Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Charles Hermite

Remarque sur la définition du logarithme des quantités imaginaires

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 4, 225--228

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123350`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1893

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Remarque sur la définition du logarithme des quantités imaginaires.

Extrait de deux lettres de M. **Ch. Hermite** à M. **Ed. Weyr.**

. . . .

Il s'agit de la définition du logarithme des quantités imaginaires, qu'on fait résulter de l'équation suivante:

$$\log(a+ib)=\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)+i(\varphi+2k\pi)$$

où l'angle φ est déterminé par les égalités:

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

de sorte qu'on obtient une infinité de valeurs. On arrive au contraire à une détermination unique, si l'on part de l'intégrale:

$$\log(1+x)=\int_0^x\frac{dz}{1+z}$$

en faisant décrire une ligne droite à la variable, depuis l'origine jusqu'au point dont l'affixe est x. Soit en effet $z=tx$ ce qui donne:

$$\log(1+x)=\int_0^1\frac{xdt}{1+xt}=\int_0^1\frac{dt}{\frac{1}{x}+t};$$

on aura si l'on pose:

$$x=a+ib,$$

puis afin d'abréger,

$$\frac{1}{x}=\alpha+i\beta,$$

l'expression suivante:

$$\log(1+a+ib) = \int_0^1 \frac{dt}{\alpha+i\beta+t}$$
$$= \int_0^1 \frac{(\alpha-i\beta+t)dt}{(\alpha+t)^2+\beta^2}$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{(1+\alpha)^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} - i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\alpha}{\beta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta}\right],$$

où les arcs tangente, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ont une seule et unique détermination. On en conclut par un calcul facile:

$$\log(1+a+ib) = \frac{1}{2}\log[(1+a)^2+b^2]$$
$$+ i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2+b^2+a}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}\right],$$

et en changeant a en $a-1$,

$$\log(a+ib) = \frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + i\varphi,$$

si l'on fait pour abréger:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a^2+b^2-a}{b} - \operatorname{arctg}\frac{a-1}{b}.$$

Cela étant, considérons a et b comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point rapporté à des axes rectangulaires, je dis que la partie negative de l'axe des abscisses est pour cette quantité, une ligne de discontinuité.

Supposons en effet b infiniment petit et positif, on aura sensiblement, a étant négatif:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi;$$

il vient au contraire pour b infiniment petit et négatif, $\varphi = -\pi$, de sorte qu'en deux points infiniment voisins en regard au dessus et au dessous de l'axe, dans sa portion négative, la différence des valeurs de φ est 2π. La notion de coupure apparaît donc naturellement et d'elle même, à l'égard du logarithme lorsqu'il est devenu, par sa nouvelle définition, une expression à sens unique.

. . . .

A ce que je vous ai écrit j'ajouterai que la formule bien connue:

$$\log\frac{z+1}{z-1}=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{z-x}$$

donne l'expression que j'ai obtenue par la voie de l'intégration. Qu'on fasse en effet $z=\alpha+i\beta$, il vient:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\alpha+i\beta-x}=\int_{-1}^{+1}\frac{(\alpha-x)dx}{(\alpha-x)^2+\beta^2}-i\int_{-1}^{+1}\frac{\beta dx}{(\alpha-x)^2+\beta^2}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{(\alpha+1)^2+\beta^2}{(\alpha-1)^2+\beta^2}-i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\alpha}{\beta}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\alpha}{\beta}\right].$$

Posons ensuite,

$$\frac{\alpha+i\beta+1}{\alpha+i\beta-1}=a+ib,$$

nous aurons immédiatement

$$\frac{(\alpha+1)^2+\beta^2}{(\alpha-1)^2+\beta^2}=a^2+b^2,$$

et de l'égalité

$$\frac{a+ib+1}{a+ib-1}=\alpha+i\beta$$

on conclura:

$$\alpha=\frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2},$$
$$\beta=-\frac{2b}{(a-1)^2+b^2}.$$

Ces expressions donnant:

$$\frac{1-\alpha}{\beta}=\frac{a-1}{b},$$

$$\frac{1+\alpha}{\beta}=-\frac{a^2-a+b^2}{b},$$

nous nous trouvons ramené à la formule

$$\log(a+ib)$$
$$=\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)+i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2-a+b^2}{b}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a-1}{b}\right].$$

Je remarquerai encore q'en faisant:

$$x=\frac{a^2-a+b^2}{b},\quad y=\frac{a-1}{b},$$

on a:

$$\frac{x-y}{1+xy}=\frac{b}{a},$$

de sorte que le coefficient de i est bien l'un des arcs ayant pour tangente $\frac{b}{a}$; on voit facilement qu'en supposant a positif, ce sera l'arc minimum compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Methodický příspěvek ku počtu integrálnímu.

Podal

prof. dr. **F. J. Studnička.**

Jednoduchý jest zajisté integrační úkol, určiti hodnotu

$$\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx,$$

kdež $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou algebraické funkce racionální a celistvé; přijdeť se všeobecně na typické integrály

$$\int\chi(x)\,dx,\ \int\frac{dx}{a+bx},\ \int\frac{dx}{(a+bx)^n},$$
$$\int\frac{dx(\mathrm{A}+\mathrm{B}x)}{a+2bx+cx^2},\ \int\frac{dx(\mathrm{A}+\mathrm{B}x)}{(a+2bx+cx^2)^n},$$