chi_v(a),$$
$$a \in P - Q \Rightarrow \chi_u(a) = \chi_v(a).$$

Důkaz. Úplný systém $\mathfrak{O}(a)$ můžeme voliti tak, že obsahuje jen $\chi_v(a)$ množin.

I. Nechť $a \in Q$. Rozeznáváme dva případy. Nechť předně počet $\chi_v(a)$ množin systému $\mathfrak{O}(a)$ je konečný. Pak průnik O všech množin systému $\mathfrak{O}(a)$ patří do $\mathfrak{O}_1(a)$ a je nejmenší z množin systému $\mathfrak{O}_1(a)$. Ježto $\mathfrak{O}_1(a)$ je úplný systém okolí bodu a při topologii u, zřejmě množina O sama o sobě tvoří úplný systém okolí bodu a při topologii u, takže $\chi_u(a) = 1 \leqq \chi_v(a)$. Nechť za druhé počet $\chi_v(a)$ množin systému $\mathfrak{O}(a)$ je nekonečný. Pak $\mathfrak{O}_1(a)$ obsahuje $\chi_v(a)$ množin. Ježto $\mathfrak{O}_1(a)$ je úplný systém okolí bodu a při topologii u, je $\chi_u(a) \leqq \chi_v(a)$.

II. Nechť $a \in P - Q$. Ježto $\mathfrak{O}(a)$ je úplný systém okolí bodu a i při u i při v, nahlédneme snadno, že systém všech okolí bodu a je stejný při obou topologiích, takže $\chi_u(a) = \chi_v(a)$.

8·1. Nechť P je libovolný prostor. Nechť $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$. Řekneme, že množiny M_1 a M_2 jsou (v prostoru P) oddělené, když

$$M_1\overline{M}_2 = \overline{M}_1 M_2 = \emptyset.$$

Řekneme, že M_1 a M_2 jsou (v prostoru P) (1) O-oddělené, (2) $\overline{O}$-oddělené, (3) $\overline{\overline{O}}$-oddělené, když existuje okolí O_1 množiny M_1 a okolí O_2 množiny M_2 tak, že

$$O_1 O_2 = \emptyset \text{ v případě (1)},$$
$$\overline{O}_1 O_2 = O_1 \overline{O}_2 = \emptyset \text{ v případě (2)},$$
$$\overline{O}_1 \overline{O}_2 = \emptyset \text{ v případě (3)}.$$

Zřejmé jsou tyto dvě věty:

8·1·1. Nechť Q je vnořen do P. Nechť $M_1 \subset Q$, $M_2 \subset Q$. Množiny M_1 a M_2 jsou oddělené v prostoru Q, když a jen když jsou oddělené v prostoru P.

8·1·2. Nechť Q je vnořen do P. Nechť $M_1 \subset Q$, $M_2 \subset Q$. Když M_1 a M_2 jsou v prostoru P buďto O-oddělené nebo $\overline{O}$-oddělené nebo $\overline{\overline{O}}$-oddělené, pak totéž o nich platí v prostoru Q.

8·1·3. Nechť $M_1 \subset P$ a $M_2 \subset P$ jsou O-oddělené. Pak M_1 a M_2 jsou oddělené.

Důkaz. Nechť $a \in M_1$. Ježto O_1 je okolí množiny M_1, a nepatří do $\overline{P - O_1}$. Avšak $M_2 \subset O_2 \subset P - O_1$. Tedy a nepatří do $\overline{M}_2$. Tedy $M_1\overline{M}_2 = \emptyset$ a podobně $\overline{M}_1 M_2 = \emptyset$.

Zřejmé jsou tyto dvě věty:

8·1·4. Nechť $M_1 \subset P$ a $M_2 \subset P$ jsou $\overline{O}$-oddělené. Pak M_1 a M_2 jsou O-oddělené.

8·1·5. Nechť $M_1 \subset P$ a $M_2 \subset P$ jsou $\overline{\overline{O}}$-oddělené. Pak M_1 a M_2 jsou $\overline{O}$-oddělené.

8·1·6. Nechť $M_1 \subset P$ a $M_2 \subset P$ jsou oddělené v prostoru P. Pak M_1 a M_2 jsou $\overline{\overline{O}}$-oddělené v prostoru $Q = M_1 + M_2$ vnořeném do P.

Důkaz. Nechť $uM = Q\overline{M}$ je relativní uzávěr množiny $M \subset Q$. Ježto $M_1\overline{M}_2 = \overline{M}_1 M_2 = \emptyset$, je $M_1 M_2 = \emptyset$, tedy $Q - M_1 = M_2$, $Q - M_2 = M_1$. Mimo to $M_1 \,.\, uM_2 = M_2 \,.\, uM_1 = \emptyset$, takže $uM_1 = M_1$, $uM_2 = M_2$. Tedy M_1 a M_2 jsou v Q i uzavřené i otevřené. Tedy v Q je M_1 okolím množiny M_1 a stejně pro M_2 a relativní uzávěry těchto dvou okolí se neprotnou, takže M_1 a M_2 jsou v Q $\overline{\overline{O}}$-oddělené.

Zřejmá je věta

8·1·7. Nechť $N_1 \subset M_1 \subset P$, $N_2 \subset M_2 \subset P$. Když M_1 a M_2 jsou buďto oddělené nebo O-oddělené nebo $\overline{O}$-oddělené nebo $\overline{\overline{O}}$-oddělené, pak totéž platí o množinách N_1 a N_2.

8·1·8. Nechť $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$, $M_3 \subset P$. Nechť M_1 je A-množina. Nechť M_1 a M_2 jsou oddělené. Nechť M_1 a M_3 jsou oddělené. Pak M_1 a $M_2 + M_3$ jsou oddělené.

Důkaz. Jest $M_1\overline{M}_2 = \overline{M}_1M_2 = M_1\overline{M}_3 = \overline{M}_1M_3 = \emptyset$. Zřejmě $\overline{M}_1(M_2 + M_3) = \emptyset$ a máme dokázati, že $M_1 . \overline{M_2 + M_3} = \emptyset$. Ježto $M_1\overline{M}_2 = \emptyset$, $P - M_2$ je okolí množiny M_1. Podobně i $P - M_3$ je okolí množiny M_1. Ježto M_1 je A-množina, také $(P - M_2)(P - M_3) = P - (M_2 + M_3)$ je okolí množiny M_1, takže $M_1 . \overline{M_2 + M_3} = \emptyset$.

8·1·9. Nechť $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$, $M_3 \subset P$. Nechť M_1 je A-množina. Nechť M_1 a M_2 jsou O-oddělené. Nechť M_1 a M_3 jsou O-oddělené. Pak M_1 a $M_2 + M_3$ jsou O-oddělené.

Důkaz. Existují okolí O_1 a Ω_1 množiny M_1, okolí O_2 množiny M_2 a okolí Ω_3 množiny M_3 tak, že $O_1O_2 = \Omega_1\Omega_3 = \emptyset$. Tedy $O_1\Omega_1(O_2 + \Omega_3) = \emptyset$. Zřejmě $O_2 + \Omega_3$ je okolí množiny $M_2 + M_3$. Ježto M_1 je A-množina, $O_1\Omega_1$ je její okolí.

8·1·10. Nechť P je A-prostor. Nechť $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$, $M_3 \subset P$. Nechť M_1 a M_2 jsou $\overline{O}$-oddělené. Nechť M_1 a M_3 jsou $\overline{O}$-oddělené. Pak M_1 a $M_2 + M_3$ jsou $\overline{O}$-oddělené.

Důkaz. Existují okolí O_1 a Ω_1 množiny M_1, okolí O_2 množiny M_2 a okolí Ω_3 množiny M_3 tak, že $\overline{O}_1O_2 = O_1\overline{O}_2 = \overline{\Omega}_1\Omega_3 = \Omega_1\overline{\Omega}_3 = \emptyset$. $O_2 + \Omega_3$ je okolí množiny $M_2 + M_3$. $O_1\Omega_1$ je okolí množiny M_1. Mimo to $\overline{O_1\Omega_1} \subset \overline{O}_1\overline{\Omega}_1$, $\overline{O_2 + \Omega_3} = \overline{O}_2 + \overline{\Omega}_3$, takže $\overline{O_1\Omega_1}(O_2 + \Omega_3) = O_1\Omega_1 . \overline{O_2 + \Omega_3} = \emptyset$.

8·1·11. Věta **8·1·10** zůstane správná, nahradíme-li slovo $\overline{O}$-oddělené na všech třech místech slovem $\overline{\overline{O}}$-oddělené.

Důkaz. Nyní je $\overline{O}_1\overline{O}_2 = \overline{\Omega}_1\overline{\Omega}_3 = \emptyset$, tedy $\overline{O_1\Omega_1} . \overline{O_2 + \Omega_3} = \emptyset$.

8·1·12. Nechť $M_1 \subset P$ a $M_2 \subset P$ jsou O-oddělené. Nechť každý $a \in M_1 + M_2$ je slabý U-bod. Pak M_1 a M_2 jsou $\overline{O}$-oddělené.

