Ladislav Seifert

O úhlu dvou rovin v prostoru čtyřrozměrném

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 138--148

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123265

a_B, b, c_B,... těchto stop s ellipsou B promítneme s bodu k_B, diametrálného k bodu b této ellipsy, na tečnu T_b do bodů $*a, *b, *c, \ldots$ Spojnice těchto bodů s homologickými body $a, b, c, \ldots$ projektivné řady P se protínají, jsouce rovnoběžny v bodě ν_∞, který s bodem b určuje hlavní tečnu G_b, totožnou s onou prvou konstrukcí docílenou.

3. Z konstrukce obou hlavních tečen G_a a G_b je zřejmo, že průmět $G^b{}_2$ je rovnoběžný s průmětem $G^a{}_2$ a tudíž lze nárysně promítající rovinu některé z těchto přímek pokládati za řídící rovinu přímek jedné soustavy oskulačního hyperbolického paraboloidu. Ježto rovina $\varrho \perp X$ jest řídící rovinou přímek druhé soustavy této plochy, jest průsečík přímek $G^a{}_1$, a $G^b{}_1$ průmětem půdorysným jedné z těchto přímek $H \perp \pi$. Vzhledem k tomu budou půdorysné průměty všech hlavních tečen sestrojených v bodech vrcholové přímky P-cylindroidu procházeti bodem H_1 ($\overline{a_1 H_1} = b_1 a'_1$) a nárysné průměty jejich budou rovnoběžny s nárysným průmětem $G^a{}_2$ svírajíce s $X_{1 \cdot 2}$ úhel 45°.

*

Le paraboloïde hyperbolique osculateur du cylindroïde de Frézier.

(Extrait de l'article précédent.)

Du problème qui demande de construire l'hyperboloïde osculateur d'une surface gauche, des géomètres éminents se sont occupés: Éd. Weyr, J Šolín, J. Sobotka,*) A Mannheim et K. Rohn, qui ont résolu ce problème à fond. La construction donnée dans cet article, et appliquée au cylindroïde de Frézier, repose sur les principes de la géométrie cinématique (exposés au VI tome de l'oeuvre de l'auteur: „Vybrané stati z deskriptivní geometrie“ p. 224) et résout le problème d'une manière simple, qui s'accorde, d'ailleurs, au point de vue graphique, parfaitement avec la construction de Rohn**) reposant sur les principes de la géométrie projective.

O úhlu dvou rovin v prostoru čtyrrozměrném.

Napsal Dr. *Lad. Seifert* v Brně.

Nazývejme, jak je zvykem, lineární prostor trojrozměrný obsažený ve prostoru čtyrrozměrném prostě prostorem, lineární prostor dvourozměrný rovinou. Body společné dvěma prostorům

*) J. Sobotka: „Zur Konstruktion der Oskulationshyperboloide windschiefer Flächen“ (Rapports de la société royale tchèque des sciences, 1893). „Zur Konstruktion von Oskulationshyperboloiden an windschiefen Flächen“ (l. c. 1903). „Zur Konstruktion der Oskulationshyperboloide von Regelflächen“ (l. c. 1907).

**) Rohn-Papperitz: „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“, t. III., p. 227.

vyplní rovinu, jejich průsečnici. Dvě roviny α, β mají společný jediný bod, nejsou-li obsaženy v témž prostoru, a svírají obecně dva různé úhly. V prvé rovině existují dvě přímky a_1, a_2, v druhé rovněž dvě b_1 b_2 takové, že prvé dvě jsou projekce orthogonální druhých a naopak a máme 2 úhly $\widehat{a_1 b_1}$, $\widehat{a_2 b_2}$, které charakterisují dvojinu rovin. Dvě takové dvojiny jsou identické, mají-li stejné úhly a naopak. Otáčí-li se a v α kol společného bodu O, b v β kol bodu O, úhel $\widehat{a\,b}$ se mění mezi dvěma hodnotami krajními, které jsou právě úhly $\widehat{a_1 b_1}$, $\widehat{a_2 b_2}$. Tato velmi zajímavá okolnost nemá analogie v geometrii prostoru trojrozměrného a jest jen málo prací, které se jí dotýkají. Možno citovati Veronese (Grundzüge der Geometrie von mehrerer Dimens.), Schoute (Mehrdim. Geometrie), de Vries (Zentralprojektion im 4dim. Raume). Methody posledního spisku chci použíti, abych řešil některé otázky sem spadající.

