Antonín Sýkora
O rovnicích úkonových

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 2, 181--198

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123291`

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O rovnicích úkonových.

Napsal

Ant. Sýkora,
professor v Rakovníku.

Různé funkce mají různé vlastnosti. Na příklad funkci $f(x) = \log x$ přísluší vlastnosti

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$
$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y),$$
$$f(x^n) = nf(x);$$

funkci $\chi(x) = a^x$ vlastnosti

$$\chi(x+y) = \chi(x)\,\chi(y),$$
$$\chi(x-y) = \frac{\chi(x)}{\chi(y)},$$
$$\chi(nx) = [\chi(x)]^n.$$

Cyklické (goniometrické) funkce

$$\varphi(x) = \sin x, \qquad \psi(x) = \cos x$$

mají vlastnosti

$$[\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2 = 1,$$
$$\varphi(x \pm y) = \varphi(x)\,\psi(y) \pm \psi(x)\,\varphi(y),$$
$$\psi(x \pm y) = \psi(x)\,\psi(y) \mp \varphi(x)\,\varphi(y),$$

a t. d. a funkce

$$\Phi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \Psi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

zvané „*hyperbolický sinus*" a „*hyperbolický cosinus*", jež znamenávají se $\Phi(x) = \sin \mathrm{h} x$, $\Psi(x) = \cos \mathrm{h} x$, *) vlastnosti

$$[\Psi(x)]^2 - [\Phi(x)]^2 = 1,$$
$$\Phi(x+y) = \Phi(x)\,\Psi(y) + \Psi(x)\,\Phi(y),$$
$$\Psi(x+y) = \Psi(x)\,\Psi(y) + \Phi(x)\,\Phi(y),$$

jež z výměrů jejich vyplývají, klademe-li do výrazů

$$\Phi(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \frac{1}{2}(e^x e^y - e^{-x} e^{-y}),$$

$$\Psi(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y}) = \frac{1}{2}(e^x e^y + e^{-x} e^{-y})$$

za

$$e^x = \Psi(x) + \Phi(x), \qquad e^y = \Psi(y) + \Phi(y)$$

a za

$$e^{-x} = \Psi(x) - \Phi(x), \qquad e^{-y} = \Psi(y) - \Phi(y).$$

Jsou-li funkce známy, jsou i jejich vlastnosti buď již známy, anebo lze je z výrazu funkce odvoditi.

Naopak stává se často, že známe některou charakteristickou vlastnost funkce, a jde pak o to, abychom našli tvar její. Lze se na př. ptáti, která funkce má vlastnost vyjádřenou rovnicí

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

nebo rovnicí

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

a podobně. — Takovou rovnici, vyjadřující některou charakteristickou vlastnost funkce, nazýváme *rovnicí úkonovou* neboli *funkcionální*; a řešiti ji značí najíti funkci o požadované vlastnosti čili funkci, jež dané rovnici vyhovuje.

---

*) „Funkce hyperbolické" objevil *Riccati* a zavedl je do mathematiky spisem „Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentia". (Bononiae 1757.)

Znamenajíce tyto funkce, jak uvedeno, můžeme vytčené jich vlastnosti psáti takto:

$$\cos \mathrm{h}^2 x - \sin \mathrm{h}^2 x = 1,$$
$$\sin \mathrm{h}(x+y) = \sin \mathrm{h}x \cos \mathrm{h}y + \cos \mathrm{h}x \sin \mathrm{h}y,$$
$$\cos \mathrm{h}(x+y) = \cos \mathrm{h}x \cos \mathrm{h}y + \sin \mathrm{h}x \sin \mathrm{h}y.$$

Obyčejně lze z takové úkonové rovnice odvoditi rovnici differenciálnou, jejíž integrací se hledané funkce dopídíme. Ale mnohé úkonové rovnice lze řešiti zcela elementárně, jakož v následujícím několika příklady ukážeme. Při tom omezíme se na reálné funkce reálného argumentu.

Příklad 1.