Důkaz. Nechť O_1 je okolí množiny M_1, nechť O_2 je okolí množiny M_2 a nechť $O_1O_2 = \emptyset$. Položme $\Omega_1 = P - \overline{P - O_1}$, $\Omega_2 = P - \overline{P - O_2}$. Zřejmě $\Omega_1 \subset O_1$, $\Omega_2 \subset O_2$. Ježto $O_2 \subset P - O_1$, je $\overline{O}_2 \subset \overline{P - O_1}$, tedy $\Omega_1\overline{O}_2 = \emptyset$. Ježto $\Omega_2 \subset O_2$, je $\Omega_1\overline{\Omega}_2 = \emptyset$. Podobně se dokáže, že $\overline{\Omega}_1\Omega_2 = \emptyset$. Když $a \in M_1$, pak O_1 je okolí bodu a, takže a nepatří do $\overline{P - O_1}$. Ježto a je slabý U-bod, a nepatří do

$\overline{\overline{P - O_1}}$, ale to znamená, že Ω_1 je okolí bodu a. Tedy Ω_1 je okolí množiny M_1 a podobně Ω_2 je okolí množiny M_2.

8·1·13. Množiny $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$ jsou O-oddělené, když a jen když existuje okolí O_1 množiny M_1 takové, že $M_2 . \overline{O}_1 = \emptyset$.

Důkaz. I. Když $O_1 O_2 = \emptyset$, pak $M_2 \overline{O}_1 = \emptyset$ podle **2·1·4**.

II. Když $M_2 \overline{O}_1 = \emptyset$, pak $O_2 = P - O_1$ je okolí množiny M_2 a $O_1 O_2 = \emptyset$.

Nechť P_4 obsahuje tři body a, b, c. Množiny $\emptyset$, (a), (b), $(a) + (b)$ nechť jsou uzavřené; pro každou jinou $M \subset P_4$ nechť $M = P_4$. Pak P_4 je AU-prostor. Body a, b [t. j. jednobodové množiny (a), (b)] jsou oddělené, ale nejsou O-oddělené.

Nechť P_5 obsahuje čtyři body a, b, c, d. Nechť $\bar{a} = (a) + (c) + (d)$, $\bar{b} = (b) + (c) + (d)$, $\bar{c} = (a) + (c)$, $\bar{d} = (a) + (d)$. Uzávěr množiny $M \subset P_5$ nechť je součet uzávěrů jejích bodů. Pak P_5 je A-prostor. Body a, b jsou O-oddělené, ale nejsou $\overline{O}$-oddělené.

Nechť P_6 obsahuje tři body a, b, c. Nechť $\bar{a} = (a) + (c)$, $\bar{b} = (b) + (c)$, $\bar{c} = (c)$. Uzávěr množiny $M \subset P_6$ nechť je součet uzávěrů jejích bodů. Pak P_6 je AU-prostor. Body a, b jsou $\overline{O}$-oddělené, ale nejsou $\overline{\overline{O}}$-oddělené.

Nechť P_7 obsahuje tři body a, b, c. Nechť $\overline{(b) + (c)} = P_7$. Když $M \subset P$, $M \neq (b) + (c)$, nechť $\overline{M} = M$. Pak P_7 je U-prostor. Body a, b jsou $\overline{\overline{O}}$-oddělené. Body a, c jsou $\overline{\overline{O}}$-oddělené. Množiny (a), $(b) + (c)$ nejsou oddělené.

8·2. Řekneme, že P je K-prostor[11]) nebo že daná topologie je K-topologie, když pro každý $a \in P$ je

$$\bar{a} \,.\, a^s = (a), \tag{1}$$

t. j. když pro žádný bod $b \neq a$ není současně i $b \in \bar{a}$ i $a \in \bar{b}$, jinak řečeno, když pro $a \neq b$ buďto $P - (a)$ je okolím bodu b nebo $P - (b)$ je okolím bodu a.

Zřejmá je věta

8·2·1. Prostor vnořený do K-prostoru je K-prostor.

Když pro každý $a \in P$ je dán úplný systém $\mathfrak{O}(a)$ okolí bodu a, pak P je K-prostor, když a jen když je vedle axiomů (I°) a (II°) uvedených ve **4·1** ještě splněn axiom

$(\mathrm{III}^o)_K$ Když $a \neq b$, existuje buďto množina $O \in \mathfrak{O}(a)$ neobsahující b nebo množina $\Omega \in \mathfrak{O}(b)$ neobsahující a.

Zřejmá je věta

8·2·2. V K-prostoru mají různé body různé uzávěry.

[11]) P. Alexandroff a P. Uryšohn, Topologie I (Berlin, Springer, 1935), str. 58.

Nechť P_8 se skládá ze tří bodů a, b, c a nechť $\bar{a} = P_8$, $\bar{b} = (a) + (b)$, $\bar{c} = (a) + (c)$. Uzávěr množiny $M \subset P_8$ nechť je součet uzávěrů jejích bodů. Pak P_8 je A-prostor, různé body mají různé uzávěry, ale podmínka (1) není splněna pro žádný bod; P_8 není K-prostor.

8·2·3. Nechť uzávěr každého $a \in P$ je uzavřená množina a nechť různé body mají různé uzávěry. Pak P je K-prostor.

Důkaz. Když $b \in \bar{a}$, pak $\bar{b} \subset \bar{\bar{a}} = \bar{a}$. Tedy když je současně i $b \in \bar{a}$ i $a \in \bar{b}$, je $\bar{a} = \bar{b}$, tedy $a = b$.

Nechť nyní P je U-prostor. Body $a \in P$, $b \in P$ nazveme K-ekvivalentní, když $\bar{a} = \bar{b}$. Když $M \subset P$, nechť $k(M)$ vznikne z M přidáním všech bodů K-ekvivalentních s některým $a \in M$, takže

$$M \subset k(M) = k[k(M)].$$

Množinu $M \subset P$ nazveme K-úplnou, když $k(M) = M$, takže množina $k(M)$ je K-úplná pro každou $M \subset P$. Pro každou $M \subset P$ uzávěr $\overline{M}$ je K-úplná množina. Neboť když $a \in \overline{M}$, $\bar{a} = \bar{b}$, je $b \in \bar{b} = \bar{a} \subset \overline{M}$, tedy $b \in \overline{M}$. Mimo to je pro každou $M \subset P$

$$\overline{M} = \overline{k(M)}, \tag{2}$$

neboť $M \subset k(M) \subset \overline{M}$, tedy $\overline{M} \subset \overline{k(M)} \subset \overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Předpokládajíce stále, že P je U-prostor, přiřaďme každému $a \in P$ nějaký symbol $\tau(a)$ tak, aby bylo $\tau(a) = \tau(b)$, když a jen když a a b jsou K-ekvivalentní. Nechť $P_1 = \tau(P)$ je množina všech $\tau(a)$ pro $a \in P$. Je přirozené zavésti do P_1 topologii u tím, že za uzávěr množiny $M_1 \subset P_1$ prohlásíme $\tau(\overline{M})$, kde $M = \tau_{-1}(M_1)$ je množina těch $a \in P$, pro něž $\tau(a) \in M_1$, takže M je K-úplná. Řekneme, že prostor (P_1, u) vznikl z U-prostoru P K-redukcí.

8·2·4. Nechť prostor P_1 vznikl z U-prostoru P K-redukcí. Pak P_1 je KU-prostor (t. j. i K-prostor i U-prostor).

Důkaz. I. Nechť $a_1 \in P_1$, $b_1 \in P_1$, $a_1 \neq b_1$. Existují body $a \in P$, $b \in P$ takové, že $a_1 = \tau(a)$, $b_1 = \tau(b)$. Ježto $b_1 \neq a_1$, je $\bar{a} \neq \bar{b}$. Ježto $\bar{a}$ a $\bar{b}$ jsou K-úplné množiny a $\bar{a} \neq \bar{b}$, je $\tau(\bar{a}) \neq \tau(\bar{b})$. Uzávěr $u(a_1)$ bodu a_1 v prostoru P_1 je podle definice roven $\tau[\overline{k(a)}]$. Avšak podle (2) je $\bar{a} = \overline{k(a)}$, takže $u(a_1) = \tau(\bar{a})$. Podobně $u(b_1) = \tau(\bar{b})$, takže $u(a_1) \neq u(b_1)$. Tedy v P_1 mají různé body různé uzávěry, takže podle **8·2·3** stačí ještě dokázati, že P_1 je U-prostor.

II. Nechť $M_1 \subset P_1$, $M = \tau_{-1}(M_1)$. Pak je $uM_1 = \tau(\overline{M})$. Ježto $\overline{M}$ je K-úplná, je $\tau_{-1}(uM_1) = \overline{M}$, takže $uuM_1 = \tau(\overline{\overline{M}})$. Avšak $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, tedy $uuM_1 = uM_1$, takže P_1 je U-prostor.