I. Buďte OX_1^∞, XO_2^∞, OX_3, OX_4^∞ system čtyr navzájem kolmých os souřadných v prostoru čtyrrozměrném. Všechny relace úhlové jsou jak známo v úzkém vztahu ku absolutní kouli v nekonečnu dané kuželem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0. \tag{1}$$

Úhel dvou přímek, které položme počátkem

$$\begin{aligned} a \ldots x_1 &= \alpha_1\, t, & x_2 &= \beta_2\, t, & x_3 &= \gamma_3\, t, & x_2 &= \delta_1\, t, \\ b \ldots x_1 &= \alpha_2\, t, & x_2 &= \beta_2\, t, & x_3 &= \gamma_2\, t, & x_4 &= \delta_2\, t, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2 = 1,$
jest dán vzorcem

$$\cos V = \alpha_1\, \alpha_2 + \beta_1\, \beta_2 + \gamma_1\, \gamma_2 + \delta_1\, \delta_2\,. \tag{3}$$

Možno jej vyjádřiti dvojpoměrem, který v nekonečnu tvoří body A^∞, B^∞ obou přímek a průseky jejich spojnice s koulí 1), známou formulí Lagrangeovou

$$\varphi = \frac{1}{2i} \log\,(A^\infty\, B^\infty\, J_1^\infty\, J_2^\infty) = \frac{1}{2i} \log \triangle \tag{4}$$

Použijme nyní centrální projekce. Střed promítání buď $c\ (0,0,0,r)$ a promítejme na prostor $x_4 = 0$. Podobně jako v obyčejné centrální projekci určíme přímku stopou na $x_4 = 0$ a úbežníkem, to jest stopou rovnoběžky vedené bodem c, rovinu stopou a úběžnicí, která je s ní rovnoběžná, prostor stopní a úběžnou rovinou.

Koule 1) se promítá kuželem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_4 - r)^2 = 0$$

do

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + r^2 = 0. \tag{5}$$

Tato imoginární koule jest obrazem absolutní koule 1). Při konstrukcích lze ji nahraditi koulí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0, \qquad 6)$$

kterou zoveme distanční koulí. (Viz de Vries, Centralprojekt.)

Přímky směrů $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$; $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ mají za úběžníky body

$$A\left(-\frac{\alpha_1 . r}{\delta_1}, -\frac{\beta_1 . r}{\delta_1}, -\frac{\gamma_1 . r}{\delta_1}\right)$$
$$B\left(-\frac{\alpha_2 . r}{\delta_2}, -\frac{\beta_2 . r}{\delta_2}, -\frac{\gamma_2 . r}{\delta_3}\right) \qquad 7)$$

Dvojpoměr jejich s oběma průseky spojnice s 5) jest dvojpoměr 4). Jsou-li A, B polárně sdružené, jsou přímky kolmé.

Buď a úběžnice roviny, a' její poláru ku 5). Rovina s úběžnicí a' sluje úplně kolmá ku prvé, kdežto rovina, jejíž úběžnice p seče a' v jednom bodě, sluje polokolmá. Buď b úběžnice jiné roviny, b' její polára. V obecném případě existují dvě přímky m, n, které sekou přímky a, b, a', b' v bodech A_1, B_1, A_1', B_1' resp. A_2, B_2, A_2', B_2' a 5) v J_1, J_1' a J_2, J_2'. Jsou vždy reálné a reciproké poláry ku 5). To jsou úběžnice dvou rovin, které sekou obě v přímkách společným bodem O a dvojpoměry $(J_1 J_1' A_1 B_1)$, $(J_2 J_2' A_2 B_2)$ určují úhly jejich. Pak-li ve zvláštním případě a, b, a', b' mají polohu hyperboloidickou, existuje nekonečně mnoho přímek m, n, které tvoří druhý system hyperboloidu. V systemu m, n je plochou 5) indukována involuce, dvojné elementy jsou přímky plochy 5). Rovněž tak v systemu (a, b). Pak jest nekonečně mnoho rovin uvedeného způsobu se stejným dvojpoměrem, a dvojinu daných rovnic zoveme dvojinou o stejných úhlech. Plocha, která obsahuje systemy $(a\, b \ldots)$ a $(m\, n \ldots)$ má s 5) společný prostorový čtyrúhelník.