Jest vyšetřiti tvar funkce $\varphi(x)$ vyhovující úkonové rovnici

$$\text{(I)*)} \qquad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Rozřešení. Klademe-li v rovnici této $y+z$ místo y, nabudeme

$$\varphi(x+y+z) = \varphi(x)\,\varphi(y+z)$$

a dle téže rovnice (I)

$$\varphi(y+z) = \varphi(y)\,\varphi(z),$$

tedy

$$\varphi(x+y+z) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z).$$

Pokračujíce jak naznačeno dále, shledáme, že jest obecně

$$\varphi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n),$$

a je-li

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x,$$

$$\text{(A)} \qquad \varphi(nx) = n\varphi(x).$$

Tato rovnice byla dosud odvozena pro positivné celistvé hodnoty n; neboť číslo n, jež udává, kolik členů součet $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ má, jest positivné číslo celistvé; lze však dokázati, že platí i při jakémkoli reálném n.

Jelikož x může míti hodnotu jakoukoli, pišme místo něho $\frac{m}{n} x$, kdež m, n značí positivná čísla celistvá, a vzniklou tím rovnici

$$\varphi(mx) = n\varphi\left(\frac{m}{n} x\right)$$

---

*) Rovnice (I), (VIII), (IX) a (X) řešil po prvé *Cauchy*. (Cours d'analyse d'école royale polytechnique.)

čili

$$m\varphi(x) = n\varphi\left(\frac{m}{n}x\right)$$

obraťme; tím nabudeme, dělíce ještě obě strany n,

$$\varphi\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}\varphi(x),$$

z čehož patrno, že rovnice (A) platí i při lomeném n. A poněvadž irracionálné číslo p lze vyjádřiti zlomkem $\frac{m}{n}$ jakkoli zevrubně, platí rovnice (A) o jakémkoli positivném n.

Že tato rovnice platí i při $n = 0$, vyplývá ze základní rovnice (I), klademe-li v ní $y = 0$; tím nabudeme $\varphi(0) = 0$ čili $\varphi(0 . x) = 0 . \varphi(x)$.

Konečně, kladouce v (I) px místo x, a $-px$ místo y, a hledíce k tomu, že $\varphi(0) = 0$, máme

$$\varphi(-px) = -\varphi(px) = -p . \varphi(x).$$

Rovnice (A) platí tedy, ať má n jakoukoli reálnou hodnotu y;

$$\varphi(xy) = y\varphi(x)$$

anebo

$$\varphi(xy) = x\varphi(y).$$

Při $y = 1$ přejde tato rovnice ve

$$\varphi(x) = x\varphi(1)$$

čili, znamenáme-li stálou hodnotu $\varphi(1)$ písmenem a, ve

$$\varphi(x) = ax,$$

čímž nalezena funkce, vyhovující rovnici (I).

Příklad 2.

Najdi funkci vyhovující úkonové rovnici

(II) $$\varphi(x + y) = \varphi(x - y) + 2\varphi(y).$$

Rozřešení. Při $y = 0$ podává tato rovnice

$$\varphi(0) = 0;$$

a při $y = x$,

$$\varphi(2x) = 2\varphi(x).$$

Klademe-li dále za x po řadě $2x$, $3x$, ... a za y vždy x, nabudeme

$$\varphi(3x) = 3\varphi(x),$$
$$\varphi(4x) = 4\varphi(x),$$
$$\cdots\cdots$$

z čehož soudíme, že obecně

$$\text{(A)} \qquad \varphi(nx) = n\varphi(x).$$

Že tomu vskutku tak, přesvědčíme se, dáme-li za x do rovnice (II) nx, a $y = x$; tu bude

$$\varphi(\overline{n+1}\,.\,x) = \varphi(\overline{n-1}\,.\,x) + 2\varphi(x),$$

a předpokládáme-li, že rovnice (A) má platnost pro všechny hodnoty n od 1 až do určité hodnoty n, tedy že též

$$\varphi(\overline{n-1}\,.\,x) = (n-1)\,\varphi(x),$$

nabudeme

$$\varphi(\overline{n+1}\,.\,x) = (n+1)\,\varphi(x);$$

t. j. platí-li rovnice (A) pro kteroukoli hodnotu n, platí i pro následující; ježto však platí pro $n = 4$, platí i pro $n = 5$, dále pro $n = 6$, 7, ... a vůbec pro všechny hodnoty n.