Čtenář snadno nahlédne, že všecky topologické vlastnosti U-prostoru P jsou vyjádřeny v P_1. Neboť uzávěr každé $M \subset P$ je K-úplná množina, která je také uzávěrem K-úplné množiny $k(M)$. Mimo to P_1 (i se svou topologií) vznikne z P prostě tím, že „identifikujeme" K-ekvivalentní body. Tedy v celé teorii U-prostorů se můžeme bez újmy na obecnosti omeziti na KU-prostory.

8·3. Řekneme, že P je B-prostor nebo že daná topologie je B-topologie, když každá jednobodová množina je uzavřená. Zřejmá je věta

8·3·1. Každý B-prostor je K-prostor.

Zřejmá je věta

8·3·2. Prostor vnořený do B-prostoru je B-prostor.

Nechť P je libovolný prostor a $a \in P$. Řekneme, že a je B-bod, když $a^s = (a)$, takže platí věta

8·3·3. Nechť prostor Q je vnořen do prostoru P a nechť $a \in Q$. Když a je B-bod prostoru P, pak a je B-bod prostoru Q.

8·3·4. P je B-prostor, když a jen když každý $a \in P$ je B-bod.

Důkaz. Že P je B-prostor, znamená, že

$$a \in \bar{b} \Rightarrow a = b.$$

Že $a \in P$ je B-bod, znamená podle **3·3·1** totéž při daném a.

Zřejmá je také věta

8·3·5. P je B-prostor, když a jen když dvě různé jednobodové množiny jsou vždy oddělené.

Nechť $\mathfrak{O}(a)$ je úplný systém okolí bodu a. Zřejmě a je B-bod, když a jen když je vedle axiomů (I°) a (II°) uvedených ve **4·1** splněn ještě axiom

(III°)$_B$ Když $b \neq a$, existuje množina $O \in \mathfrak{O}(a)$, která neobsahuje b.

8·3·6. Nechť P je B-prostor. Pak každá množina $M \subset P$ je G_d.

Důkaz. Množina $P - M$ je součet svých bodů, z nichž každý tvoří uzavřenou množinu, takže $P - M$ je F_s, tedy M je G_d.

8·3·7. Nechť každý bod $a \in P$ tvoří množinu G_d. Pak P je B-prostor.

Důkaz. Když množina (a) je G_d, pak průnik všech otevřených okolí bodu a obsahuje jen a, takže tím spíše průnik a^s všech okolí bodu a se rovná a, t. j. a je B-bod, takže P je B-prostor podle **8·3·4**.

8·3·8. Nechť P je K-prostor a nechť uzávěr každého $a \in P$ je G_d. Pak P je B-prostor.

Důkaz. Nechť $b \in a^s$. Podle **8·3·4** stačí dokázati, že $b = a$. Nechť naopak $b \neq a$. Ježto P je K-prostor, je $b \in P - \bar{a}$. Avšak $\bar{a}$ je G_d, tedy $P - \bar{a}$ je F_s, takže existuje uzavřená množina $F \subset$

$\subset P - \bar{a}$ taková, že $b \in F$. Ježto F je uzavřená, je $\bar{b} \subset F$. Ježto $b \in a^s$, je $a \in \bar{b}$, tedy $a \in F \subset P - \bar{a}$, což je spor.

Zřejmá je věta

8·3·9. Každý L-prostor je B-prostor.

8·4. Řekneme, že P je H-prostor,[12]) nebo že daná topologie je H-topologie, když dva různé body jsou vždy O-oddělené.

Řekneme, že $a \in P$ je H-bod, když pro každý $b \in P - (a)$ platí, že a a b jsou O-oddělené.

Zřejmé jsou věty

8·4·1. P je H-prostor, když a jen když každý $a \in P$ je H-bod.

8·4·2. Prostor vnořený do H-prostoru je H-prostor.

8·4·3. Nechť Q je vnořen do P a nechť $a \in Q$ je H-bod prostoru P. Pak a je H-bod prostoru Q.

8·4·4. Každý H-bod je B-bod.

Z **8·1·13** následuje věta

8·4·5. Nechť $a \in P$. Pak a je H-bod, když a jen když (a) je průnik množin $\bar{O}$, kde O probíhá všecka okolí bodu a.

Nechť každému $a \in P$ je přiřazen úplný systém $\mathfrak{O}(a)$ okolí bodu a. Zřejmě a je H-bod, když a jen když je vedle axiomů (I^0) a (II^0) uvedených ve **4·1** splněn ještě axiom

(III^0)$_H$ Když $b \neq a$, existují množiny $O \in \mathfrak{O}(a)$, $\Omega \in \mathfrak{O}(b)$ takové, že $O \,.\, \Omega = \emptyset$.

Řekneme, že a je $\bar{H}$-bod, když pro každý $b \in P - (a)$ platí, že a a b jsou $\bar{O}$-oddělené. P je $\bar{H}$-prostor, když každý $a \in P$ je $\bar{H}$-bod. Zřejmé jsou věty

8·4·6. Prostor vnořený do $\bar{H}$-prostoru je $\bar{H}$-prostor.

8·4·7. Nechť Q je vnořen do P a nechť $a \in Q$ je $\bar{H}$-bod prostoru P. Pak a je $\bar{H}$-bod prostoru Q.

8·4·8. Každý $\bar{H}$-bod je H-bod.

Z **8·1·12** následuje věta

8·4·9. HU-prostor je $\bar{H}$-prostor.

8·4·10. Nechť AH-prostor P splňuje prvý axiom spočetnosti. Pak P je L-prostor.

Důkaz. Nechť $M \subset P$, $a \in \bar{M}$. Nechť členy posloupnosti $\{O_n\}_1^\infty$ tvoří úplný systém okolí bodu a. Položme $\Omega_n = \prod_{i=1}^{n} O_i$. Ježto P je A-prostor, množiny Ω_n jsou okolí bodu a. Podle **2·1·4** je tedy $\Omega_n M \neq \emptyset$. Zvolme $a_n \in \Omega_n M$. Nechť S je množina všech členů posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$. Pak S je spočetná množina. Nechť T

[12]) Hausdorff, loc. cit. sub[3]), str. 213 (axiom D).

je nekonečná část množiny S. Stačí dokázati, že $\overline{T} = T + (a)$. Z **2·1·4** následuje snadno, že $a \in \overline{T}$. Nechť $b \in P - T$, $b \neq a$, $b \in \overline{T}$. Máme odvoditi spor. Ježto $a \neq b$, ježto P je H-prostor a ježto $\{O_n\}_1^\infty$ je úplný systém okolí bodu a, existuje index p takový, že $b \in P - \overline{O}_p$. Ježto P je A-prostor, je $\overline{T} \subset \overline{T - O_p} + \overline{O}_p$, takže $b \in \overline{T - O_p}$. Avšak množina $T - O_p$ je zřejmě konečná a (**8·4·4**) P je AB-prostor, takže $\overline{T - O_p} = T - O_p \subset T$, tedy $b \in T$, což je spor.

8·5. Řekneme, že $a \in P$ je *R*-bod,[13]) když ke každému okolí O bodu a existuje okolí Ω bodu a takové, že $\overline{\Omega} \subset O$. Řekneme, že P je *R*-prostor,[14]) nebo že daná topologie je *R*-topologie, když každý $a \in P$ je R-bod.

Nechť $\mathfrak{O}(a)$ je úplný systém okolí bodu a. Zřejmě a je R-bod, když a jen když je vedle axiomů (I^o) a (II^o) ještě splněn axiom

(III^o)$_R$ Ke každé množině $O \in \mathfrak{O}(a)$ existuje množina $\Omega \in \mathfrak{O}(a)$ taková, že $\overline{\Omega} \subset O$.

Zřejmé jsou věty

8·5·1. Prostor vnořený do R-prostoru je R-prostor.

8·5·2. Nechť Q je vnořen do P a nechť $a \in Q$ je R-bod prostoru P. Pak a je R-bod prostoru Q.

8·5·3. Nechť a je R-bod a nechť $b \in P - a^s$. Pak a a b jsou O-oddělené.

Důkaz. Ježto není $b \in a^s$, existuje okolí O bodu a takové, že $b \in P - O$. Ježto a je R-bod, existuje okolí Ω bodu a takové, že $\overline{\Omega} \subset O$. Tedy a a b jsou O-oddělené podle **8·1·13.**

Z **8·5·3** a **8·1·3** následuje věta

8·5·4. Nechť a je R-bod. Pak $\bar{a} \subset a^s$.

Z **8·5·3** dále následuje věta

8·5·5. Nechť a je BR-bod. Pak a je H-bod.

Z **8·5·4** plyne, že KR-prostor je B-prostor, takže podle **8·5·5** platí věta

8·5·6. Nechť P je KR-prostor. Pak P je H-prostor.

8·5·7. Nechť a je R-bod. Nechť $F \subset P$ je uzavřená množina a nechť $a \in P - F$. Pak množiny (a) a F jsou O-oddělené.