Buďte dány 2 roviny

$$\alpha \begin{cases} x_1 = o \\ x_2 = o \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} x_1 = ax_3 + bx_4 \\ x_2 = cx_3 + dx_4 \end{cases} \qquad 8)$$

Úběžnice prvé $(OX_3^\infty\, X_4^\infty)$ jest OX_3, polára její $X_1^\infty\, X_2^\infty$, úběžnice druhé

$$x_1 = ax_3 - br, \quad x_2 = cx_3 - dr, \qquad 9)$$

její reciproká polára

$$x_1 = \frac{rc + x_3 d}{bc - ad}, \quad x_2 = \frac{-bx_3 - ar}{bc - ad}. \qquad 9^a)$$

Přímka, která seče OX_3^∞, $X_1^\infty\, X_2^\infty$, 9) a 9^a), jest tvaru

$$x_2 = \lambda_2 x_1, \quad x_3 = k$$

a pro λ dostaneme rovnici

$$\lambda^2 = \frac{d^2 + c^2 - a^2 - b^2}{ac + bd} \lambda - 1 = 0. \tag{10}$$

Tato dává dvě hodnoty a 2 transversály vyjma případ

$$ac + bd = \theta, \qquad d^2 + c^2 - a^2 b^2 = 0, \tag{11}$$

kdy α, β jsou roviny o rovných úhlech. Pak lze 11) psáti buď

$$d = -a, \quad b = c \qquad \text{anebo} \qquad d = a, \quad c = -b.$$

Lze snadno odvoditi rovnici, která podává příslušnou hodnotu dvojpoměru $\triangle$ neb $tg\ \varphi$.

Pro $x_2 = \lambda_i \,.\, x_1$ $(i = 1, 2)$ dostáváme pro průseky s 9) a koulí 5)

$$x_1 = \frac{r\,(bc - ad}{c - a\,\lambda_i}, \qquad x_1 = \pm\, r_i \frac{\sqrt{(d - b\lambda_i)^2 + (c - a\lambda_i)^2}}{(c - a\lambda_i)\sqrt{1 + \lambda_i^2}}$$

odtud dvojpoměr

$$\triangle = (A B J_1 J_2) = \frac{(ad - bc)\sqrt{1 + \lambda^2} - i\sqrt{(d - b\lambda)^2 + (c + a\lambda)^2}}{(ad + bc)\sqrt{1 + \lambda^2} + i\sqrt{(d - b\lambda)^2 + (c + a\lambda)^2}}$$

$$\text{a} \quad tg^2\,\varphi = \frac{\triangle + 1}{\triangle - 1} = \frac{(ad - bc) \quad (1 + \lambda^2)}{(d - b\lambda^2) + (c - a\lambda)^2}. \tag{12}$$

Vyloučíme-li λ z rovnic 10 a 12, dostaneme

$$tg^4\,\varphi - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,tg^2\,\varphi + (ad - bc)^2 = 0. \tag{13}$$

Tato rovnice je jiným způsobem odvozena u Schoute v citovaném díle.

II. Zodpovězme nyní otázku, jak jsou rozloženy roviny, které s danou rovinou svírají dané úhly. Buď jako v 8) pevná rovina α, pohyblivá β. Pak dle 13) se tažme, co tvoří úběžnice rovin, pro které

$$\left.\begin{aligned} a)&\quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = tg^2\,\varphi_1 + tg^2\,\varphi_2 = k_1 \\ b)&\quad ad - bc = = \pm\, tg\,\varphi_1 \,.\, tg\,\varphi_2 = \pm\, k_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Tyto rovnice definují zřejmě přímkové komplexy a společné kongruence patří hledaným rovinám. Všimněme si nejprve podmínky *a)*. Zaveďme přímkové souřadnice s obvyklým označením[1])

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 - x_1^0, & q_4 &= x_2\ x_3^0 - x_3 \,.\, x_2^0 \\ q_2 &= x_2 - x_2^0, & q_5 &= x_3 \,.\, x_1^0 - x_1 \,.\, x_3^0 \\ q_3 &= x_3 - x_3^0, & q_6 &= x_1 \,.\, x_3^0 - x_2 \,.\, x_1^0 \end{aligned}$$

a jest možno psáti

$$\frac{q_1}{q^3} = a, \quad \frac{q_2}{q_3} = c, \quad \frac{q_5}{q_4} = br, \quad \frac{q_4}{q_3} = -\,dr, \quad \frac{q_6}{q_3} = r\,(ad - be);$$