Klademe-li do rovnice (A) místo x hodnotu $\frac{m}{n}\,x$, bude

$$\varphi(mx) = n\varphi\left(\frac{m}{n}\,x\right)$$

čili

$$m\varphi(x) = n\varphi\left(\frac{m}{n}\,x\right)$$

a naopak

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\,x\right) = \frac{m}{n}\,\varphi(x),$$

z čehož patrno, že rovnice (A) platí i při lomeném n, jakož i při jakémkoli irracionálném n, poněvadž platí při hodnotách lomených, jež blíží se libovolně irracionálnému číslu — předpokládáme-li arci, že hledaná funkce jest spojitá.

Kladouce do rovnice (II) $x = 0$, $y = nx$, dostaneme

$$\varphi(-nx) = -\varphi(nx)$$

čili

$$\varphi(-nx) = -n\varphi(x);$$

platí tedy rovnice (A), nechť má n jakoukoli reálnou hodnotu; pročež vyplývá pro funkci $\varphi(x)$ jako v příkladě 1. tvar

$$\varphi(x) = ax.$$

Příklad 3.

Abychom rozřešili rovnici

$$\text{(III)} \qquad \varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x),$$

položme nejprvé $y = x$; tím nabudeme

$$\varphi(2x) + \varphi(0) = 2\varphi(x),$$

anebo, znamenajíce stálou hodnotu $\varphi(0)$ písmenem A,

$$\varphi(2x) = 2\varphi(x) - A.$$

Kladouce dále $2x$ místo x a x místo y, dostaneme

$$\varphi(3x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = 3\varphi(x) - 2A.$$

Podobně jest

$$\varphi(4x) = 4\varphi(x) - 3A,$$

a t. d. a obecně pro jakékoli positivné celistvé n

$$\text{(A)} \qquad \varphi(nx) = n\varphi(x) - (n-1)A,$$

o čemž se přesvědčiti lze jako v příkladě předešlém. Že rovnice tato platí i při lomených hodnotách n, přesvědčíme se, kladouce do ní $\frac{m}{n}x$ místo x; tím nabudeme

$$\varphi(mx) = n\varphi\left(\frac{m}{n}x\right) - (n-1)A,$$

a poněvadž

$$\varphi(mx) = m\varphi(x) - (m-1)A,$$

$$m\varphi(x) - mA = n\varphi\left(\frac{m}{n}x\right) - nA,$$

a odtud

$$\varphi\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}\varphi(x) - \left(\frac{m}{n} - 1\right)A,$$

čímž tvrzení naše dokázáno. A poněvadž se irracionálnému číslu p řadou zlomků $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, ... jakkoli přiblížiti lze, platí vzorec (A) i o číslech irracionálných. Konečně vyplývá z rovnice (III), klademe-li v ní $x = 0$,

$$\varphi(-y) = 2A - \varphi(y)$$

čili při $y = nx$

$$\varphi(-nx) = 2A - \varphi(nx),$$

anebo, zavedeme-li za $\varphi(nx)$ jeho hodnotu,

$$\varphi(-nx) = -n \,.\, \varphi(x) - (-n-1)A.$$

Vzorec (A) platí tedy při jakékoli reálné hodnotě n; zavedeme-li v něm y místo n a zaměnivše pak x a y, můžeme jej psáti v podobě

$$\varphi(xy) - A = x\varphi(y) - Ax$$

čili

$$\frac{\varphi(xy) - A}{x} = \varphi(y) - A,$$

z čehož při $y = 1$ plyne

$$\frac{\varphi(x) - A}{x} = \varphi(1) - A,$$

a poznamenáme-li stálou hodnotu $\varphi(1) - A$ písmenem B, máme

$$\frac{\varphi(x) - A}{x} = B$$

anebo

$$\varphi(x) = A + Bx.$$

Tato jest podoba funkce definované rovnicí (III).

Příklad 4.