Důkaz. $P - F$ je okolí bodu a, takže existuje okolí O bodu a takové, že $\overline{O} \subset P - F$. Tedy množiny (a) a F jsou O-oddělené podle **8·1·13.**

8·5·8. Nechť a je silný U-bod. Nechť pro každou uza-

---

[13]) Regulární bod podle P. Urysohna, Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen (Math. Ann. 94, 1925), str. 264.

[14]) L. Vietoris, Stetige Mengen (Monatshefte 31, 1921), str. 173 (axiom E).

vřenou množinu $F \subset P$ takovou, že $a \in P - F$, platí, že množiny (a) a F jsou O-oddělené. Pak a je R-bod.

Důkaz. Nechť O_1 je okolí bodu a. Ježto a je silný U-bod, existuje otevřené okolí O_2 bodu a takové, že $O_2 \subset O_1$. Množina $F = P - O_2$ je uzavřená a $a \in P - F$. Tedy množiny (a) a F jsou O-oddělené, takže podle **8·1·13** existuje okolí O_3 bodu a takové, že $\overline{O}_3 F = \emptyset$, t. j. $\overline{O}_3 \subset O_2$, tedy $\overline{O}_3 \subset O_1$.

Ve větě **8·5·8** není dovoleno slovo silný nahraditi slovem slabý, jak ukazuje (pro $a = \infty$) prostor P_1 uvedený po větě **6·3·1**.

8·6. Řekneme, že P je N-prostor,[15]) nebo že daná topologie je N-topologie, když (1) P je AU-prostor, (2) jsou-li F_1 a F_2 uzavřené množiny a je-li $F_1 F_2 = \emptyset$, pak F_1 a F_2 jsou O-oddělené.

Zřejmá je věta

8·6·1. Nechť Q je uzavřená podmnožina N-prostoru P. Pak Q jako prostor vnořený do P je N-prostor.

Z **8·5·8** plyne věta

8·6·2. BN-prostor je R-prostor.

8·6·3.[16]) Nechť P je N-prostor. Nechť $M_1 \subset P$ a $M_2 \subset P$ jsou F_σ. Nechť M_1 a M_2 jsou oddělené. Pak M_1 a M_2 jsou O-oddělené.

Důkaz. I. Jest $M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_1^n$, $M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} F_2^n$, kde F_1^n a F_2^n jsou uzavřené množiny.

II. Nechť (pro $p = 0, 1, 2, \ldots$) znamená H_p předpoklad, že pro $1 \leqq n \leqq p$ jsou dány otevřené množiny O_1^n a O_2^n tak, že (1) $F_1^n \subset O_1^n$, $F_2^n \subset O_2^n$ pro $1 \leqq n \leqq p$, (2) $\overline{O_1^n} \,.\, \overline{M}_2 = \overline{O_2^n} \,.\, \overline{M}_1 = \emptyset$ pro $1 \leqq n \leqq p$, (3) $\overline{O_1^i} \,.\, \overline{O_2^k} = \emptyset$ pro $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq k \leqq p$. Nechť při určitém p je splněn předpoklad H_p. Ježto P je AU-prostor, množina $\sum_{n=1}^{p} \overline{O_2^n} + \overline{M}_2$ je uzavřená. Mimoto

$$F_1^{p+1} \,.\, \left(\sum_{n=1}^{p} \overline{O_2^n} + \overline{M}_2 \right) = \emptyset,$$

takže podle vlastnosti (2) N-prostoru množiny F_1^{p+1} a $\sum_{n=1}^{p} \overline{O_2^n} + \overline{M}_2$ jsou O-oddělené. Tedy podle **8·1·13** a **6·3·5** existuje otevřené okolí O_1^{p+1} množiny F_1^{p+1} takové, že

$$\overline{O_1^{p+1}} \,.\, \left(\sum_{n=1}^{p} \overline{O_2^n} + \overline{M}_2 \right) = \emptyset.$$

---

[15]) Tento pojem zavedl H. Tietze (Math. Annalen, 88, 1923, str. 301). Urysohn (loc. cit. sub[13]), str. 265) zavedl pro něj název normální prostor.

[16]) Loc. cit. sub[13]), str. 285.

Množina $\sum_{n=1}^{p+1} \overline{O_1^n} + \overline{M}_1$ je uzavřená. Mimoto

$$F_2^{p+1} \,.\, \left(\sum_{n=1}^{p+1} \overline{O_1^n} + \overline{M}_1\right) = \emptyset,$$

takže množiny F_2^{p+1} a $\sum_{n=1}^{p+1} \overline{O_1^n} + \overline{M}_1$ jsou O-oddělené. Tedy existuje otevřené okolí O_2^{p+1} množiny F_2^{p+1} takové, že

$$\overline{O_2^{p+1}} \,.\, \left(\sum_{n=1}^{p+1} \overline{O_1^n} + \overline{M}_1\right) = \emptyset.$$

Tedy jsme sestrojili O_1^{p+1} a O_2^{p+1} tak, že je splněn předpoklad H_{p+1}.

III. Předpoklad H_0 je ovšem splněn, neboť nevyžaduje nic. Tedy podle II lze postupně sestrojiti pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ otevřené množiny O_1^n a O_2^n tak, že $F_1^n \subset O_1^n$, $F_2^n \subset O_2^n$, $\overline{O_1^n} \,.\, \overline{M}_2 = \overline{O_2^n} \,.\, \overline{M}_1 = \emptyset$, $\overline{O_1^i} \,.\, \overline{O_2^k} = \emptyset$. Položme $O_1 = \sum_{n=1}^{\infty} O_1^n$, $O_2 = \sum_{n=1}^{\infty} O_2^n$. Množiny O_1 a O_2 jsou otevřené a jest $M_1 \subset O_1$, $M_2 \subset O_2$, $O_1 O_2 = \emptyset$. Tedy M_1 a M_2 jsou O-oddělené.

8·6·4. Nechť P je ARU-prostor. Nechť $M_1 \subset P$ a $M_2 \subset P$ jsou spočetné. Nechť M_1 a M_2 jsou oddělené. Pak M_1 a M_2 jsou O-oddělené.

Důkaz. Jest $M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_1^n$, $M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} F_2^n$, kde F_1^n a F_2^n jsou jednobodové množiny. Důkaz pak pokračuje doslova stejně jako u **8·6·3**, pouze místo vlastnosti (2) N-prostoru se užije věty **8·5·7.**

Z **8·6·4** vychází věta

8·6·5. Spočetný ARU-prostor je N-prostor.

8·6·6. Nechť P je N-prostor a nechť množina $Q \subset P$ je F_σ. Pak Q (jako prostor vnořený do P) je N-prostor.

Důkaz. Q je AU-prostor podle **6·2·1** a **7·1·2.** Nechť množiny $M_1 \subset Q$ a $M_2 \subset Q$ jsou relativně uzavřené a $M_1 M_2 = \emptyset$. Máme dokázati, že M_1 a M_2 jsou O-oddělené v Q. Zřejmě M_1 a M_2 jsou oddělené v Q, takže (**8·1·1**) jsou oddělené v P. Jest $Q = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou uzavřené. Podle **6·2·2** existují uzavřené množiny Φ_1 a Φ_2 takové, že $M_1 = Q\Phi_1$, $M_2 = Q\Phi_2$. Tedy $M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\Phi_1$, takže M_1 je F_σ a podobně i M_2 je F_σ. Tedy podle **8·6·3** M_1 a M_2 jsou O-oddělené v P, takže (**8·1·2**) jsou O-oddělené v Q.

Řekneme, že P je dědičný N-prostor,[17]) když každý prostor vnořený do P je N-prostor.

Z **8·6·5** vychází podle **6·2·1**, **7·1·2** a **8·5·1** věta

8·6·7. Spočetný ARU-prostor je dědičný N-prostor.

8·6·8. Nechť P má tu vlastnost, že každá otevřená množina $Q \subset P$ (jako prostor vnořený do P) je N-prostor. Pak P je dědičný N-prostor.

8·6·9.[18]) P je dědičný N-prostor, když a jen když (1) P je AU-prostor, (2) P má tuto vlastnost: Jsou-li $M_1 \subset P$ a $M_2 \subset P$ oddělené, jsou O-oddělené.

Důkaz vět **8·6·8** a **8·6·9.** Zřejmě stačí dokázati jednak, že vlastnost předpokládaná v **8·6·8** implikuje vlastnosti tvrzené v **8·6·9**, jednak, že vlastnosti (1) a (2) z **8·6·9** implikují, že P je dědičný N-prostor.