[1]) Viz *Clebsch:* Vorlesungen, neb *Zindler:* Liniengeometrie I.

pak 14^a zní

$$q_1^2 + q_2^2 + \frac{q_4^2 + q_5^2}{r^2} = k_1 \cdot q_3^2. \qquad 15)$$

Máme tedy komplex kvadratický. Kužel bodu $P\ (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ má rovnici

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 - k_1\,(x_3 - x_3^0)^2 + \\ + \frac{(x_2\,x_3^0 - x_3\,x_2^0)^2 + (x_3\,x_1^0 - x_1 \cdot x_3^0)^2}{r^2} = 0; \qquad 16)$$

stopa jeho na $x_3 = 0$ jest patrně kruh, který lze snadno sestrojiti.

Místo bodů, pro které rozpadá kužel ve 2 roviny (plochu singulární), nalezneme, kladouce diskriminant rov. 16) rovný nulle. Posuneme-li parallelně osy do vrcholu P, nalezneme pak snadno

$$(r^2 + x_3^{0\,2}) \left[[x_1^{0\,2} + x_2^{1\,2} - k_1\,(r^2 + x_3^{0\,2}) \right].$$

Plocha se skládá ze dvou rovin $x_3 = \pm\, ri$ a hyperboloidu rotač.

$$H \equiv x_1^2 + x_2^1 - k_1\ (x_3^2 + r^2) = 0, \qquad 17)$$

který seče $x_3 = 0$ v kruhu

$$x_1^2 + x_2^2 - k_1\ x_3^2 = 0$$

a má imag. vrcholy $c_1,\ c_2$ na OX_3^{∞} $(x_3 = \pm\, ri)$. Má tedy s koulí společný prostorový čtyřúhelník s diagonálami

$$OX_3^{\infty},\ X_1^{\infty}\,X_2^{\infty}.$$

Pro body obou rovin $(x_1^0, x_2^0, \pm\, ri)$ rozpadne se kužel 16) v $x_3 = \pm\, ri$ a rovinu

$$\left((x_1^{0\,2} + x_2^{0\,2} - k_1\,r^2\right)\left(x_3^2 + ri\right) \mp 2ri\left[x_1\,x_1^0 + x_2\,x_2^0 - x_1^{0\,2} - x_2^{0\,2}\right] = 0;$$

průsečnice její s $x_3 = \mp\, ri$ jest

$$x_1\,x_1^0 + x_2\,x_2^0 - k_1\,r^2 = 0. \qquad 18)$$

Roviny $x_3 = ri,\ x_3 = -\,ri$ jsou v korrelativním vztahu. Přímka, která je incidentní s korrespondujícími elementy, patří komplexu. Máme tedy docela zvláštní případ komplexu Hirstova.[2]) Jsou-li $J_1,\ J_2$ imag. kruhové body v nekonečnu na $X_3 = 0$, poznáváme dvojné přímky jeho $C_1\,J_1,\ C_1\,J_2,\ C_2\,J_1,\ C_2\,J_2,\ J_1\,J_2$. Body singulární vyplní $x_3 = \pm\, ri$, a $H = o$, roviny singulární se dotknou $H = o$ a tvoří trsy $J_1,\ J_2$. Přímky singulární jsou přímky obou rovin, trsů $J_1,\ J_2$ a přímky kongruence druhého stupně a druhé třídy, které se dotknou H.

Všimněme si nyní podmínky *b)*

$$ad - bc = \pm\, k_2.$$

---

[2]) Sturm, Liniengeometrie III.

V souřadnicích přímkových zní

$$-q_1 q_4 - q_2 . q_5 = \pm k_2 . q_3^2 . r$$

neb s ohledem ku vztahu

$$q_1 . q_4 + q_2 . q_5 + q_3 . q_6 = 0$$

$$q_3 . q_6 = \pm k_2 . q_3^2 . r$$

a rozpadá na $q_3 = 0$ a $\frac{q_6}{q_3} = \pm k_2 . r$.