Funkci $\varphi(x)$ vyhovující rovnici

$$\text{(IV)} \qquad \varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2[\varphi(x) + \varphi(y)]$$

najdeme takto:

Položíce nejprvé $y = 0$, shledáme, že

$$\varphi(0) = 0.$$

Při $y = x$ jest

$$\varphi(2x) = 4\varphi(x).$$

Kladouce pak po řadě $2x$, $3x$, ... místo x, a $y = x$, nabudeme

$$\varphi(3x) = 9\varphi(x),$$
$$\varphi(4x) = 16\varphi(x),$$
$$\dots\dots\dots$$

a obecně

$$\varphi(nx) = n^2\varphi(x),$$

o čemž se lze přesvědčiti podobně jako v příkladech předešlých; právě tak shledáme, že rovnice tato platí i při lomeném a iracionálném n.

Při $x = 0$ podává rovnice (IV)

$$\varphi(-y) = \varphi(y),$$

a je-li $y = nx$,

$$\varphi(-nx) = \varphi(nx) = n^2\varphi(x)$$

čili

$$\varphi(-nx) = (-n)^2\varphi(x)$$

a tedy při každém reálném y

$$\varphi(xy) = y^2\varphi(x)$$

aneb též

$$\varphi(xy) = x^2\varphi(y).$$

Je-li $y = 1$, plyne z poslední rovnice

$$\varphi(x) = x^2\varphi(1)$$

čili

$$\varphi(x) = Ax^2,$$

označíme-li stálou hodnotu $\varphi(1)$ písmenem A; tato jest tedy funkce vyhovující dané rovnici (IV).

Příklad 5.

Rovnice

$$\text{(V)} \qquad \varphi(x+y) - \varphi(x-y) = 4\sqrt{\varphi(x)\,\varphi(y)}$$

podává týž výsledek, jako předešlá.

Při $y = 0$ vyplývá z ní, že $\varphi(0) = 0$.

Klademe-li dále x, $2x$, $3x$, ... místo x a místo y vždy x, nabudeme po řadě

$$\varphi(2x) = 4\varphi(x),$$
$$\varphi(3x) = 9\varphi(x),$$
$$\cdots\cdots$$

a obecně

$$\varphi(nx) = n^2\varphi(x).$$

Podobně jako v příkladech předcházejících dokážeme, že rovnice tato platí při jakýchkoli reálných hodnotách n, a jest tedy

$$\varphi(xy) = y^2\varphi(x),$$

anebo též

$$\varphi(xy) = x^2\varphi(y).$$

Je-li $y = 1$, jest

$$\varphi(x) = Ax^2,$$

kdež zase A za stálou hodnotu $\varphi(1)$ jest položeno.

Příklad 6.

Rovnice

$$\text{(VI)} \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$$

dává

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) + \varphi(z)$$

čili

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

a pokračujíce takto dále, dostaneme obecně

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n) = \varphi(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}),$$

a je-li

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x, \qquad n\varphi(x) = \varphi(x\sqrt{n})$$

anebo, kladouce n^2 místo n,

$$\varphi(nx) = n^2\varphi(x).$$

O rovnici této lze dokázati jako v příkladech předešlých, že platí při jakýchkoli reálných hodnotách n, pročež máme zase

$$\varphi(x) = Ax^2.$$

Příklad 7.

Právě tak dostaneme pro obecnější rovnici

$$\text{(VII)} \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(\sqrt[r]{x^r + y^r}),$$

$$n\varphi(x) = \varphi(x\sqrt[r]{n})$$

čili

$$\varphi(nx) = n^r\varphi(x),$$

a pro jakékoliv reálné hodnoty y

$$\varphi(xy) = y^r\varphi(x) = x^r\varphi(y),$$

pročež

$$\varphi(x) = Ax^r.$$

Příklad 8.

