Emil Schoenbaum

Příspěvek k použití diferenciálních rovnic v pojistné matematice. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 148--156

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123260

II. Quel est le lieu des plans qui font avec α un couple aux angles donnés φ_1, φ_2? Les droites b' forment une partie d'un complexe quadratique et de l'un de deux complexes linéaires. Le premier a l'équation 15) en coordonnées plückeriennes. C'est un cas métrique spécial d'un complexe de Hirst. Ce complexe et les deux complexes linéaires ont en commun deux congruences qu'on reconnaît encore comme des congruences de Hirst. Leurs droites sont les tangentes communes de deux hyperboloïdes de révolution 20). Les b' des plans qui font avec α un couple d'angles égaux, remplissent deux congruences linéaires. Si cet angle a une grandeur donnée, les b' sont situées sur l'hyperboloïde 23).

III. Étant données deux droites a, b dans l'espace à quatre dimensions, le lieu du point P pour lequel les deux plans (aP), (bP) font un couple d'angles égaux se compose de deux variétés cubiques à deux dimensions. La première est donné comme l'intersection des trois surfaces 29) et contient ∞^1 de droites qui joignent les points du cercle à ceux de la droite $\overset{\infty}{X_1}\,\overset{\infty}{X_2}$, de la manière indiquée par 30). L'analogue a lieu pour la seconde, équation 31).

Příspěvek k použití diferenciálních rovnic v pojistné matematice.

Napsal Dr. *E. Schoenbaum.*

I.

Cílem této práce jest ukázati, jak lze s výhodou použíti teorie diferenciálních rovnic k odvození důležitých vět v oboru pojistné matematiky [1])

1. Abychom odvodili diferenciální rovnici pro hodnotu nepřetržitého životního důchodu, vyjdeme z této úvahy:

Budiž $l(x, t)$ [2]) počet osob, které zbývají po uplynutí doby t od počátku pozorování z počtu $l(x, 0)$ x-letých osob v uzavřeném a homogenním souboru individuí, z něhož děje se vystupování pouze umíráním, tedy působením jediné příčiny výluky; budiž dále i úroková míra, vzatá za základ výpočtů a $v = \frac{1}{1+i}$, diskontní

---

[1]) K literatuře o předmětu poznamenávám, že diferenciální rovnici premiové reservy odvodil poprvé v r. 1875 dánský astronom Thiele; rovnicí pro obecné hodnoty se zabývá pojednání *Jörgensenovo*: „Einige Bemerkungen über die Thiel'sche Differentialgleichung der Prämienreserve" Jahrb. f. Vers. mat. 1914 a *A. Loewyho* pojednání: „Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmatematik, Sitzgsber. d. Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1917.

[2]) O funkci dvou proměnných $l(x, t)$ předpokládejme, že má derivace,

faktor; konečně označme $a^{(\tau)}(x, t)$ hodnotu takového nároku pro člena onoho souboru, že vyplácí se v časových intervalech vzdálených o τ a sice na počátku intervalu obnos τ oněm osobám, jež jsou v době výplaty ještě členy souboru.

Z definice plyne ihned vztah

$$(1) \quad l(x,t)\, a^{(\tau)}(x,t) = l(x, t+\tau) \cdot a^{(\tau)}(x, t+\tau) \cdot v^{\tau} - l(x,t) \cdot \tau,$$

uvážíme-li, že na počátku intervalu $(t, t+\tau)$ bylo vyplaceno $l(x, t)$ osobám po částce τ a že na konci časového intervalu jest tu ještě $l(x, t+\tau)$ osob, z nichž každá má nový nárok $a^{(\tau)}(x, t+\tau)$. Odečteme-li tento vztah od identity

$$l(x, t+\tau) \cdot a^{(\tau)}(x, t+\tau) = l(x, t+\tau)\, a^{(\tau)}(x, t+\tau),$$

dělíme-li τ a necháme τ konvergovati k 0, obdržíme ihned diferenciální rovnici pro $\bar{a}(x, t)$ spojitý (životní) důchod vyplácený nepřetržitě ve výši 1 ročně.