Prvá znamená lineární komplex singulárních přímek rovnoběžných s $OX_1^\infty X_2^\infty$, druhá lineární komplexy s osou OX_3^∞. Pišme je

$$x_1 . x_2^0 - x_2 , x_1^0 = \pm k_2 . r (x_3 - x_3^0). \qquad 19)$$

Přímky, společné komplexu 16) a prvému neb druhému 19), jsou úběžnice rovin, které s α svírají dané dva úhly a obě rovnice podávají snadno příslušné konstrukce. Máme tedy dvě kongruence stupně a třídy 2, bodem jdou 4 a v rovině leží také 4 úběžnice. Vrátíme-li se do prostoru čtyrrozměrného, můžeme říci:

Přímkou jdou 4 roviny a v prostoru leží také 4 roviny, které s danou rovinou svírají dvojinu úhlu α, β dané velikosti.

Prvá i druhá kongruence ($\pm k_2$) mají společné 4 singulární přímky $C_1 J_1$, $C_1 J_2$, $C_2 J_1$, $C_2 J_2$. Bod M na $C_1 J_1$ má v prvém komplexu kužel složený z w_1 a roviny přímkou $C_1 J_1$, mají tedy s 19) spol. pouze $C_1 J_1$ atd. Jedná se tedy o kongruenci Hirstovu.

Abychom našli plochu singulární, stanovme podmínku dotyku kužele 16) s rovinou 19). Dostaneme po snadném výpočtu

$$\left(x_1^{0^2} + x_2^{0^2}\right)^2 - k_1 \left(r^2 + x_3^{0^2}\right) \left(x_1^{0^2} + x_2^{0^2}\right) + k_2^2 \left(r^2 + x_3^{0^2}\right) = 0$$

odkud s vynecháním indexu o

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= l_1 (r^2 + x_3^2), \\ x_1^2 + x_2^2 &= l_2 (r^2 + x_3^2), \end{aligned} \qquad 20)$$

kde $l_1 = \frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2} = tg^2 \varphi_1$, $l_2 = \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2} = tg^2 \varphi_2$.

Obě kongruence uvažované tvoří tedy kongruenci společných tečen dvou rotačních hyperboloidů 20), které s koulí 5) tvoří svazek ploch o prostorovém čtyrúhelníku $x_1^2 + x_2 = 0$, $x_3^2 + r^2 = 0$.

Uvažujme nyní případ, kdy se jedná o roviny se stejnými úhly. Podmínku $k_1^2 = 4k_2^2$ či

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4(ad - bc)^2 = 0$$

lze psáti $\left[(a+d)^2+(b-c)^2\right].\left[(a-d)^2+(b+c)^2\right]=0$

a ona je splněna reálnými hodnotami při

$$a+d=0,\ b-c=0 \text{ neb } a-d=0,\ b+c=0. \qquad 21)$$

Pak rovnice roviny β jest v prvém případě:

$$x_1 = ax_3 + bx_4$$
$$x_2 = bx_3 + ax_4,$$

úběžnice

$$x_1 = ax_3 - br \qquad 21^a)$$
$$x_2 = bx_3 + ar$$

či v přímkových souřadnicích

$$q_1 - \frac{q_5}{r} = 0, \qquad \frac{q_5}{r} - q_2 = 0.$$

To jest patrně rotační lineární kongruence s osou OX_3^∞ a singulárními přímkami

$$x_2 = \pm\, i\, x_1, \qquad x_3 = \mp\, ri. \qquad 22^a)$$

V druhém případě jsou singulární přímky

$$x_2 = \pm\, i\, x_1, \qquad x_3 = \pm\, ri. \qquad 22^b)$$

Úběžnice rovin, které s danou mají dvojinu rovných úhlů, vyplní 2 lineární rotační kongruence přímkové.

Z 21) plyne pro daný úhel φ

$$tg^2\, \varphi = \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^1 + d^2) = a^2 + b^2.$$

Eliminací a, b z této a rovnice 21^a vychází

$$x_1^2 + x_2^2 = tg^2\, \varphi\, (x_3^2 + r^2). \qquad 23)$$

Úběžnice rovin, které s α tvoří dvojinu rovin o stejných úhlech φ, vyplní plochu 23). Jeden system přímkový patří jedné, druhý druhé kongruenci 22^{ab}.[3]) Dvě plochy 23) k úhlům φ_1, φ_2 určí kongruenci společných tečen.