Najíti jest funkci $\varphi(x)$ vyhovující rovnici

$$\text{(VIII)} \qquad \varphi(x + y) = \varphi(x)\,\varphi(y).$$

Rozřešení. Kladouce $y + z$ místo y, dostaneme

$$\varphi(x + y + z) = \varphi(x)\,\varphi(y + z),$$

ale dle téže rovnice

$$\varphi(y + z) = \varphi(y)\,\varphi(z),$$

pročež

$$\varphi(x + y + z) = \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z).$$

Podobně dále postupujíce nabudeme obecně

$$\varphi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n),$$

a je-li

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x,$$

$$\text{(A)} \qquad \varphi(nx) = [\varphi(x)]^n.$$

Lze dokázati, že rovnice tato, jež byla dosud odvozena jen pro positivné celistvé hodnoty n, platí při jakémkoli reálném n. Píšíce totiž nejprvé $\frac{m}{n}x$ místo x, kdež m, n značí celistvá positivná čísla, máme

$$\varphi(mx) = \left[\varphi\left(\frac{m}{n}x\right)\right]^n$$

a naopak

$$\varphi\left(\frac{m}{n}x\right) = [\varphi(mx)]^{\frac{1}{n}} = [\varphi(x)]^{\frac{m}{n}},$$

ježto

$$\varphi(mx) = [\varphi(x)]^m.$$

A poněvadž irracionálné číslo lze vyjádřiti jakkoli přesně zlomkem racionálným, platí rovnice

$$\varphi(px) = [\varphi(x)]^p$$

při jakékoliv positivné hodnotě p.

Kladouce do rovnice (VIII) $y = 0$, nabudeme

$$\varphi(0) = 1,$$

a při $y = -x$

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)} = [\varphi(x)]^{-1}$$

čili, nahradíce x hodnotou nx,

$$\varphi(-nx) = [\varphi(nx)]^{-1} = [\varphi(x)]^{-n},$$

pročež pro všechny reálné hodnoty y

$$\varphi(xy) = [\varphi(x)]^y$$

aneb též

$$\varphi(xy) = [\varphi(y)]^x.$$

Posléze pak při $y = 1$, znamenajíce zároveň stálou hodnotu $\varphi(1)$ písmenem a, máme

$$\varphi(x) = a^x.$$

Příklad 9.

Z úkonové rovnice

$$\text{(IX)} \qquad \varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

odvodíme

$$\varphi(xyz) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)$$

a obecně

$$\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n);$$

tato rovnice dá při

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$$

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x^n) = n\varphi(x).$$

Klademe-li zde $x = y^{\frac{m}{n}}$, bude

$$\varphi(y^m) = n\varphi(y^{\frac{m}{n}})$$

aneb, ježto dle (A)

$$\varphi(y^m) = m\varphi(y),$$

$$m\varphi(y) = n\varphi(y^{\frac{m}{n}}),$$

z kteréžto rovnice vyplývá

$$\varphi(y^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}\varphi(y).$$

Rovnice (A) platí tedy při jakýchkoli positivních hodnotách n; že platí i při $n = 0$ a při negativních hodnotách n, přesvědčíme se takto. Nejprvé podává rovnice (IX) při $y = 1$

$$\varphi(1) = 0,$$

což shoduje se s rovnicí (A), je-li $n = 0$, a při $y = \frac{1}{x}$ vyplývá z rovnice (IX)

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\varphi(x)$$

aneb, nahradíme-li x hodnotou y^n,

$$\varphi\left(\frac{1}{y^n}\right) = -\varphi(y^n),$$

t. j.

$$\varphi(y^{-n}) = -n \,.\, \varphi(y).$$

Jest tedy při jakýchkoli reálných hodnotách n

$$\varphi(y^n) = n\varphi(y).$$

Píšeme-li nyní a místo y, považujíce tuto veličinu za stálou, a položíme $y^n = a^n = x$, nabudeme pro n hodnoty

$$n = \frac{\log x}{\log a},$$

kdež logarithmy mohou býti vzaty z jakékoli soustavy, a naše rovnice přejde ve

$$\varphi(x) = \frac{\log x}{\log a} \,.\, \varphi(a).$$

Označíme-li posléze stálou hodnotu $\frac{\varphi(a)}{\log a}$ písmenem A, bude

$$\varphi(x) = \mathrm{A} \log x.$$

Příklad 10.