$$\frac{d}{dt}\left[l(x,t)\,\bar{a}(x,t)\right] = l(x,t)\,\bar{a}(x,t) \lim_{\tau \to 0} \frac{1-v^{\tau}}{\tau} - l(x,t).$$

Zaveďme pojem intensity úrokové δ vztahem

$$e^{\delta} = \frac{1}{v};$$

obdržíme pak diferenciální rovnici v její nejjednodušší formě.

$$(2) \quad \frac{d}{dt}\left(l_{[x]+t} \cdot \bar{a}_{[x]+t}\right) = \delta\, l_{[x]+t} \cdot \bar{a}_{[x]+t} - l_{[x]+t},$$

při čemž užívám již označení obvyklého v odborné literatuře. Integračním faktorem této rovnice jest, jak lze snadno dokázati, $e^{-\delta t}$, tak že jest

$$\frac{d}{dt}\left[l_{[x]+t} \cdot \bar{a}_{[x]+t} \cdot e^{-\delta t}\right] = -e^{-\delta t} \cdot l_{[x]+t}$$

označíme-li

$$e^{-\delta t} \cdot l_{[x]+t} = \bar{D}_{[x]+t}$$

$$e^{-\delta t} \cdot l_{[x]+t} \cdot \bar{a}_{[x]+t} = \bar{N}_{[x]+t},$$

máme vztah $\quad \dfrac{d}{dt}\left[\bar{N}_{[x]+t}\right] = -\bar{D}_{[x]+t},$

tak že obdrželi jsme nejpřirozenějším způsobem tak zv. čísla komutační a vztah mezi nimi.

Zaveďme dále pojem intensity výlukové (v daném případě úmrtnosti) vztahem

$$-\frac{1}{l_{[x]+t}} \cdot \frac{d}{dt}\, l_{[x]+t} = \mu_{[x]+t}\,.$$

Po krátké redukci rovnice (2), provedeme-li dříve derivaci na levé straně její naznačenou, obdržíme

(3) $$\frac{d\,\bar{a}_{[x]+t}}{dt} = (\mu_{[x]+t} + \delta)\,.\,\bar{a}_{[x]+t} - 1,$$

jakožto definici důchodu $\bar{a}_{[x]+t}$ diferenciální rovnicí prvého řádu.

Z odvození jest patrno, že předpoklad konstantní úrokové míry není nutný, že lze tedy δ považovati za funkci t. Dále jest patrno, že diferenciální rovnice pro obecný důchod, při němž výplata závisí na době t způsobem vyjádřeným funkcí $\varphi\,(t)$ (intensita výplaty), zní

(4) $$\frac{d\,\bar{a}\,(x,\,t,\,\varphi)}{dt} = (\mu_{[x]+t} + \delta)\,.\,\bar{a}\,(x,\,t,\,\varphi) - \varphi\,(t),$$

kdež $\bar{a}$ jest nyní funkcí čar ve smyslu Volterrově (fonction des lignes).

Z rovnice (3) nebo (4) lze odvoditi snadno řadu zajímavých vět o vztahu úmrtnosti a úrokové míry, aniž bychom činili předpoklady o analytickém charakteru funkce μ. To však není úkolem této práce.

2. Předpokládejme nyní, že úmrtnost pozorovaného souboru jest vystižena uspokojivým způsobem tak zv. Gompertz-Makehamovou formulí

(5) $$l_x = k\,.\,s^x\,.\,g^{c^x}.$$

Vskutku jsou vyrovnány podle tohoto vzorce téměř všechny tabulky životního pojištění a to v určitých mezích argumentu x velmi uspokojivě. Z relace (5) plyne ihned

(6) $$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dt} = log\,\frac{1}{s} + c^x\,log\,c\,.\,log\,\frac{1}{g}$$

zavedeme-li

$$log\,\frac{1}{s} = \alpha,\quad log\,\frac{1}{g} = \beta,\quad log\,c = \gamma$$

můžeme též psáti

(7) $$\mu_x = \alpha + \beta\,.\,\gamma\,.\,e^{\gamma\,.\,x},$$

tak že úmrtnost souboru jest dána konstantami α, β, γ; diferenciální rovnice pro $\bar{a}_{x+t}$ zní potom[3])

(8) $$\frac{d\,\bar{a}_{x+t}}{dt} = (\alpha + \delta + \beta\gamma\,e^{\gamma\,(x+t)})\,\bar{a}_{x+t} - 1.$$

---

[3]) K vůli jednoduchosti vynechávám v dalším označení argumentu $[x]$, ale úvahy platí beze změny pro tabulky o dvou argumentech vyrovnané podle výrazu $\mu_{[x]+t} = \alpha_{[x]} + \beta_{[x]}\,\gamma_{[x]}\,e^{\gamma\,([x]+t)}$, kde tedy veličiny α, β, γ jsou funkcemi x.