I. Nechť P má vlastnost předpokládanou v **8·6·8.** Pak P je N-prostor, tedy P je AU-prostor. Nechť $M_1 \subset P$ a $M_2 \subset P$ jsou oddělené. Položme $G = P - \overline{M}_1 \overline{M}_2$. Pak G je otevřená množina a $M_1 \subset G\overline{M}_1$, $M_2 \subset G\overline{M}_2$. Jest $G\overline{M}_1 \, . \, G\overline{M}_2 = \emptyset$ a množiny $G\overline{M}_1$ a $G\overline{M}_2$ jsou (**1·5·1**) uzavřené v prostoru G. Ježto G je otevřená v P, G je N-prostor, takže $G\overline{M}_1$ a $G\overline{M}_2$ jsou O-oddělené v G. Tedy existují množiny O_1 a O_2 otevřené v prostoru G a takové, že $M_1 \subset G\overline{M}_1 \subset O_1$, $M_2 \subset G\overline{M}_2 \subset O_2$, $O_1 O_2 = \emptyset$. Podle **6·2·3** existují otevřené množiny Ω_1 a Ω_2 takové, že $O_1 = \Omega_1 G$, $O_2 = \Omega_2 G$. Tedy O_1 a O_2 jsou otevřené, takže M_1 a M_2 jsou O-oddělené.

II. Nechť P má vlastnosti (1) a (2) z **8·6·9.** Nechť prostor Q je vnořen do P. Q je AU-prostor podle **6·2·1** a **7·1·2.** Nechť $M_1 \subset Q$ a $M_2 \subset Q$ jsou relativně uzavřené a $M_1 M_2 = \emptyset$. Máme dokázati, že M_1 a M_2 jsou O-oddělené v Q. Zřejmě M_1 a M_2 jsou oddělené v Q, tedy (**8·1·1**) oddělené v P, takže podle vlastnosti (2) jsou M_1 a M_2 O-oddělené v P, tedy (**8·1·2**) O-oddělené v Q.

9·1. Nechť P je prostor. Pak můžeme každé bodové množině M přiřaditi novou bodovou množinu, která se nazývá derivací množiny M a zpravidla se označuje M'. Je definována takto:

$$a \in M' \Leftrightarrow a \in \overline{M - (a)}. \tag{1}$$

Z axiomů (I^u) až (III^u) následuje snadno, že derivace splňuje axiomy

$$(\mathrm{I}^d) \qquad \emptyset' = \emptyset.$$

$$(\mathrm{II}^d) \qquad a \in M' \Rightarrow a \in [M - (a)]'.$$

$$(\mathrm{III}^d) \qquad M_1 \subset M_2 \Rightarrow M'_1 \subset M'_2.$$

---

[17]) Také tento pojem zavedl H. Tietze (loc. cit. sub[13]), str. 301). Urysohn (loc. cit. sub[15]), str. 265) zavedl pro něj název úplně normální prostor.

[18]) Loc. cit. sub[13]), str. 284.

Mimo to se snadno odvodí, že pro každou $M \subset P$ platí

(2) $$\overline{M} = M + M'.$$

Obráceně nechť je každé části M dané množiny P přiřazena nová část M' množiny P tak, že jsou splněny axiomy (I^d) až (III^d). Pak můžeme definovati $\overline{M}$ pomocí (2) a přesvědčíme se snadno jednak o tom, že platí axiomy (I^u) až (III^u), jednak že platí (1). Z toho plyne, že místo toho, abychom jako v textu zavedli axiomaticky topologii pomocí pojmu uzávěru, mohli jsme postupovati jinak, považujíce za primitivní pojem derivaci. Při tomto postupu by byla na př. uzavřená množina M definována vztahem $M' \subset M$.

Když prostor Q je vnořen do prostoru P a když $M \subset Q$, pak množina M má dvojí derivaci, totiž jednak derivaci v prostoru P, kterou označíme prostě M', jednak relativní derivaci, t. j. derivaci v prostoru Q. Snadno se přesvědčíme, že relativní derivace je QM'.

Když byla do P zavedena topologie pomocí úplných systémů $\mathfrak{O}(a)$ okolí jednotlivých bodů $a \in P$ [splňujících axiomy (I^o) a (II^o) vyslovené ve **4·1**], pak je podle **4·1·1** a (1) derivace bodové množiny M určena větou

9·1·1. Jest $a \in M'$, když a jen když každá $O \in \mathfrak{O}(a)$ obsahuje aspoň jeden bod množiny M různý od bodu a.

9·1·2. Nechť P je ABU-prostor a $M \subset P$. Pak M' je uzavřená množina.

Důkaz. Máme dokázati, že $M'' \subset M'$. Nechť naopak $a \in M'' - M'$. Ježto $a \in P - M'$, existuje okolí O bodu a takové, že $OM \subset (a)$. Ježto P je U-prostor, existuje otevřené okolí Ω bodu a takové, že $\Omega \subset O$. Ježto $a \in M''$, existuje bod b takový, že $b \neq a$, $b \in \Omega M'$. Pak Ω je okolí bodu b; ježto P je B-prostor, také $P - (a)$ je okolí bodu b; ježto P je A-prostor, také $\Omega - (a) = \Omega \,.\, [P - (a)]$ je okolí bodu b. Ježto $b \in M'$, je tedy $[\Omega - (a)] \,.\, M \neq \emptyset$, což je spor, neboť $\Omega M \subset OM \subset (a)$.

Nechť P_9 je množina všech přirozených čísel. Když $M \subset P_9$ je konečná a $1 \in P_9 - M$, nechť $\overline{M} = M$; jinak nechť $\overline{M} = P_9$. Pak P_9 je AU-prostor a derivace jednobodové množiny (1) není uzavřená.

9·2. Řekneme, že $a \in P$ je hromadný bod množiny $M \subset P$, když pro každé okolí O bodu a platí, že množina OM je nekonečná. Označíme M^h množinu všech hromadných bodů množiny M.

Z **9·1·1** plyne věta

9·2·1. Pro každou $M \subset P$ je $M^h \subset M'$.

Zřejmé jsou věty:

9·2·2. Když množina $K \subset P$ je konečná, pak $K^h = \emptyset$.

9·2·3. Když $M \subset P$, $K \subset P$ a když K je konečná, pak

$$(M + K)^h = (M - K)^h = M^h.$$

9·2·4. Když $M_1 \subset M_2 \subset P$, pak $M_1^h \subset M_2^h$.

9·2·5. Nechť P je A-prostor, $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$. Pak

$$(M_1 + M_2)^h = M_1^h + M_2^h.$$

9·2·6. Nechť P je U-prostor a $M \subset P$. Pak M^h je uzavřená množina.

Důkaz. Máme dokázati, že $(M^h)' \subset M^h$. Nechť naopak $a \in (M^h)' - M^h$. Ježto $a \in P - M^h$, existuje okolí O bodu takové a, že množina OM je konečná. Ježto P je U-prostor, existuje otevřené okolí $\Omega \subset O$ bodu a. Ježto $a \in (M^h)'$, existuje $b \in \Omega \,.\, M^h$. Pak Ω je okolí bodu b; ježto $b \in M^h$, množina ΩM je nekonečná. To je spor, neboť $\Omega M \subset OM$.

9·2·7. Nechť prostor P má tu vlastnost, že pro každou $M \subset P$ a pro každou konečnou $K \subset P$ je $\overline{M + K} = \overline{M} + K$. [To nastane zejména, když P je AB-prostor]. Pak pro každou $M \subset P$ je $M^h = M'$.

Důkaz. Nechť $M^h \neq M'$. Podle **9·2·1** existuje $a \in M' - M^h$. Ježto $a \in P - M^h$, existuje okolí O bodu a takové, že množina OM je konečná. Ježto O je okolí bodu a, není $a \in \overline{P - O}$. Ježto $OM - (a)$ je konečná množina, je

$$(1) \qquad \overline{P - O + [OM - (a)]} = \overline{P - O} + OM - (a),$$

takže množina (1) neobsahuje bod a. Tedy $\Omega = P - \{\overline{P - O + [OM - (a)]}\} = (a) + O - M$ je okolí bodu a. Avšak $\Omega M \subset (a)$, takže podle **9·1·1** není $a \in M'$, což je spor.

9·2·8. Nechť pro každou $M \subset P$ je $M^h = M'$. Pak pro každou $M \subset P$ a pro každou konečnou $K \subset P$ je $\overline{M + K} = \overline{M} + K$.

Důkaz. Jest

$$\overline{M} = M + M' = M + M^h,$$

$$\overline{M + K} = M + K + (M + K)' = M + K + (M + K)^h,$$

ale podle **9·2·3** je

$$M^h = (M + K)^h.$$

Dané topologii v P přiřaďme nyní novou topologii u tak, aby při topologii u derivací libovolné množiny $M \subset P$ byla množina M^h. To lze, neboť podle **9·2·2** až **9·2·4** budou splněny axiomy (I^d) až (III^d). Řekneme, že u je B-modifikace původní topologie v P. Z **9·2·2** následuje věta

9·2·9. B-modifikace libovolné topologie je B-topologie.

Z **9·2·5** následuje věta

9·2·10. B-modifikace A-topologie je A-topologie.

9·2·11. B-modifikace U-topologie je U-topologie.

