Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bedřich Procházka

Příspěvek ku plochám šroubovým

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 1, 7--15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123367

při označení

$$Sin\, u\pi = sin\, hyp\, u\pi,$$

vyjde

$$\int_0^\infty log \left| \frac{sin\, ux\pi}{ux\pi} \right| \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} log \frac{Sin\, u\pi}{u\pi}, \quad u > 0.$$

Avšak

$$\int_0^\infty log\, x \frac{dx}{1+x^2} = 0, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

a tedy máme

$$\int_0^\infty \frac{log \mid sin\, ux\pi \mid}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} log \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \tag{11}$$

kterýžto vzorec možno rozmanitým způsobem přetvořiti.

Příspěvek ku plochám šroubovým.

Napsal prof. **Bedřich Procházka.**

Ve článku: „Ein Beitrag zur Schattenlehre“ *) odvodil jsem, že orthogonálný průmět křivky vlastního stínu uzavřené šikmé plochy šroubové při ose kolmé k průmětně a při geometrálném osvětlení lze sestrojiti jakožto průmět průsečnice plochy kuželové s jednoplochým hyperboloidem. Tamtéž zabýval jsem se na základě téhož názoru také sestrojením tečny téže křivky. V tomto článku ukáži, že touž cestou s pomocí zásad geometrie kinematické lze dospěti k jejímu středu křivosti.

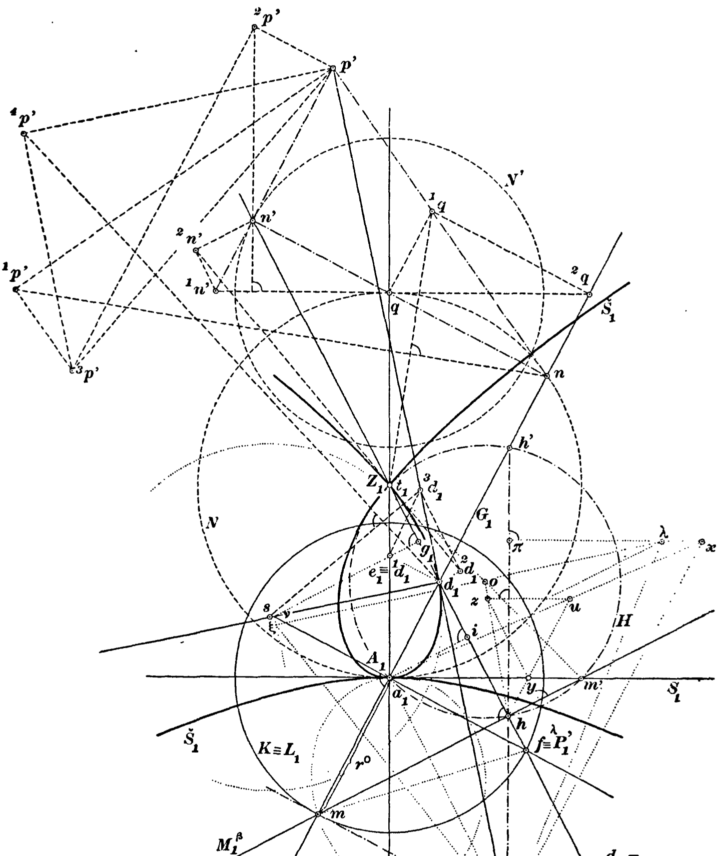
Úlohou touto zabýval se již *prof. Dr. Ch. Wiener* **), avšak jenom pro její bod dvojný jednoduchý a dvojný bod dotyčný, nesestrojoval však poloměr křivosti v libovolném bodě této křivky.

1. Za tím účelem dejme známé konstrukci orthogonálného průmětu křivky vlastního stínu uzavřené šikmé plochy šroubové

*) *Hoppe*, Archiv für Mathematik und Physik, 2. díl. 1885. Str. 101.

**) *Dr. Christian Wiener*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. II. díl, str. 504 a 506.

nový význam a předpokládejme, že v bodě A_1 (obr. 1.) jest dán orthogonálný průmět osy A této plochy a ve přímce P_1 průmět jedné z jejích přímek povrchových. Tato přímka P pro-



Obr. 1.

tíná osu plochy A v bodě a, jehož vzdálenost od průmětny nechť rovna redukované výšce návitkové v^0 *), a vzdálenost

*) Tamtéž str. 367. — *Jarolímek-Procházka*, Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické, Česká Matice technická, Praha, 1909; str. 306.

její stopy m od osy A udává parametr r^0 Archimedovy spirály M_1^S jakožto stopy plochy šroubové *). Přímka S, procházející bodem a a mající svou stopu v bodě m', určuje směr geometrálného osvětlení.