Poněvadž při pohybu ve smyslu geometrie euklidovské transformuje se plocha 1) a tedy v projekci 5) sama v sebe, přijdeme od zvláštního případu, kde OX_3^∞ je úběžnicí, k případu obecnému, provedeme-li kolineaci, při níž 5) přijde sama v sebe. Dostaneme za 23) hyperboloid, který má s koulí společné 4 přímky. Těchto ploch lze použíti k řešení četných úloh o rovinách.

III. Velmi zajímavé, však obtížné jest řešení problémů, které jsou analogické problému isogonálnímu v prostoru obyčejném.[4])

---

[3]) Srovnej *De Vries*, l. c. p. 66—73.
[4]) *Hefler:* Isogonalflächen, Crellův Journal 112.

Jedná-li se o geom. m. bodu, z něhož 2 body, bod a rovina, přímka a rovina neb 2 roviny se jeví pod daným úhlem, máme úplnou analogii s prostorem trojrozměrným, jedná-li se však o dvě přímky jest tomu jinak.

Poněvadž dvě roviny mají obecně společný bod a dva různé úhly, netvoří-li dvojinu o rovných úhlech, můžeme se tázati:

Dány-li dvě přímky a, b,

1. jaké místo vyplní body P, kde (aP), (bP) tvoří dané dva úhly α, β;

2. jaké místo vyplní P, tvoří-li (aP), (bP) dvojiny o rovných úhlech;

3. jaké místo vyplní P, tvoří-li (aP), (bP) dvojinu o rovných úhlech dané velikosti α.

Dle výkladu podaného lze zodpověděti uspokojivě otázku 2. Zodpovědění prvé a třetí ponechám si na jinou příležitost.

Buďte A, B úběžníky daných dvou přímek a, b a jeden system povrchových přímek na kouli $(m, n \ldots)$. Libovolná přímka bodem A seče 2 přímky systemu m, n a tyto jsou proťaty jednou přímkou svazku (B). Tím způsobem jsou si přiřaděny projektivně přímky svazku (A), (B) a roviny svazků (a), (b). Výtvor je pak varianta dvojrozměrná, která obsahuje ∞^1 přímek a jejíž rovnici lze ostatně velmi snadno podati.

Volme mimoběžky a, b v prostoru $x_4 = 0$ a určeme je rovnicemi

$$a \begin{cases} x_1 - m x_2 = 0 \\ x_3 = n \end{cases} \qquad b \begin{cases} x_1 + m x_2 = 0 \\ x_3 = -n \end{cases} \tag{24}$$

Roviny jdoucí prvou nebo druhou mají rovnice

$$\alpha \begin{cases} x_1 - m x_2 + p_1 \, . \, x_4 = 0 \\ x_3 - n + q_1 \, . \, x_4 = 0 \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} x_1 + m x_2 + p_2 \, . \, x_4 = 0 \\ x_3 + n + q_2 \, . \, x_4 = 0, \end{cases} \tag{25}$$

jejich úběžnice

$$a' \begin{cases} x_1 - m x_2 - p_1 \, r = 0 \\ x_3 - q_1 \, . \, r = 0 \end{cases} \qquad b' \begin{cases} x_1 + m \, . \, x_2 - p_2 \, . \, r = 0 \\ x_3 - q_2 \, . \, r = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Na ploše kulové jsou dány systemy přímkové parametry λ, μ

$$A \begin{cases} x_1 + i \, x_2 = \lambda \, (x_3 + ri), \\ x_1 + i \, x_2 = \frac{1}{\lambda} \, (x_3 + ri), \end{cases} \qquad B \begin{cases} x_1 + i \, x_2 = \mu \, (x_3 + ri), \\ x_1 + i \, x_2 = -\frac{1}{\mu} \, (x_3 - ri). \end{cases} \tag{27}$$

Přímka 26a') protíná 2 systemu A; vylučme x_1, x_2, x_3, dostaneme pro λ

$$\lambda^2 \, (1 + mi) \, (q_1 + i) - 2 p_1 \, . \, \lambda - (1 - mi) \, (q_1 - i) = 0.$$