Důkaz. Stačí dokázati, že $(M + M^h)^h \subset M^h$. Nechť naopak

$a \in (M + M^h)^h - M^h$. Ježto $a \in P - M^h$ a ježto P je U-prostor, existuje otevřené okolí O bodu a takové, že množina OM je konečná. Ježto $a \in (M + M^h)^h$, množina $O(M + M^h)$ je nekonečná. Tedy existuje $b \in OM^h$. Pak O je okolí bodu b a $b \in M^h$, takže OM je nekonečná, což je spor.

9·2·12. Nechť v je A-topologie v P; nechť u je její B-modifikace. Pak (1) u je AB-topologie, (2) topologie u je slabší než v, (3) u je nejsilnější topologie s vlastnostmi (1) a (2).

Důkaz. Už víme, že u je AB-topologie. Z **9·2·1** plyne, že u je slabší než v. Nechť w je AB-topologie slabší než v. Nechť $M \subset P$, $a \in wM$. Máme dokázati, že $a \in uM$. Nechť není $a \in uM$. Pak není $a \in M$ a existuje množina O, která je okolím bodu a při topologii v a má tu vlastnost, že množina $K = OM$ je konečná. Podle **2·1·9** O je okolím bodu a při topologii w. Avšak w je AB-topologie a $K \subset P - (a)$ je konečná množina. Z toho následuje snadno, že $\Omega = O - K$ je okolí bodu a při topologii w. Ježto $a \in wM$, je $\Omega M \neq \emptyset$, což je spor.

Obdobné vlastnosti jako M' a M^h má, při libovolně daném kardinálním čísle $\mathfrak{a}$, množina $M^{\mathfrak{a}}$ těch $a \in P$, pro něž platí, že množina $OM - (a)$ má mohutnost $\geqq \mathfrak{a}$ pro každé okolí O bodu a. Zřejmě $M^{\mathfrak{a}} = M'$ pro $\mathfrak{a} = 1$, $M^{\mathfrak{a}} = M^h$ pro $\mathfrak{a} = \aleph_0$.

10·1. Nechť (P, u) a (P_1, v) jsou dva dané prostory a nechť f je zobrazení P do P_1. Nechť $a \in P$. Řekneme, že a je bod spojitosti zobrazení f, když pro každou $M \subset P$ platí

$$a \in uM \Rightarrow f(a) \in v[f(M)].$$

10·1·1. $a \in P$ je bod spojitosti zobrazení f, když a jen když pro každé okolí Ω bodu $f(a)$ v prostoru (P_1, v) množina $f_{-1}(\Omega)$ je okolím bodu a v prostoru (P, u).

Důkaz. I. Nechť a je bod spojitosti. Nechť Ω je okolí bodu $f(a)$ v prostoru (P_1, v). Nechť $O = f_{-1}(\Omega)$. Předpokládejme, že O není okolím bodu a v prostoru (P, u). Pak je $a \in u(P - O)$, tedy $f(a) \in v[f(P - O)] = v[f(P) - \Omega] \subset v(P_1 - \Omega)$, takže Ω není okolí bodu $f(a)$ v prostoru (P_1, v).

II. Nechť $f_{-1}(\Omega)$ je okolí bodu a, kdykoli Ω je okolí bodu $f(a)$. Nechť $M \subset P$, $a \in uM$. Předpokládejme, že není $f(a) \in v[f(M)]$. Pak $\Omega = P_1 - f(M)$ je okolí bodu $f(a)$ v prostoru (P, v), takže $f_{-1}(\Omega)$ je okolí bodu a v prostoru (P, u). Zřejmě $f_{-1}(\Omega) \subset P - M$, takže také $P - M$ je okolí bodu a v prostoru (P, u), což je spor.

Nechť je topologie u dána pomocí systémů $\mathfrak{O}(a)$ definujících okolí jednotlivých bodů $a \in P$ a podobně nechť je topologie v dána pomocí systémů $\mathfrak{O}_1(b)$ definujících okolí jednotlivých bodů $b \in P_1$. Pak následuje z **10·1·1**, že $a \in P$ je bod spojitosti zobrazení f, když a jen když ke každé množině $\Omega \in \mathfrak{O}_1[f(a)]$ existuje množina $O \in \mathfrak{O}(a)$ taková, že $f(O) \subset \Omega$.

Řekneme, že zobrazení f je spojité, když každý $a \in P$ je jeho bodem spojitosti. Tedy f je spojité, když a jen když pro každou $M \subset P$ platí

$$f(uM) \subset v[f(M)].$$

Nechť $f(P) \subset Q_1 \subset P_1$. Topologií v v P_1 je určena (**1·5**) topologie w v Q_1; f je pak také zobrazením prostoru (P, u) do prostoru (Q_1, w). Lehko se dokáže, že množina bodů spojitosti zobrazení f zůstane nezměněna, když od (P_1, v) přejdeme ke (Q_1, w). Proto při vyšetřování spojitosti zpravidla stačí se omeziti na případ, kdy $P_1 = f(P)$, t. j. stačí studovati zobrazení P na P_1.

Nechť f je zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P_1, v). Pravíme, že f je homeomorfní, když (1) f je prosté, (2) f je spojité, (3) také inversní zobrazení f_{-1} je spojité. Tedy f je homeomorfní, když a jen když (1) f je prosté, (2) pro každou $M \subset P$ je $f(uM) = v[f(M)]$.

Zřejmá je věta

10·1·2. Nechť u a v jsou dvě topologie v P. Nechť f je identické zobrazení [t. j. $f(a) = a$ pro každý $a \in P$] prostoru (P, u) na prostor (P, v). Pak f je spojité, když a jen když topologie u je slabší než v a f je homeomorfní, když a jen když $u = v$.

10·2. Nechť (P, u), (P_0, w) a (P_1, v) jsou tři prostory. Nechť φ je zobrazení P do P_0. Nechť ψ je zobrazení P_0 do P_1. Pak dostaneme zobrazení f prostoru P do P_1 definujíce $f(a) = \psi[\varphi(a)]$ pro každý $a \in P$. Řekneme, že zobrazení f je složeno ze zobrazení φ a ψ (v tomto pořádku). Zřejmá je věta

10·2·1. Je-li a bod spojitosti zobrazení φ a je-li $f(a)$ bod spojitosti zobrazení ψ, pak a je bod spojitosti složeného zobrazení f.

Z **10·2·1** plyne věta

10·2·2. Zobrazení složené ze dvou spojitých zobrazení je spojité.

Nechť f je zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P_1, v). Řekneme, že f je přesně spojité, když pro každou množinu $M_1 \subset P_1$ platí

(1) $$vM_1 = f(uM), \text{ kde } M = f_{-1}(M_1).$$

10·2·3. Přesně spojité zobrazení je spojité.

Důkaz. Nechť $M_0 \subset P$, $M_1 = f(M_0)$, $M = f_{-1}(M_1)$. Pak je $M_0 \subset M$, tedy $uM_0 \subset uM$, $f(uM_0) \subset f(uM)$. Když f je přesně spojité, platí (1), tedy $f(uM_0) \subset vM_1 = v[f(M_0)]$.

Zřejmá je věta

10·2·4. Prosté zobrazení je přesně spojité, když a jen když je homeomorfní.

Zřejmá je věta

10·2·5. Nechť f je zobrazení množiny P na množinu P_1. Nechť je v P dána topologie u. Pak existuje jedna a jen jedna topologie v v P taková, že f je přesně spojité zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P_1, v).

10·2·6. Nechť f je spojité zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P_1, v). Pak lze určiti prostor (P_0, w), dále přesně spojité zobrazení φ prostoru (P, u) na prostor (P_0, w) a konečně prosté spojité zobrazení ψ prostoru (P_0, w) na prostor (P_1, v) tak, že f je složeno z φ a ψ.

Důkaz. Položme $P_0 = P_1$. Pro $a \in P$ nechť $\varphi(a) = f(a)$; pro $b \in P_0$ nechť $\psi(b) = b$. Pak f je složeno z φ a ψ. Podle **10·2·5** existuje topologie w v P_0 taková, že φ je přesně spojité. Zřejmě ψ je prosté, takže jest ještě dokázati, že ψ je spojité. Nechť $M \subset P_0$. Máme dokázati, že $wM \subset vM$. Ježto f je spojité, je $f\{u[f_{-1}(M)]\} \subset vM$. Ježto φ je přesně spojité, je $wM = f\{u[\varphi_{-1}(M)]\}$. Avšak $f_{-1}(M) = \varphi_{-1}(M)$, tedy $wM \subset vM$.

Zřejmá je věta

10·2·7. Existuje-li přesně spojité zobrazení A-prostoru P na prostor P_1, pak P_1 je A-prostor.

Z **10·2·6** a **10·2·7** plyne

10·2·8. Ve větě **10·2·6** je dovoleno (současně na všech místech) slovo prostor nahraditi slovem A-prostor.

Zřejmá je věta

10·2·9. Existuje-li prosté spojité zobrazení prostoru P na B-prostor P_1, pak P je B-prostor.