Za příčinou zjednodušení další konstrukce předpokládá se obyčejně, že průmětna se s tvořící přímkou povrchovou pohybuje. Tentokráte však budeme si mysliti, že se tato přímka i s příslušnou plochou normál z každé své polohy posouvne ve směru kolmém ku průmětně tak dalece, až prochází bodem a. Po tomto pošinutí tvoří všechny přímky plošné plochu kuželovou K (kužel řídící plochy šroubové) a její stopy nalézají se v kružnici K, sestrojené z bodu $a_1 \equiv A_1$ jakožto středu poloměrem $\overline{a_1 m}$.

S každou přímkou P plochy šroubové, — jak bylo již řečeno, — pošineme zároveň příslušný hyperbolický paraboloid normál **).

Taková plocha normál má za řídící rovinu prvou — t. j. rovinu, s níž jsou normály rovnoběžny, — rovinu kolmou k P, a za rovinu řídící druhou rovinu kolmou k příslušné rovině asymptotické ***), a tudíž i kolmou k rovině tečné dotýkající se řídícího kužele K dle povrchové přímky rovnoběžné s P. Poněvadž tato rovina má býti kolma k rovině asymptotické a současně rovnoběžna s přímkou P, musí býti kolma k průmětně.

Mezi přímkami soustavy druhé nalézá se také přímka ${}^{\lambda}P'$ kolmá k průmětně, jejíž průmět jest určen průsečíkem průmětů dvou normál. Normála plochy v bodě a, jejíž tečná rovina jest totožna s promítající rovinou přímky P promítá se do přímky $\overline{a_1 f}$ kolmé ku P_1 v bodě a_1.

Průmět normály plochy v bodě m sestrojí se jakožto normála stopy plochy šroubové M_1^S, kteráž jest — jak již předem podotknuto — Archimedovou spirálou o parametru r^0 †). Z konstrukce patrno, že tato normála prochází průsečíkem f přímky $\overline{a_1 f}$ s kružnicí K. Bodem tímto jakožto průmětem povrchové

---

*) Dr. Christ. Wiener, Lehrb. d. darst. Geom. II. díl. str. 493.

**) Jarolímek-Procházka: Deskript. geom., str. 239.

***) *Dr. Ch. Wiener*, Lehrb. d. darst. Geom., II. díl, str. 415.

†) Tamtéž, str. 362.

přímky ${}^{\lambda}P'$ druhé soustavy plochy normál procházejí průměty všech normál plochy šroubové v bodech přímky P sestrojených.

Majíce sestrojiti dotyčný bod b (v obraze nesestrojen) nějaké roviny tečné τ procházející přímkou P, jejíž stopa P_1^{τ} jest dána, sestrojíme jen průmět příslušné normály, kterýž, procházeje bodem ${}^{\lambda}P'_1$ a stoje ku stopě P_1^{τ} kolmo, průmět P_1 v bodě b_1 protíná.

Přímky P a S určují rovinu β, která jest s paprsky světelnými rovnoběžna. Abychom určili dotyčný bod této roviny s pošinutou plochou šroubovou, sestrojíme bodem $f \equiv {}^{\lambda}P'_1$ kolmici ke stopě $M_1^{\beta} \equiv \overline{mm'}$, jakožto průmět oné normály N^d, protínající přímku P v bodě d, v němž se dotýká rovina β plochy šroubové. Průmět přímky N^d můžeme však také pokládati za orthogonálný průmět přímky největšího spádu F roviny tečné β, procházející bodem dotyčným d. Její stopa nalézá se v průsečíku h přímky $F_1 \equiv N_1^d$ se stopou M_1^{β}.

Průměty všech takových přímek největšího spádu $F \ldots$ protínají se v jediném bodě t_1 *), který se nalézá na přímce kolmo v bodě a_1 ku S_1 postavené, tak že $\overline{t_1 a_1} = \overline{m' a_1}$. Proto tvoří přímky $F \ldots$ jednoplochý hyperboloid H, jehož řídícími útvary jsou: přímka S, promítající přímka Z bodu t a kružnice H obsahující stopy h všech přímek $F \ldots$ jakožto jeho stopu **).