V této rovnici proveďme nyní transformaci proměnné takto: položme

$$\bar{a}_{x+t} = y$$
$$\beta e^{\gamma x} = \zeta \quad \text{a}$$
$$e^{\gamma t} = u;$$

odtud plyne
$$\gamma u \, dt = du$$

a tedy
$$\frac{d\bar{a}_{x+t}}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \gamma u \frac{dy}{du}.$$

Mění se tedy předložená rovnice takto:

$$\gamma u \frac{dy}{du} - (\alpha + \delta + \zeta \gamma u) \, y + 1 = 0$$

a položíme-li ještě
$$\frac{\alpha + \delta}{\gamma} = \sigma, \text{ jest}$$

$$\frac{dy}{du} - \left(\frac{\sigma}{u} + \zeta\right) y + \frac{1}{\gamma u} = 0 \tag{9}$$

a konečně zavedeme-li $y = \frac{z}{\gamma}$, změní se rovnice takto:

$$u \frac{dz}{du} - (\sigma + \zeta u) \, z + 1 = 0. \tag{9'}$$

Touto diferenciální rovnicí definovaná hodnota důchodu jest závislá na veličinách γ, ζ a σ a prostřednictvím těchto veličin na stáří x a na úrokové intensitě δ a na původních konstantách zákona úmrtnosti.

Pro aplikaci je důležita a výhodna poznámka, že jediný singulární bod rovnice (9) v konečnu $u = 0$, vede vzhledem ke vztahu

$$e^{\gamma t} = u$$

k hodnotě $t = -\infty$, tedy k hodnotě nemožné, ježto $\gamma = \log c$ je vždy positivní číslo, neboť c musí býti > 1, je-li $0 < s < 1$.[4])

Integrace rovnice (9) nečiní obtíží, při čemž počáteční podmínkou jest, že pro $x = \omega$ (nejvyšší stáří) jest $y = 0$; lze však obdržeti přímo z rovnice celou řadu vlastností transcendenty, která jest jí definována.

Uvažujme za tím účelem hodnoty důchodu pro jinou tabulku úmrtnosti, vystiženou rovněž Gompertz-Makehamovou funkcí, ovšem s jinými konstantami α_1, β_1, γ_1 a při jiné úrokové intensitě δ_1.

Hodnoty důchodu $\bar{a}_{x_1}$ jsou tu dány co řešení rovnice

$$\frac{dy_1}{du} - \left(\frac{\sigma_1}{u} + \zeta_1\right) y_1 + \frac{1}{\gamma_1 u} = 0 \tag{10}$$

---

[4]) Pro rakouskou tabulku úmrtnosti M^s je na příklad
$c = 1{\cdot}08074, \quad g = 0{\cdot}995894, \quad s = 0{\cdot}998070.$

při podmínce $y_1 = 0$ pro $u = \omega$, nebo jí ekvivalentní

$$(10') \qquad u \frac{dz_1}{du} - (\sigma_1 + \zeta_1 u) z_1 + 1 = 0,$$

při čemž $y_1 = \frac{z_1}{\gamma_1}$.