Rovnice

(X) $$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

vede přímo k rovnici

$$\varphi(xyz) = \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z)$$

a dále k rovnici

$$\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2) \ldots \varphi(x_n),$$

jež při

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$$

přechází ve

(A) $$\varphi(x^n) = [\varphi(x)]^n.$$

Že rovnice tato platí i při lomeném n, vysvitne, klademe-li zde $x^{\frac{m}{n}}$ místo x, při čemž jako vždy m a n positivná celistvá čísla znamenají; tu nabudeme

$$\varphi(x^m) = [\varphi(x^{\frac{m}{n}})]^n$$

čili

$$[\varphi(x)]^m = [\varphi(x^{\frac{m}{n}})]^n$$

a odtud

$$\varphi(x^{\frac{m}{n}}) = [\varphi(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

Abychom ukázali, že rovnice (A) platí i tehdy, je-li $n = 0$ nebo negativné, vložme do rovnice (X) za y nejprvé 1; tím dostaneme

$$\varphi(1) = 1$$

$$\varphi(x^0) = [\varphi(x)]^0;$$

po druhé položme $y = \frac{1}{x}$, čímž nabudeme

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varphi(x)};$$

a kladouce tu x^n místo x,

$$\varphi\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{1}{\varphi(x^n)} = \frac{1}{[\varphi(x)]^n},$$

t. j.

$$\varphi(x^{-n}) = [\varphi(x)]^{-n}.$$

Rovnice (A) platí tedy pro jakékoli reálné hodnoty n. Píšíce v ní a místo x a kladouce pak $a^n = x$, $\varphi(a) = b$, máme $n = \frac{\log x}{\log a}$, pročež

$$\varphi(x) = b^{\frac{\log x}{\log a}}.$$

Jsou-li logarithmy vzaty v soustavě o základu b, jest $b^{\log x} = x$, a poznamenáme-li stálou veličinu $\frac{1}{\log a}$ písmenem m, nabudeme konečně

$$\varphi(x) = x^m$$

jakožto funkci vyhovující dané rovnici.

Poznámka. Některé z těchto úloh lze řešiti též tím, že převedeme je na jiné (předcházející).

Úlohu 10. lze na př. převésti na 9.; logarithmujíce totiž rovnici (X) nabudeme

$$\log \varphi(xy) = \log \varphi(x) + \log \varphi(y).$$

Funkce $\log \varphi(x) = \psi(x)$ vyhovuje tedy rovnici

$$\text{(IX)} \qquad \psi(xy) = \psi(x) + \psi(y),$$

jejíž rozřešení jest dle úlohy 9.

$$\psi(x) = \mathrm{A} \log x,$$

t. j.

$$\log \varphi(x) = \mathrm{A} \log x$$

čili

$$\varphi(x) = x^A,$$

totiž libovolná mocnina x.

Právě tak lze rovnici (VIII) převésti na (I). Logarithmujíce ji získáme

$$\log \varphi(x + y) = \log \varphi(x) + \log \varphi(y);$$

funkce $\log \varphi(x) = f(x)$, vyhovuje rovnici (I)

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

jejíž rozřešení jest

$$f(x) = ax, \quad \text{t. j.} \quad \log \varphi(x) = ax$$

anebo

$$\varphi(x) = b^{ax} = (b^a)^x = \mathrm{A}^x,$$

značí-li b základ logarithmů zde užitých, a klademe-li $b^a = \mathrm{A}$.

Rovnice

$$\text{(IX)} \qquad \varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

dává při $x = b^{\log x}$, $y = b^{\log y}$

$$\varphi(b^{\log x + \log y}) = \varphi(b^{\log x}) + \varphi(b^{\log y})$$

čili, znamenáme-li $\log x = \xi$, $\log y = \eta$,

$$\varphi(b^{\xi+\eta}) = \varphi(b^{\xi}) + (b^{\eta})$$

anebo

(I) $$f(\xi + \eta) = f(\xi) + f(\eta),$$

je-li

$$\varphi(b^{\xi}) = f(\xi).$$

Ale rovnice tato řešena podává

$$f(\xi) = a\xi \quad \text{čili} \quad \varphi(b^{\xi}) = a\xi$$

aneb

$$\varphi(b^{\log x}) = \varphi(x) = a \log x.$$

Z toho patrno, že řešení rovnic (VIII), (IX) a (X) lze vyvésti z řešení rovnice (I).