Průmět křivky vlastního stínu $\check{S}$ plochy šroubové můžeme tedy pokládati za průmět průsečnice tohoto hyperboloidu H s plochou kuželovou K a na tom základě můžeme sestrojiti její tečnu v bodě d jakožto průmět průsečnice rovin tečných příslušných v tomto bodě oběma plochám.

Tečna v bodě m ke kružnici K sestrojená jest stopou $\overline{mp}$ roviny tečné plochy kuželové. Rovina tečná hyperboloidu v bodu d se dotýkající jest určena přímkou F jedné a přímkou G druhé soustavy ***). Stopami h a h' obou těchto přímek prochází stopa

---

*) Plyne to ze shodnosti trojúhelníků ma_1m' a fa_1t ($f \equiv {}^{\lambda}P'$), jichž strany zůstávají k sobě kolmy.

**) $\overline{m't_1}$ jest průměrem této kružnice, která zároveň prochází bodem $a_1 \equiv A_1$, a přímka A jest také jednou přímkou plochy H.

***) Průmět G_1 se stotožnuje s P_1.

této roviny tečné a jejím průsečíkem p se stopou $\overline{mp}$ a bodem d_1 určena jest tečna křivky $Š_1$ *).

Jelikož však nahoře uvedená konstrukce křivky $Š_1$ úplně souhlasí s mechanickým vytvořením tak zvané *křivky Ponceletovy*, můžeme také použíti geometrie kinematické k sestrojení jejích tečen nebo normál **)

2. K sestrojení kolmé rychlosti $\overline{d_1 v}$ ***) bodu d_1 v tečně křivky $Š_1$ předpokládejme, že přímka P_1 se otáčí rychlostí úhlovou rovnou 1, tak že délka $\overline{ma_1}$ představuje kolmou rychlost otáčení bodu m při otáčení kol bodu a_1. Délka $\overline{d_1 a_1}$ představuje potom kolmou rychlost bodu d_1 jakožto bodu téže se otáčející přímky P_1. Přímka $\overline{fa_1}$, která stále k otáčející se přímce P_1 kolma zůstává, otáčí se touže úhlovou rychlostí a délka $\overline{fa_1}$ jest kolmou rychlostí bodu f. Z kolmé rychlosti tohoto bodu f odvodíme kolmou rychlost $\overline{fi}$ téhož bodu, avšak vzhledem k otáčení přímky $\overline{t_1 f} \equiv F_1$, tímto bodem stále při otáčení kol bodu t_1 procházející tím, že s bodu a_1 spustíme kolmici $\overline{a_1 i}$ ku přímce F_1. Vedeme-li bodem d_1 ku přímce $\overline{fa_1}$ rovnoběžku $\overline{d_1 e_1}$, protínající přímku $\overline{a_1 t_1}$ v bodě e_1, a tímto bodem sestrojíme přímku $\overline{e_1 g_1} \perp F_1$, obdržíme ve přímce této délku $\overline{d_1 g_1}$, udávající nám kolmou rychlost bodu d_1 při otáčení přímky F_1 kol bodu t_1. Přímky $\overline{fa_1}$ a $\overline{g_1 e_1}$ protínají se v bodě v, určujícím s bodem d_1 kolmou rychlost bodu tohoto jakožto normálu Ponceletovy křivky $Š_1$ †).

3. Tento dvojí způsob sestrojení tečny poskytuje nám však pomůcku, abychom sestrojili i poloměr křivosti křivky této, odvodíme-li si ještě kolmou rychlost $\overline{p\lambda}$ stopy p tečny $d_1 p$ ††).

Abychom stanovili tuto kolmou rychlost $\overline{p\lambda}$ bodu p, uvažme, že se bod tento jeví jakožto průsečík tečny $\overline{mp}$ kružnice K a sečny $\overline{hh'}$ kružnice H. Bod p jakožto náležející tečně $\overline{mp}$ pohybuje se při dříve uvažovaném otáčení přímky P kol bodu a_1 kolmou rychlostí $\overline{a_1 p}$.

---

*) Jinou konstrukci této tečny uvádí prof. *Dr. Chr. Wiener*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie II. díl, str. 502.

**) *Dr. L. Burmester*, Lehrbuch der Kinematik, str. 81.

***) Tamtéž str. 23.

†) Tamtéž, str. 59, odst. 32.

††) *Rozpravy České Akademie*, ročník III., třída II. čís. 19.