Stanovme nyní veličiny ζ_1 a σ_1 tak, aby

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad \zeta_1 = \zeta;$$

pak stává se rovnice (10′) identickou s rovnicí (9′) a jest tedy v daném případě

$$z_1 = z,$$

tedy

$$y_1 \gamma_1 = y \gamma$$

čili

$$y_1 = y \frac{\gamma}{\gamma_1} = y \cdot \varrho$$

zavedeme-li označení

$$\varrho = \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Podmínka $\sigma_1 = \sigma$, však znamená, přejdeme-li k původním veličinám,

$$\frac{\alpha_1 + \delta_1}{\gamma_1} = \frac{\alpha + \delta}{\gamma},$$

nebo-li

$$\delta_1 = \delta \frac{\gamma_1}{\gamma} + \frac{\alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma}{\gamma} = \frac{\delta}{\varrho} + a$$

a podobně $\zeta_1 = \zeta$ znamená

$$\beta_1 e^{\gamma_1 x_1} = \beta \cdot e^{\gamma x} \text{ čili}$$

$$\gamma_1 x_1 = \gamma x + l\beta - l\beta_1$$

$$x_1 = \varrho x + \frac{l\beta - l\beta_1}{\gamma_1} = \varrho x + b,$$

kdež a, b jsou konstanty.

Z těchto vztahů docházíme k velmi důležité větě:

Hodnota doživotního důchodu $\bar{a}_{x_1}$ pro stáří x_1, při úrokové intensitě δ_1, tabulce úmrtní s konstantami α_1 β_1 γ_1 rovná se ϱ násobné hodnotě důchodu $\bar{a}_x$ pro stáří x, při intensitě úrokové δ a při intensitě úmrtní s konstantami α, β, γ. Při tom jest x a δ stanoviti ze vztahů

$$\varrho = \frac{\gamma}{\gamma_1}, \; \delta_1 = \frac{\delta}{\varrho} + a, \; x_1 = \varrho x + b.$$

Máme-li tedy úplný system hodnot $\bar{a}_x$ pro všechna x a pro všechny úrokové intensity δ při určité tabulce úmrtní, vypočte se hodnota $\bar{a}_x$ pro libovolnou jinou tabulku úmrtní linearní transformací proměnných x a δ a násobením konstantou ϱ.

Tato věta velmi důležitá také pro praktické aplikace platí obdobně pro jiné hodnoty pojistné než $\bar{a}_x$.

Jedná-li se o hodnotu důchodu s výplatní funkcí t, tedy o důchod stejnoměrně stoupající, jest relace mezi příslušnými hodnotami a, jak plyne z příslušné rovnice diferencialní

$$\frac{dy}{du} - \left(\frac{\sigma}{u} + \zeta\right) y + \frac{lu}{uy^2} = 0,$$

$$y_1 = \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^2 y = \varrho^2 y$$

a obecně pro výplatní funkci $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\ldots a_n t^n$$

jest vztah mezi odpovídajícími si důchody:

$$y_1 = (a_0 \varrho + a_1 \varrho^2 + a_2 \varrho^3 + \ldots\ldots a_n \varrho^{n+1})\, y.$$

Tento vztah následuje co přímý důsledek z jednoduché věty o integralech linearních rovnic diferentiálních nehomogenních.[5])

3. Úvahy v předešlém oddílu provedené lze rozšířiti ihned na zobecnění Makehamovy formule Quiquetem,[6]) který z obecných úvah dostává pro intensitu μ_x výraz

$$\mu_x = \alpha + \Sigma \gamma_i e^{\gamma_i x} \varphi_i(x),$$

kde γ_i jsou konstanty a $\varphi_i(x)$ polynomy.

V tomto případě jest však praktická aplikace obdobné věty velmi nesnadna, kdežto „universalní" tabulku, sestrojenou podle theorie v předešlém oddílu vyložené, navrhli a sestojili téměř současně Blaschke (1903)[7]) a Gram.[8])

4. Z rovnice (9′) nelze seznati přímo souvislost funkce jí definované s jinými známými transcendentami. Avšak derivujeme-li rovnici tu, obdržíme linearní diferencialní rovnici druhého řádu,

$$\frac{d^2z}{du^2} + (1 - \sigma + \zeta u)\frac{dz}{du} + \zeta \cdot z = 0, \tag{11}$$

tedy rovnici Fuchsova typu, jejíž řešení lze považovati za degenerace řady hypergeometrické nebo Besselovy.[9])

---

[5]) Viz na př. *Goursat:* Cours d'Analyse mathématique II. Ed. II. sv. 401.

[6]) *Quiquet:* Comptes Rendus 106 (1888) a 109 (1889) a Atti del IV. Congresso internationale dei Matematici. Roma.