Z **10·2·6** a **10·2·9** plyne

10·2·10. Ve větě **10·2·6** je dovoleno (současně na všech místech) slovo prostor nahraditi slovem B-prostor.

Z **10·2·6**, **10·2·7** a **10·2·9** plyne

10·2·11. Ve větě **10·2·6** je dovoleno (současně na všech místech) slovo prostor nahraditi slovem AB-prostor.

Nechť P obsahuje právě čtyři body: a, b', b'', c; nechť $\bar{a} = (a) + (b')$, $\bar{b}' = (b')$, $\bar{b}'' = (b'') + (c)$, $\bar{c} = (c)$; uzávěr množiny $M \subset P$ nechť je součet uzávěrů jejích bodů. Nechť P_1 obsahuje právě tři body: α, β, γ; nechť $u\alpha = (\alpha) + (\beta)$, $v\alpha = (\alpha) + (\beta) + (\gamma)$, $u\beta = v\beta = (\beta) + (\gamma)$; $u\gamma = v\gamma = \gamma$; když $M_1 \subset P_1$, nechť uM_1 je součet všech $u\xi$ pro $\xi \in M_1$ a podobně pro vM_1. Nechť $f(a) = \alpha$, $f(b') = f(b'') = \beta$, $f(c) = \gamma$. Pak f je přesně spojité zobrazení AU-prostoru P na prostor $(P_1. u)$, ale (P_1, u) není U-prostor. Mimo to f je spojité zobrazení AU-prostoru P na AU-prostor (P_1, v), ale neexistuje U-prostor P_0 takový, aby bylo lze složiti f z přesně spojitého zobrazení prostoru P na P_0 a z prostého spojitého zobrazení prostoru P_0 na (P_1, v).

10·3. 10·3·1. Nechť f je spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Když $M_1 \subset P_1$ je uzavřená v prostoru P_1, pak $M = f_{-1}(M_1)$ je uzavřená v prostoru P. Když M_1 je otevřená v P_1, pak M je otevřená v P.

Důkaz. I. Nechť M_1 je uzavřená. Pak $M_1 = \overline{M}_1$. Ježto f je spojité, je $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)} = \overline{M}_1 = M_1$, tedy $\overline{M} \subset f_{-1}(M_1) = M$, tedy M je uzavřená.

II. Nechť M_1 je otevřená. Pak $P_1 - M_1$ je uzavřená, tedy $f_{-1}(P_1 - M_1) = P - f_{-1}(M_1)$ je uzavřená, tedy $f_{-1}(M_1)$ je otevřená.

10·3·2. Nechť f je zobrazení prostoru P na U-prostor P_1. Nechť pro každou $M_1 \subset P_1$ uzavřenou v prostoru P_1 platí, že $f_{-1}(M_1)$ je uzavřená v prostoru P_1. Pak zobrazení f je spojité.

Důkaz. Nechť $M \subset P$. Máme dokázati, že $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$. Ježto P_1 je U-prostor, $M_1 = \overline{f(M)}$ je uzavřená v P_1, takže $f_{-1}(M_1)$ je uzavřená v P. Avšak $M \subset f_{-1}(M_1)$, tedy $\overline{M} \subset \overline{f_{-1}(M_1)} = f_{-1}(M_1)$, t. j. $f(\overline{M}) \subset M_1 = \overline{f(M)}$.

10·3·3. Nechť f je zobrazení prostoru (P, v) na U-prostor P_1. Nechť u je U-modifikace topologie v. Pak f je spojité zobrazení prostoru (P, u) na P_1, když a jen když f je spojité zobrazení prostoru (P, v) na P_1.

Důkaz vychází snadno z **10·3·2**, neboť uzavřené množiny jsou stejné při obou topologiích.

Nechť f je zobrazení prostoru P na prostor P_1. Řekneme, že (1) f je uzavřené, když pro každou $M \subset P$ uzavřenou v P platí, že $f(M)$ je uzavřená v P_1; (2) f je polouzavřené, když pro každou $M_1 \subset P_1$ takovou, že $M = f_{-1}(M_1)$ je uzavřená v P, platí, že $f(M) = M_1$ je uzavřená v P_1.

10·3·4. Nechť f je přesně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pak f je polouzavřené.

Důkaz. Nechť $M_1 \subset P_1$, $M = f_{-1}(M_1)$, $M = \overline{M}$. Máme dokázati, že $M_1 = \overline{M}_1$. Avšak $\overline{M}_1 = f(\overline{M}) = f(M) = M_1$.

V příkladu na konci odst. **10·2** je f spojité polouzavřené zobrazení AU-prostoru P na AU-prostor (P_1, v), ale f není přesně spojité.

10·3·5. Nechť f je uzavřené spojité zobrazení U-prostoru P na prostor P_1. Pak P_1 je U-prostor a f je přesně spojité.

Důkaz. Nechť $M_1 \subset P_1$. Položme $M = f_{-1}(M_1)$. Ježto P je U-prostor, je $\overline{M}$ uzavřená v P; ježto f je uzavřené, $f(\overline{M})$ je uzavřená v P_1, t. j. $\overline{f(\overline{M})} = f(\overline{M})$, tedy $\overline{f(M)} \subset f(\overline{M})$, t. j. $\overline{M}_1 \subset f(\overline{M})$. Ježto f je spojité, je $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)} = \overline{M}_1$. Tedy $\overline{M}_1 = f(\overline{M})$, t. j. f je přesně spojité. Mimo to bylo $f(\overline{\overline{M}}) = f(\overline{M})$, tedy $\overline{\overline{M}}_1 = \overline{M}_1$, t. j. P_1 je U-prostor.

Nechť prostor (P, v) není U-prostor a nechť u je U-modifikace topologie v. Pak identické zobrazení je spojité uzavřené zobrazení prostoru (P, v) na prostor (P, u), které není přesně spojité.

10·3·6. Nechť f je zobrazení množiny P na množinu P_1. Nechť je v P dána topologie u. Pak existuje jedna a jen jedna U-topologie v v P_1 taková, že f je spojité polouzavřené zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P_1, v).

Důkaz. Nechť $M_1 \subset P_1$. Je-li $f_{-1}(M_1)$ uzavřená v (P, u), musí býti M_1 uzavřená v (P_1, v), jinak by f nebylo polouzavřené. Není-li $f_{-1}(M_1)$ uzavřená v P, nemůže býti M_1 uzavřená v (P_1, v), jinak by podle **10·3·1** f nebylo spojité. Musíme tedy $M_1 \subset P_1$ prohlásiti za uzavřenou při topologii v, když a jen když $f_{-1}(M_1)$ je uzavřená při topologii u. Pak budou splněny axiomy (I^f) až (III^f) (**6·1**), takže (**6·1·3**) jsme do P_1 zavedli U-topologii v. Při topologiích u a v je zobrazení f zřejmě polouzavřené a podle **10·3·2** také spojité.

10·3·7. Nechť f je spojité zobrazení U-prostoru (P, u) na U-prostor (P_1, v). Pak lze určiti U-prostor (P_0, w), dále spojité polouzavřené zobrazení φ prostoru (P, u) na prostor (P_0, w) a konečně prosté spojité zobrazení ψ prostoru (P_0, w) na prostor (P_1, v) tak, že f je složeno z φ a ψ.

Důkaz. Položme $P_0 = P_1$. Pro $a \in P$ nechť $\varphi(a) = f(a)$; pro $b \in P_0$ nechť $\psi(b) = b$. Pak f je složeno z φ a ψ. Podle **10·3·6** existuje U-topologie w v P_0 taková, že φ je spojité polouzavřené. Zřejmě ψ je prosté, takže stačí dokázati, že ψ je spojité. Nechť $M_1 \subset P_1$ je uzavřená při topologii v. Podle **10·3·2** stačí dokázati, že $\psi_{-1}(M_1) = M_1$ je uzavřená při topologii w. Podle **10·3·1** $M = f_{-1}(M_1)$ je uzavřená v P; ježto φ je polouzavřená a $M = \varphi_{-1}(M_1)$, M_1 je uzavřená při topologii w.

10·3·8. Nechť existuje spojité polouzavřené zobrazení A-prostoru P na U-prostor P_1. Pak P_1 je A-prostor.

Důkaz. Podle důkazu věty **10·3·6** množina $M_1 \subset P_1$ je uzavřená v P_1, když a jen když $f_{-1}(M_1)$ je uzavřená v P. Tedy je v P_1 splněn axiom $(\mathrm{IV}^f)_A$ (**7·1**), takže P_1 je AU-prostor.

Z **10·3·7** a **10·3·8** plyne

10·3·9. Ve větě **10·3·7** je dovoleno (současně na všech místech) slovo U-prostor nahraditi slovem AU-prostor.

Z **10·3·7** a **10·2·9** plyne

10·3·10. Ve větě **10·3·7** je dovoleno (současně na všech místech) slovo U-prostor nahraditi slovem BU-prostor.