Týž bod p jakožto náležející přímce $\overline{hh'}$ pohybuje se rychlostí, kterou stanovíme následovně: Bodu h' jakožto bodu přímky $G_1 \equiv P_1$ kol bodu a_1 se otáčející náleží rychlost kolmá $\overline{h'a_1}$. Rychlost kolmou $\overline{hz}$ bodu h stanovíme se zřetelem k tomu, že jest to nejenom průsečík přímky F_1 s kruhovou stopou H plochy hyperboloidu **H**, ale zároveň se stopou M_1^β roviny β, kteráž se kolem bodu m' otáčí.

Za tím účelem veďme $\overline{hy} \,||\, \overline{a_1 m}$ až protne $\overline{a_1 m'}$ v bodě y a tímto bodem spusťme kolmici $\overline{yz}$ ku přímce $\overline{mm'}$, kteráž protíná poloměr $\overline{ho}$ kružnice H v bodě z. S tohoto bodu spustíme kolmici $\overline{zu}$ ku přímce $\overline{hh'}$ protínající přímku $\overline{hy}$ v bodě u. Spojnice $\overline{a_1 u}$ protíná přímku $\overline{pH} \,||\, P_1$ v bodě $\varkappa$, jímž spuštěná kolmice $\overline{\varkappa\pi}$ ku přímce $\overline{hh'}$ omezuje v ní úsečku $\overline{p\pi}$ jakožto kolmou rychlost bodu p při pohybu přímky $\overline{hh'}$. Přímka $\overline{\pi\varkappa} \perp \overline{hh'}$ a přímka $\overline{a_1\lambda} \perp \overline{a_1 p}$ protínají se v bodě λ určujícím s bodem p délku $\overline{p\lambda}$ jakožto kolmou rychlost bodu p při otáčení přímky P_1 *).

Znajíce nyní, jak v předcházejícím článku ukázáno, kolmou rychlost $\overline{d\nu}$ bodu d_1 v tečně $\overline{d_1 p}$ a kolmou rychlost $\overline{p\lambda}$ bodu p, sestrojíme nyní v bodě ν a λ kolmice ku přímkám $\overline{d_1\nu}$ a $\overline{pd_1}$, kteréž se protínají v bodě ξ, určujícím s bodem p přímku protínající přímku $\overline{d_1\nu}$, totožnou s normálou křivky $\check{S}_1$, v hledaném středu křivosti s křivky $\check{S}_1$ **).

4. Pan vládní rada *Václ. Jeřábek* však ukázal ve svém zajímavém článku, uveřejněném v tomto časopisu ***), že můžeme orthogonálný průmět křivky stínu vlastního uzavřené šikmé plochy šroubové pokládati *za průmět orthogonálný křivky proniku dvou ploch kuželových* následovně určených:

Sestrojme kteroukoli kružnici N, která přímku $\overline{a_1 t_1}$ v bodech a_1 a q pravoúhelně protíná, třeba tu, jejíž střed jest v bodě t_1. Bodem q vedená přímka $\overline{qn} \,||\,$ s $\overline{a_1 f}$ prochází průsečíkem n přímky $\overline{a_1 m}$ s kružnicí N a protne přímku $\overline{ft_1}$ v bodě n'. Ježto poměr $\dfrac{\overline{ft_1}}{\overline{n't_1}}$ rovná se *stálému* poměru $\dfrac{\overline{a_1 t_1}}{\overline{qt_1}}$, jest geometrickým

*) *Dr. L. Burmester*, Lehrb. d. Kin., str. 59, odst. 32.

**) *Rozpravy České Akademie*, ročník III., třída II., čís. 19.

***) *»Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky«*, O jistých cirkulárných křivkách stupně čtvrtého s dvojným bodem dotyčným, ročn. XXXVI. (1906—7), na str. 235.

místem bodu n' kružnice N', sestrojená ze středu q poloměrem $\overline{qn'}$.

Mysleme si dále, že bod a na ose A plochy šroubové ležící jest vrcholem kužele, jehož základní křivkou jest kružnice N. Na přímce $\overline{aq}$ ležící bod t, jehož průmětem jest bod t_1, pokládejme za vrchol druhého kužele, jehož základní křivkou jest kružnice N'.

Z nahoře uvedeného určení kružnice N' patrno, že druhý kužel tN' protíná rovina jdoucí vrcholem a prvého a rovnoběžná s průmětnou v kružnici L, jejíž průmět L_1 se s kružnicí K stotožňuje.