[7]) Sešit IX. der Mitteilungen des Verbandes der ö. u. Versicherungstechniker 1903 a Vers. wiss. Mitteilungen 1914, 9. sv. 1. seš.

[8]) *Gram:* Aktuaren 1. seš. p. 57. 1904; základy theorie najdou se již u Makehama.

[9]) Po funkčně teoretické stránce studoval rovnici *Pochhammer* a *Graf* Mathem. Annalen Bd. 38, Bd. 41 a Bd. 45.

V druhé části této práce budou ze studia této rovnice odvozeny některé zajímavé věty a vztahy ke známým transcendentám.

Na tomto místě budiž odvozen ještě z rovnice (9') rozvoj řetězcový. Za tím účelem pišme ji ve tvaru

$$(12) \qquad z\left(\sigma + u\zeta - \frac{uz'}{z}\right) = 1, \text{ nebo též}$$

$$z = \frac{1}{\sigma + u\zeta - \frac{uz'}{z}}.$$

Derivujeme-li (9') n-kráte podle u, obdržíme

$$uz^{(n+1)} + nz^{(n)} - (\sigma + u\zeta)\, z^{(n)} - \zeta \cdot n \cdot z^{(n-1)} = 0$$

a odtud

$$\frac{z^{(n)}}{z^{(n-1)}} = \frac{-n \cdot \zeta}{\sigma + u\zeta - n - u\frac{z^{(n+1)}}{z^{(n)}}}$$

a odtud tedy,

$$z = \gamma \cdot y = \gamma \bar{a}_{x+t} = \cfrac{1}{\sigma + u\zeta - \cfrac{u\zeta}{\sigma + u\zeta - 1 - \cfrac{2u\zeta}{\sigma + u\zeta \ldots}}};$$

specielně jest pro $t = 0$, tedy $u = 1$,

$$\gamma \bar{a}_x = \cfrac{1}{\sigma + \zeta - \cfrac{\zeta}{\sigma + \zeta - 1 - \cfrac{2\zeta}{\sigma + \zeta - 2 \ldots}}}$$

Řetězec tento vyskytující se též v theorii t. zv. neúplné funkce gamma konverguje sice, ježto ζ je positivní a σ realné,[10]) ale konvergence jeho je pomalá.

*

Contribution à l'application des équations différentielles à la science actuaire.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans cette première partie de son travail l'auteur établit l'équation différentielle pour la rente viagère continue, connue d'ailleurs, par les travaux de Jörgensen et Loewy. La forme la plus simple de cette équation est celle-ci:

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(l_{[x]+t}\, \bar{a}_{[x]+t}\right) = \delta\, l_{[x]+t}\, \bar{a}_{[x]+t} - l_{[x]+t}$$

[10]) *Nielsen:* Handbuch der Gammafunktion str. 218.

Le facteur d'intégrabilité de cette équation lui donne la forme nouvelle

$$\frac{d}{dt}\left(l_{[x]+t}\,\bar{a}_{[x]+t}\,e^{-\delta t}\right) = -\,e^{-\delta t}\,l_{[x]+t}$$

qui fournit la définition la plus naturelle des nombres de commutation. En supposant que le taux instantané de mortalité est donné par l'expression de Makeham

$$\mu_x = \alpha + \beta \,.\, \gamma \,.\, e^{\gamma x} \tag{7}$$

on obtient l'équation pour la rente viagère dans la forme

$$\frac{d\,a_{x+t}}{dt} = (\alpha + \delta + \beta\gamma e^{\gamma(\alpha+t)})\,a_{x+t} - 1, \text{ ou } e^{\delta} = 1 + i. \tag{8}$$

Par la substitution $\beta e^{\gamma x} = \zeta$, $e^{\gamma t} = u$ cette équation se change en cette autre

$$\gamma u \frac{dy}{du} - (\alpha - \delta + \zeta\,\gamma\, u)\,y + 1 = 0$$

et par une seconde substitution $\frac{\alpha + \delta}{\gamma} = \sigma$, $y = \frac{z}{\gamma}$ elle est ramenée finalement à une équation du type fuchsien

$$u\frac{dz}{du} - (\sigma + \zeta\, u)\,z + 1 = 0. \tag{9}$$

Il est important, pour les applications, de constater que le seul point singulier existant, soit $u = 0$, est exclu dans les cas qui se présentent dans la pratique.