Ukážeme nyní k čemu a jak lze rovnic takových užíti.

Příklad.

Řada exponenciálná.

Stanovme součet nekonečné řady

$$1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

konvergující při všech hodnotách x v mezích $(-\infty \div +\infty)$.

Znamenáme-li součet této řady $\varphi(x)$, bude

$$\varphi(y) = 1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots,$$

a znásobíce obě tyto řady vespolek, dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi(x)\varphi(y) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \cdots \\ + y + xy + \frac{x^2y}{2!} + \frac{x^3y}{3!} + \cdots \\ + \frac{y^2}{2!} + \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^2y^2}{2!2!} + \cdots \\ + \frac{y^3}{3!} + \frac{xy^3}{3!} + \cdots \\ + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

kdež pro krátkost $1.2.3\ldots n = n!$ položeno.

Snadno se nyní přesvědčíme, že součet členů druhého sloupce na pravé straně této rovnice jest $(x+y)$; součet členů třetího sloupce $= \frac{(x+y)^2}{2!}$; součet členů čtvrtého sloupce $= \frac{(x+y)^3}{3!}$, a t. d. a obecně součet $(n+1)$ního sloupce $= \frac{(x+y)^n}{n!}$, tak že tedy

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^4}{4!} + \cdots$$

anebo, jelikož řada na pravé straně této rovnice rovná se $\varphi(x+y)$,

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Funkce $\varphi(x)$ značící součet předložené řady, vyhovuje tedy úkonové rovnici (VIII) předešlého odstavce. Tam jsme shledali, že její obecné rozřešení jest

$$\varphi(x) = a^x,$$

i jde jen ještě o to, abychom určili hodnotu a, jež v dané řadě se nevyskytuje. Za tím účelem položme v rovnici

$$a^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$x = 1$, čímž nabudeme

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots.$$

Proměníme-li zlomky této řady v desetinné — při čemž, jak patrno, každý následující z předchozího snadno odvoditi lze — a sečteme, nabudeme irracionálného čísla

$$2{\cdot}718281828459\ldots.$$

Číslo toto béře se za základ t. zv. přirozených logarithmů a znamenává se písmenem e;*) zavedouce je do hořejší rovnice

*) Znamenání toto pochází od *Eulera* (1737); týž dokázal také po prvé, že číslo to jest irracionálné; *Hermite* pak dokázal, že i všecky moc-

místo a, dostaneme konečně za součet předložené řady nekonečné

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=e^x.$$

Funkce e^x slove *exponenciálnou* a předložená řada, jež se jí rovná, *řadou exponenciálnou*. — Rozvoj funkce e^x v řadu objevil *Newton*.

Podobným způsobem ukázal *Abel*, že binomická řada

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots$$

udává hodnotu mocniny $(1+x)^n$ ve všech případech, pokud konverguje.

O vývoji čísel, číslovek, číslic.

Uvažuje

František Fabinger,
professor na Smíchově.

(Pokračování.)

Když však v době pozdější lidé potřebovali čísel větších a k naznačení jich byli by museli užiti většího počtu čárek, čímž číslo napsané ztrácelo na přehlednosti, činili přestávky v označování čísel číslicemi právě tak jak u vyslovování čísel číslovkami. A právě zvyk počítati na prstech svedl mimovolně „písaře“ ku vytvoření zvláštních znaků pro 4, 5, 6, 10. Čítaje na prsty do 4, (palec nečítal) označil číslo to přetržením čárky, znaku pro jednu jednotku, čímž charakterisoval počet čtyr jednotek oproti jedné; při tom zajisté neměl na mysli obraz ruky. Jiný počtář užil při počítání všech pěti prstů, tedy i palce a za toto číslo užil zvláštního znaku, jako jest v číslicích demo-

---

niny jeho jsou irracionálné, ba že i každá celistvá funkce jeho

$$A_0 e^m + A_1 e^{m-1} + \ldots + A_m,$$

kdež A_0, A_1, ..., A_m racionálná čísla znamenají, jest irracionálná; čísla taková slovou *transcendentní*.