Z **10·3·7**, **10·2·9** a **10·3·8** plyne

10·3·11. Ve větě **10·3·7** je dovoleno (současně na všech místech) slovo U-prostor nahraditi slovem ABU-prostor.

11·1. Z topologických prostorů nejdůležitější jsou prostory metrisovatelné.

Nechť ve množině P je dána metrika ϱ(BM[19]) **6·1**). Pak definujeme uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ tímto způsobem (BM **8·1**): $a \in \overline{M}$, když a jen když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje bod $b \in M$ takový, že $\varrho(a, b) < \varepsilon$. Podle BM **8·1** jsou pak splněny axiomy (I^u) až (III^u), takže jsme do P zavedli topologii. Dá-li se daná topologie v P zavésti právě popsaným způsobem pomocí nějaké metriky ϱ, říkáme, že P je metrisovatelný prostor. Topologii metrisovatelného prostoru P lze zavésti různými metrikami. Z BM **8·2·1** se snadno odvodí, že metriky ϱ_1 a ϱ_2 určují stejnou topologii, když a jen když jsou ekvivalentní (BM **7·2**). Všimněme si rozdílu mezi pojmy metrického a metrisovatelného prostoru; v metrickém prostoru je metrika dána a jí je určena také topologie; v metrisovatelném prostoru je dána pouze topologie, ovšem taková, že existují metriky ji určující.

Metrisovatelný prostor P je A-prostor podle BM **8·1**, U-prostor podle BM **8·2** a B-prostor podle BM **8·3·2.** Podle **8·6·9** a BM **10·2·7** metrisovatelný prostor P je dědičný N-prostor, takže (**8·6·2**) P je R-prostor.

Všimněme si ještě (v. **1·5** a BM **8·7·1**), že prostor vnořený do metrisovatelného prostoru je metrisovatelný.

Jiný důležitý typ topologických prostorů tvoří prostory uspořádané. Nechť P je uspořádaná množina (BM **4·1**); nechť $a < b$ znamená, že a je před b. Zaveďme do P topologii tím, že pro každý $a \in P$ volíme za systém $\mathfrak{O}(a)$ definujících okolí všecky množiny tvaru

$$E_x[u < x < v], \tag{1}$$

kde $u \in P$ a $v \in P$ jsou voleny tak, že $u < a < v$; je-li snad a první v P, odpadne u a místo (1) přijde množina

$$E_x[x < v],$$

---

[19]) BM znamená odkaz na moje Bodové množiny, část první.

kde $v \in P$, $a < v$; podobně, když a je poslední v P. Axiomy (I°) a (II°) jsou splněny, takže P je topologický prostor. Řekneme, že P je uspořádaný prostor v přirozené topologii. Snadno se dokáže, že P je $ABRU$-prostor. E. Chittenden zjistil 1936 na můj podnět, že P je dědičný N-prostor.

Uvedu ještě několik jiných zajímavých příkladů topologických prostorů.

Nechť P znamená interval

$$\underset{t}{E}[0 \leqq t \leqq 1];$$

podle **6·1·3** zaveďme do P U-topologii tím, že za uzavřené množiny prohlásíme (1) $\emptyset$, (2) každou jednobodovou množinu, (3) každý interval tvaru

$$\underset{t}{E}[a \leqq t \leqq b] \quad (0 \leqq a < b \leqq 1).$$

Lehko se dokáže, že A-modifikace (**7·3**) této topologie je obyčejná topologie v P.

Zvolme $P = \mathsf{E}_2$ a zaveďme do P nejprve tuto topologii v. Když $M \subset P$, pak $a \in vM$ znamená, že buďto $a \in M$ nebo že a je bodem úsečky, jejíž krajní body jsou v M. Zřejmě v není ani A-topologie ani U-topologie. Za druhé zaveďme do P tuto topologii u. Když $M \subset P$, pak uM je nejmenší konvexní množina $K \subset \mathsf{E}_2$ taková, že $M \subset K$. Zřejmě u je U-modifikace (**6·1**) topologie v.

Nechť P je daný topologický prostor a nechť $\mathfrak{P}$ je daný systém jeho částí. Do $\mathfrak{P}$ zaveďme topologii u tím, že pro každou množinu $A \in \mathfrak{P}$ zvolíme za systém $\mathfrak{O}(A)$ definujících okolí všecky množiny tvaru

$$\underset{X}{E}[X \in \mathfrak{P},\ F \subset X \subset G],$$

kde $F \subset P$ a $G \subset P$ jsou voleny tak, že (1) F je uzavřená v P, (2) G je otevřená v P, (3) $F \subset A \subset G$.

11·2. Z velmi skromných počátků se vyvinula topologie v tomto století v jednu z nejbohatších větví matematiky. Mimo to se v četných případech došlo užitím topologických metod k podstatnému pokroku v jiných partiích matematiky. Ovšem převážná většina aplikací topologie se týká prostorů metrických. S tím souvisí fakt, že topologie metrických prostorů je dnes v daleko pokročilejším stadiu než topologie obecná. Ale právě proto je v obecné topologii celá řada jednoduchých a přirozených neřešených problémů, k jejichž řešení je ovšem třeba matematického nadání, zpravidla však nikoli velkých literárních znalostí.

Zakladatelem obecné topologie je M. Fréchet (Thèse 1906).

Výsledky svých velmi četných prací v tomto oboru spolu s příbuznými výsledky jiných autorů shrnul Fréchet ve své knize Les espaces abstraits (1928), která plně uspokojí čtenáře dychtivého poznati historický vývoj a informovati se zhruba o docílených výsledcích, ve které se však jen výjimečně shledá s důkazy. Fréchetovo dílo v obecné topologii je velmi podnětné a bohaté na nové ideje, ale většinou je pouze programatické a málokde dochází ke skutečně soustavnému a definitivnímu propracování.

Velký vliv na další vývoj obecné topologie měl F. Hausdorff svojí knihou Grundzüge der Mengenlehre (1914), ve které studuje AHU-prostory. Jest velmi litovati toho, že v důsledku nakladatelem předepsaného rozsahu se musil Hausdorff ve své Mengenlehre (1927 a 1936), která je do jisté míry novým vydáním Grundzüge, omeziti na metrisovatelné prostory.

Velmi zdařilý moderní výklad teorie AU-prostorů podává prvá kapitola Kuratowského Topologie I (1933).

11·3. Tento článek vznikl z přednášek, které konám v Brně v topologickém semináři počínaje květnem 1936. Tyto přednášky mají za účel býti podkladem pro samostatnou vědeckou práci členů semináře. Jejich charakteristickým znakem je, že jejich trvání není časově omezeno, t. j. že není předem dán termín, do kterého by studium určité partie mělo býti dokončeno. To se jeví v tomto článku tím, že je omezen na podrobné studium několika základních pojmů.

Na přednášky jsem navázal řadu neřešených problémů, z nichž většina byla členy semináře řešena. Avšak výsledky docílené členy semináře nebyly do článku pojaty, nýbrž budou uveřejněny samostatně. Za to předkládám zde několik dalších problémů.

Problém I. Jaká je mohutnost všech topologií, všech U-topologií atd. v konečné množině P?

Problém II. Týž problém pro spočetnou množinu P.[20])

Problém III. Z dané topologie v P můžeme odvoditi nové topologie v P různými operacemi: U-modifikací (**6·1**), A-modifikací (**7·2**), B-modifikací (**9·2**). Za jakých okolností jsou tyto operace záměnné?

Problém IV. Vedle A-modifikace byl v **7·2** zaveden ještě obecnější pojem, totiž A-modifikace redukovaná na Q. Dá se obdobně zobecniti také U-modifikace a B-modifikace?

Problém V. Nechť v je topologie v P. Řekneme, že v má vlastnost α, když ty $M \subset P$, pro něž $vM - M$ je jednobodová, tvoří dolní basi. Řekneme, že v má vlastnost β, když neexistuje

[20]) Problém II byl řešen p. B. Pospíšilem.

topologie v P, různá od v a slabší než v, která by měla stejnou U-modifikaci jako v. Zřejmě vlastnost α implikuje vlastnost β. Plyne také obráceně vlastnost α z vlastnosti β?

Problém VI. Jaké vlastnosti musí míti množina A ordinálních čísel, aby existoval spočetný prostor P takový, že A je množina všech $\varphi(M)$, $M \subset P$, kde $\varphi(M)$ má stejný význam jako v **6·5.**[21])

Problém VII. Nechť P je spočetný prostor. Nechť $\vartheta(P)$ má stejný význam jako v **6·5.** Zřejmě $\vartheta(P) \leqq \omega_1$, je-li ω_1 nejmenší nespočetné ordinální číslo. Může býti $\vartheta(P) = \omega_1$?[22])

Problém VIII. Určiti U-prostory, jejichž každý přesně spojitý obraz je U-prostor.

---

[21]) Problém VI. byl řešen p. V. Jarníkem.

[22]) Z Jarníkova řešení problému VI plyne, že odpověď je kladná.