Podobně 26[b]) dává

$$\lambda^2 (1 - mi)\ (q_2 + i) - 2p_2 \,.\, \lambda - (1 + mi)\ (q_2 - i) = 0.$$

Aby obě znamenaly tytéž přímky systemu A, jest nutno

$$\frac{(1 + mi)\ (q_1 + i)}{(1 - mi)\ (q_2 + i)} = \frac{(1 - mi)\ (q_1 - i)}{(1 + mi)\ (q_2 - i)} = \frac{p_1}{p_2},$$

neb po úpravě

$$\frac{q_1 - m}{q_2 + m} = \frac{1 + m q_1}{1 - m \,.\, q_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{28}$$

Rovnice tato vyjadřuje podmínku, kdy úběžnice 26) a jejich poláry mají polohu hyperboloidickou, a zároveň kollineaci obou svazků přímek 26) neb svazků rovin 25). Vyloučením veličin p_1, q_1, p_2, q_2 z rovnic 25) a 28) dostáváme, píšeme-li $m = tg\ \omega$:

$$\left.\begin{aligned} x_3{}^2 + (x_4 - n \operatorname{cotg} 2\,\omega)^2 &= \frac{n^2}{\sin^2 \omega} \\ tg\ \omega\ (x_1 x_4 + x_2 x_3) - n\, x_1 &= 0 \\ (x_2 x_4 - x_1 x_3) + n \,.\, tg\ \omega \,.\, x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

To jsou tři plochy druhého st. variantou jdoucí; prvá jest kužel prvého způsobu (dle Veronese), obsahuje ∞^1 rovin, které jdou přímkou $X_1{}^\infty\ X_2{}^\infty$ a sekou $O X_3{}^\infty\ X_4{}^\infty$ v bodech kruhu k. Tento má střed $x_3 = 0$, $x_4 = n \operatorname{cotg} 2\,\omega$ a jde body $x_4 = 0$, $x_3 = \pm\, n$, t. j. seče a, b.

Variantu lze vytvořiti třemi projektivními svazky prostorů:

1. $x_1 + m\, x_2 = \lambda\ (x_1 - m\, x_2)$ o zákl. rovině $O X_3{}^\infty\ X_4{}^\infty$
2. $x_3 + n - m\, x_4 = \lambda\ (x_3 - m\, x_4)$ „ „ „ $x_3 = o$, $x_4 = n \operatorname{cotg} \omega$,
3. $x_4 + (x_3 + n)\ m = \lambda\ [x_4 - (x_3 - n)\ m]$ o zákl. rovině $x_3 = o$, $x_4 = -\ n\ tg\ \omega$.

Poslední dva tvoří kužel prvý a jest tedy varianta uvažovaná výtvor projektivního svazku 1) a tohoto kužele, obsahuje ∞^1 přímek, které spojují body kruhu k a přímky $X_1{}^\infty\ X_2{}^\infty$.

Bod na kruhu

$$x_3 = -\ \frac{n\,(1 - \lambda^2)\ (1 + m^2)}{(1 - \lambda)^2 + m^2\,(1 + \lambda^2)},\quad x_4 = \frac{4\,m\,n\,\lambda}{(1 - \lambda)^2 + m^2\,(1 + \lambda)^2}, \tag{30}$$

bod na přímce

$$\frac{x_1}{x_2} = -\ \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda}\, m.$$

Přímky a, b a přímky, které spojují kruhové body v nekonečnu obou útvarů, patří variantě $\left(\lambda = 0, \infty, \frac{\pm i - m}{\pm i + m}\right)$.

Kdybychom místo systemu A na kouli vzali system B, přijdeme k druhé variantě, která je na kuželu

$$x_3^2 + (x_4 + n \operatorname{cotg} 2\omega)^2 = \frac{n^2}{\sin^2 2\omega}$$

a korrespondence bodů na tomto kruhu, který je v $OX_3^\infty X_4^\infty$ dle OX_3^∞ symetricky s prvým položeny a přímce $X_1^\infty X_2^\infty$ je dána rovnicemi

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} m, \quad x_3 = \frac{n(1-\lambda^2)(1+m^2)}{(1-\lambda)^2 + m^2(1+\lambda)^2}, \quad x_4 = -\frac{4mn\lambda}{(1-\lambda)^2 + m^2(1+\lambda)^2}. \tag{31}$$

O některých vlastnostech těchto ploch a vztahu ku problémům 1) a 3) pojednám jindy.