Rovina $aqnn'$ protíná plochu kužele aN v přímce $\overline{an}$ a kužele tN' v přímce $\overline{tn'}$. Přímky tyto protínají se v bodě d křivky, v níž se obě plochy kuželové protínají a jejíž orthogonálný průmět se úplně s dříve určeným průmětem $\check{S}_1$ stotožňuje.

Průsečnice rovin tečných v bodu d k oběma kuželům dle přímek $\overline{an}$ a $\overline{tn'}$ sestrojených jest tečnou $\overline{dp'}$ křivky průsečné obou kuželů, a její průmět tečnou průmětu $\check{S}_1$. Z toho patrno, že tečny $\overline{np'}$ a $\overline{n'p'}$ respektive v bodech n a n' ke křivkám N a N' sestrojené jsou stopami zmíněných rovin tečných a jejich průsečík stopou p' tečny $\overline{dp'}$.

5. Tohoto jednoduššího způsobu určení tečny jakožto průsečnice rovin tečných dvou ploch kuželových můžeme užíti také k snadnějšímu sestrojení středu křivosti křivky $\check{S}_1$ než k jakému jsme dospěli ve článku 3.

Bude také zde nutno sestrojiti tečnu $\overline{dp'}$ pomocí geometrie kinematické, tentokráte však použijeme rychlostí *obyčejných* (ne kolmých), odvodivše rychlost, kterou se pohybuje bod d_1 jakožto průsečík přímek $P_1 \equiv \overline{a_1 n}$ a $\overline{t_1 n'}$ otáčejících se kolem bodů a_1 a t_1.

Za tím účelem předpokládejme, že se přímka P_1 otáčí kol bodu a_1 rychlostí $\overline{nq}$. Potom by pohyb bodu d_1 téže přímky byl vyjádřen délkou $\overline{d_1\,{}^1d_1} \perp P_1$ a omezenou spojnicí $\overline{a_1 q}$ (${}^1d_1 \equiv e_1$).

Přímka $\overline{{}^1d_1\,{}^3d_1} \parallel$ s P_1 vyjadřuje nám potom nekonečně malý pohyb přímky P_1. S pohybem bodu n jakožto bodu přímky P_1 souvisí pohyb téhož bodu jakožto jejího průsečíku s kružnicí N v křivce této. Rychlost $\overline{n\,{}^1q}$ tohoto pohybu odvodíme z rychlosti $\overline{nq}$, jest-li přímkou $\overline{q\,{}^1q} \parallel P_1$ vymezíme v tečně $\overline{np'}$ kružnice N délku $\overline{n\,{}^1q}$. Vedeme-li přímku $\overline{{}^1q\,{}^2q} \parallel \overline{nn'}$, obdržíme v délce $\overline{n\,{}^2q}$ na přímce $P_1 \perp \overline{nn'}$ rychlost téhož bodu n, avšak jakožto bodu přímky $\overline{nn'}$, kteráž se dle nahoře uvedené konstrukce kolem bodu q otáčí. Rychlost $\overline{n'\,{}^1n'}$, kteráž při tomto pohybu bodu n' náleží, obdržíme v přímce $\overline{n'\,{}^1n'} \perp \overline{nn'}$ omezené přímkou $\overline{q\,{}^2q}$. Rychlost ta nám udává již rychlost bodu n' jako průsečíku přímky $\overline{nn'}$ s kružnicí N' a přímka $\overline{{}^1n'\,{}^2n'} \parallel$ s $\overline{t_1n'}$ stanoví nám v přímce $\overline{n'\,{}^2n'} \parallel \overline{t_1n'}$ délku $\overline{n'\,{}^2n'}$, udávající nám rychlost bodu n' jakožto bodu přímky $\overline{t_1n'}$ (kol bodu t_1 se otáčející), z níž odvodíme rychlost $\overline{d_1\,{}^2d_1}$, kterou se bod d_1 této přímky pohybuje ($\overline{d_1\,{}^2d_1} \perp \overline{n't_1}$). Přímka $\overline{{}^2d_1\,{}^3d_1} \parallel \overline{t_1n'}$ udává nám nekonečně malý pohyb přímky $\overline{t_1n'}$.

Spojnice $\overline{d_1\,{}^3d_1}$ bodu d_1 s průsečíkem přímek $\overline{{}^1d_1\,{}^3d_1}$ a $\overline{{}^2d_1\,{}^3d_1}$ udává nám rychlost pohybu bodu d_1 jakožto tečnu křivky $\check{S}_1$ a stotožňuje se s prve sestrojenou tečnou $\overline{d_1p'}$ téže křivky.