Pour une autre table de mortalité, ajustée suivant la loi de Gompertz-Makeham: $\mu_{x_1} = \alpha_1 + \beta_1\,\gamma_1\,e^{\gamma_1 x_1}$, une équation analogue a lieu:

$$u\frac{dz_1}{du} - (\sigma_1 + \zeta_1\, u)\,z_1 + 1 = 0. \tag{10'}$$

Quand on a $\sigma_1 = \sigma$, $\zeta_1 = \zeta$, c. à d., $\delta_1 = \frac{\delta}{\varrho} + a$, $x_1 = \varrho\, x + b$, où a, b sont des constantes et $\varrho = \frac{\gamma}{\gamma_1}$, on a $\bar{a}_{x_1} = \varrho\, \bar{a}_x$. De là suit immédiatement la théorie des systèmes de tables due à Blaschke[1]) et Gram[2]). Pour la fonction de payement $\varphi(t) = a_0 + a_1\, t + \ldots + a_n t^n$ on a $\bar{a}(x_1, \varphi) = (a_0\, \varrho + a_1\, \varrho^2 + \ldots + a_n \varrho^n)\ \bar{a}(x, \varphi)$.

[1]) Heft IX. der Mitteilungen des Verbandes der ö. u. Versicherungstechniker, 1903, Versicherungswiss. Mitteilungen, 1914, t. 9., Fasc. 1.

[2]) Gram, Aktuaren 1901, fasc. I., p. 57.

Les considérations faites dans ce travail sont valables encore pour l'expression de l'intensité généralisée par Quiquet dans la forme $\mu_x = \alpha + \Sigma \gamma_i e^{\gamma_1 x} \varphi_i(x)$. En dérivant l'équation (9), on obtient l'équation

$$u \frac{d^2 z}{du^2} + (1 - \sigma + \zeta u) \frac{dz}{du} + \zeta z = 0, \tag{11}$$

dont la solution peut être considérée comme une série hypergéométrique ou une série de Bessel dégénérées. Ces solutions ont été étudiées, au point de vue de la théorie des fonctions, par Pochhammer et Graf. De l'equation (9) suit la fraction continue convergente

$$z = \gamma\, a_{x+t} = \cfrac{1}{\sigma + u\zeta - \cfrac{1}{\sigma + u\zeta - 1 - \cfrac{2u\zeta}{\sigma + u\zeta - \dots}}}$$

Grafické methody v kartografii.

B. Šalamon.

I.

Konstrukce mapy jest zvláštním případem problému o zobrazování plochy na plochu; při ní speciálně kulové, nebo ellipsoidické plochy na rovinu. Ze svých úvah vylučujeme konstrukci plánů, poněvadž se při té applikuje toliko podobnost mezi rovinnými zjevy. Omezujeme se tedy takto jen na mapy geografické. Podle zobrazovací methody, jejíž volba závisí na mnoha faktorech a která jest rovněž zajímavým problémem mathematickým, nesestrojuje se však v praxi celá mapa. Poněvadž se totiž dává zobrazovací methodě forma početářská, ve které se vyskytují jako neodvisle proměnné ve vzorcích zeměpisné souřadnice, anebo veličiny, které se z nich musí dříve odvoditi, lze podle ní konstruovati toliko obraz sítě (z poledníků a rovnoběžek) a obrazy těch míst území, jejichž geograf. souřadnice jsou známy. Pramenem pro ostatní materiál bývají kartografovi jiné mapy téhož území. Z těch se dají sice najíti geograf. souřadnice jednotlivých zobrazených bodů, ale grafická interpolace k tomu potřebná jest jen hrubě přibližná. Data z ní odvozená — dosazena do vzorců — dala by výsledky, jejichž spolehlivost nebyla by přiměřená pracovní námaze spojené s výpočtem. Grafický postup byl by tu mnohem případnější. Kromě toho bývá takových bodů veliké množství a nad to jsou výpočtové vzorce ponejvíce dosti složité. Kartograf-praktik obchází z těchto