*

Sur l'angle de deux plans dans l'espace à quatre dimensions.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans ce travail j'emploie la projection centrale de l'espace à quatre dimensions sur l'espace a trois dimensions, analogue à celle qu'a donnée H de Vries dans: „Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdim. Raume."

I. Soit C (0, 0, 0, r) le centre de projection, $x_4 = 0$ l'espace operateur. La sphère absolue 1.) se projette sur 5). La droite a est donnée par sa trace A et l'image A' du point de l'infini, le plan est donné par la trace α et l'image a' de la droite de l'infini, etc. L'angle de deux droites a, b est intimement lié au rapport anharmonique des quatre points: A', B', et les intersections de A' B' avec la sphère 5.) (formule de Laguerre).

Deux plans ont, en général, un point O, en commun, et il y a deux angles différents qui caractérisent un couple de deux plans; il y a, en général, deux transversales m, n qui coupent les droites a' b' et leurs polaires réciproques par rapport à la sphère 5). Ces transversales sont les images des droites de l'infini des deux plans (Om), (On) dans lesquels se trouvent les deux angles du couple. Si ces quatre droites se trouvent sur un hyperboloïde à une nappe, il y a une infinité de ces angles, qui sont tous égaux, et les transversales fournissent un système de droites d'un hyperboloïde qui coupe 5.) en quatre droites. Pour les plans donnés par 8.) on trouve les transversales, les rapports anharmoniques et les angles par l'équation 13, donnée aussi par M. Schoute („Mehrdimensionale Geometrie").

II. Quel est le lieu des plans qui font avec a un couple aux angles donnés φ_1, φ_2? Les droites b' forment une partie d'un complexe quadratique et de l'un de deux complexes linéaires. Le premier a l'équation 15) en coordonnées plückeriennes. C'est un cas métrique spécial d'un complexe de Hirst. Ce complexe et les deux complexes linéaires ont en commun deux congruences qu'on reconnaît encore comme des congruences de Hirst. Leurs droites sont les tangentes communes de deux hyperboloïdes de révolution 20). Les b' des plans qui font avec a un couple d'angles égaux, remplissent deux congruences linéaires. Si cet angle a une grandeur donnée, les b' sont situées sur l'hyperboloïde 23).

III. Étant données deux droites a, b dans l'espace à quatre dimensions, le lieu du point P pour lequel les deux plans (aP), (bP) font un couple d'angles égaux se compose de deux variétés cubiques à deux dimensions. La première est donné comme l'intersection des trois surfaces 29) et contient ∞^1 de droites qui joignent les points du cercle à ceux de la droite $\overset{\infty}{X_1}\,\overset{\infty}{X_2}$, de la manière indiquée par 30). L'analogue a lieu pour la seconde, équation 31).

Příspěvek k použití diferenciálních rovnic v pojistné matematice.

Napsal Dr. *E. Schoenbaum.*

I.

Cílem této práce jest ukázati, jak lze s výhodou použíti teorie diferenciálních rovnic k odvození důležitých vět v oboru pojistné matematiky [1])

1. Abychom odvodili diferenciální rovnici pro hodnotu nepřetržitého životního důchodu, vyjdeme z této úvahy:

Budiž $l(x, t)$ [2]) počet osob, které zbývají po uplynutí doby t od počátku pozorování z počtu $l(x, 0)$ x-letých osob v uzavřeném a homogenním souboru individuí, z něhož děje se vystupování pouze umíráním, tedy působením jediné příčiny výluky; budiž dále i úroková míra, vzatá za základ výpočtů a $v = \frac{1}{1+i}$, diskontní

[1]) K literatuře o předmětu poznamenávám, že diferenciální rovnici premiové reservy odvodil poprvé v r. 1875 dánský astronom Thiele; rovnicí pro obecné hodnoty se zabývá pojednání *Jörgensenovo*: „Einige Bemerkungen über die Thiel'sche Differentialgleichung der Prämienreserve" Jahrb. f. Vers. mat 1914 a *A. Loewyho* pojednání: „Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmatematik, Sitzgsber. d. Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1917.

[2]) O funkci dvou proměnných $l(x, t)$ předpokládejme, že má derivace,