Zbývá ještě sestrojiti rychlost bodu p' tečny $\overline{d_1p'}$ jakožto průsečíku tečen $\overline{np'}$ a $\overline{n'p'}$ kružnice N respektive N', jichž pohyb s dříve stanoveným pohybem bodů n a n' souvisí. Pošine-li se, — jak bylo právě odvozeno, — bod n v tečně $\overline{np'}$ kružnice N rychlostí $\overline{n\,{}^1q}$, otočí se bod p' tečny této rychlostí $\overline{p'\,{}^1p'}$, kterou kolmice spuštěná s bodu n ku přímce $\overline{{}^1qt_1}$ ve přímce $\overline{p'\,{}^1p'} \perp \overline{np'}$ výmezuje *).

Přímka $\overline{{}^1p'\,{}^3p'} \parallel \overline{np'}$ vyjadřuje potom nekonečně malý pohyb tečny $\overline{np'}$.

Stejně si vyjádříme nekonečně malý pohyb tečny $\overline{n'p'}$. S bodu n' spustíme kolmici ku přímce $\overline{q\,{}^1n'}$, vymezující nám ve přímce $\overline{p'\,{}^2p'} \perp \overline{n'p'}$ délku, vyjadřující rychlost, kterou se pohybuje bod p' při pohybu tečny $\overline{n'p'}$. Přímka $\overline{{}^2p'\,{}^3p'} \parallel \overline{n'p'}$ vyjadřuje nekonečně malý pohyb tečny $\overline{n'p'}$.

Spojnice $\overline{p'\,{}^3p'}$ udává rychlost bodu p' jakožto průsečíku tečen $\overline{np'}$ a $\overline{n'p'}$. Z rychlosti této odvodíme rychlost $\overline{p'\,{}^4p'}$, kterou se bod p' jakožto bod tečny $\overline{d_1p'}$ pohybuje při jejím otáčení kol bodu d_1, omezíme-li $\overline{p'\,{}^4p'} \perp \overline{d_1p'}$ přímkou $\overline{{}^3p'\,{}^4p'} \parallel \overline{d_1p'}$.

---

*) *Rozpravy České Akademie,* ročník III., třída II., čís. 19.

Konečně kolmice spuštěná s bodu dříve stanoveného ${}^3d_1$, omezujícího rychlost bodu d_1 ke spojnici $\overline{d_1{}^4p'}$, protíná normálu sestrojenou v bodu tomto křivky $\check{S}_1$ *v hledaném středu křivosti* s.

Určení ploch šroubových, jichž totální a střední křivost vázány jsou lineární relací.

Fr. Velísek v Praze.

Plocha šroubová budiž dána rovnicemi

$$A)\qquad x = \varrho \cos v,\ y = \varrho \sin v,\ z = mv + \varphi(\varrho),$$

z čehož plynou pro hlavní poloměry křivosti R_1, R_2 tyto relace:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\varphi'[\varrho^2(1+\varphi'^2) + 2m^2] + \varrho\varphi''(\varrho^2 + m^2)}{[m^2 + \varrho^2(1+\varphi'^2)]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\varrho^3\varphi'\varphi'' - m^2}{[m^2 + \varrho^2(1+\varphi'^2)]^2}.$$

Oba poloměry jsou funkce jeden druhého. Abychom to vyjádřili, můžeme říci, že existuje relace jistá mezi jich součtem a součinem, či mezi střední a totální křivostí. Určíme všechny plochy šroubové, kdy poslední relace jest lineární. Plochy parallelní k ploše šroubové jsou opět plochy šroubové, možno tedy odvoditi plochy šroubové, jichž totální a střední křivost jsou vázány lineární relací, z ploch šroubových o konstantní křivosti totální. (Ossian Bonnet, Nouvelles Annales de Mathématiques 1853, p. 433).

Budiž dána relace

$$\frac{M}{R_1 R_2} + N\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + P = 0, \tag{1}$$

kde M, N, P jsou dané konstanty. Bude tudíž $\varphi(\varrho)$, určující tvořící profil plochy šroubové, určeno differenciální rovnicí:

$$M\frac{\varrho^3\varphi'\varphi'' - m^2}{[m^2 + (1+\varphi'^2)\varrho^2]^2}$$

$$+ N\frac{\varphi'[\varrho^2(1+\varphi'^2) + 2m^2] + \varrho\varphi''(\varrho^2 + m^2)}{[m^2 + \varrho^2(1+\varphi'^2)]^{3/2}} + P = 0.$$