Josef Kounovský

Osový problém ploch stupně druhého

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 78--87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123251

Sur des angles incommensurables.

(Extrait de l'article précédent.)

Considérons un angle α donné par la relation $\eta = 4\cos^2\alpha$.

1. La condition nécessaire et suffisante pour que l'angle α soit commensurable à π est qu'on puisse trouver un entier m tel que l'équation 2) soit satisfaite.

Voici deux exemples particuliers: *a*) Soit r un nombre rationnel $\leq$ 1. L'angle donné par l'équation $\cos\alpha = \sqrt{r}$ n'est pas commensurable à π. Il y a exception seulement pour les valeurs

$$\cos\alpha = 0, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{2}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{4}{4}}.$$

b) Si $a_0 > 1, a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$ sont des entiers sans diviseur commun, l'angle défini par le relation

$$a_0\,\eta^n + a_1\,\eta^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

n'est pas commensurable à π.

2. Soit donné un second angle β par la relation $\vartheta = 4\cos^2\beta$. La condition nécessaire pour que les angles α et β soient commensurables est qu'on puisse trouver deux nombres entiers m, n tels que l'équation 2. soit satisfaite.

3. En faisant usage de ces théoremes, on peut construire un nombre quelconque de séries de puissances $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ aux coefficients rationnels, pour lesquelles le cercle au rayon égal à l'unité est la frontière naturelle.

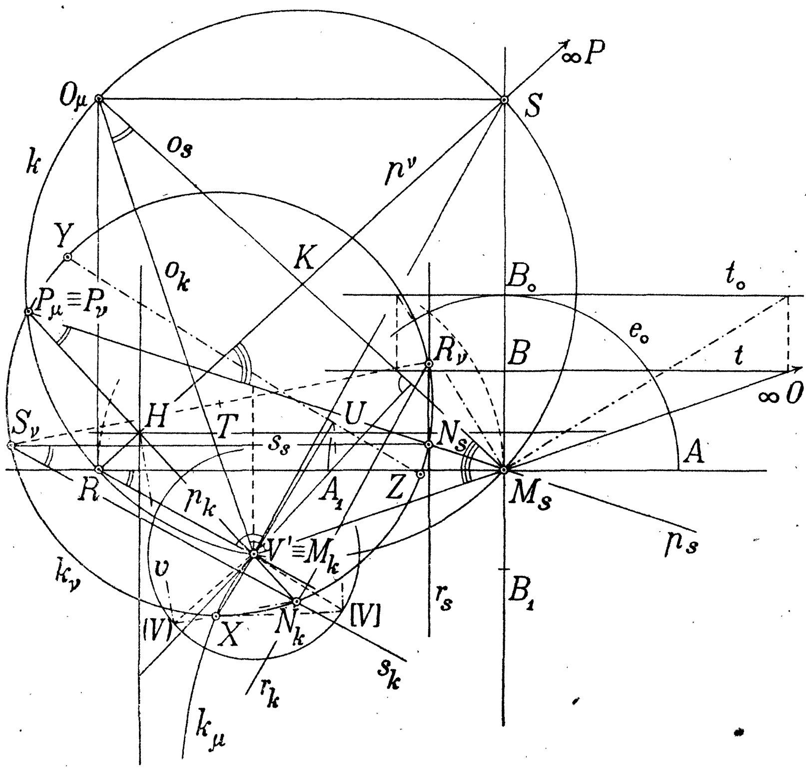
Osový problém ploch stupně druhého.

Napsal *Jos. Kounovský.*

1. Mám na mysli plochu, při jejímž určení nebyla rýsována žádná kuželosečka, na př. řídící kuželosečka plochy kuželové nebo diametrální či obrysová obecné plochy druhého stupně; v těch případech by se provedla konstrukce os pomocí některé z těchto již narýsovaných kuželoseček, jak ukázal pan profesor J. Sobotka*) ve své obsažné a celý osový problém ploch druhého stupně úplně vyčerpávající studii, které by konstruktér jistě za tím účelem užil.

*) „Beitrag zur Perspective des Kreises und anschliessend zur Construction der Axen und Kreisschnitte für Flächen zweiten Grades." Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, sv. 109, odděl. II a, str. 583—614, Vídeň 1900.

Jakmile však jest třeba za účelem sestrojení os rýsovati pomocnou kuželosečku v nákresně, pak jest to jistě rovnostranná hyperbola Apolloniova, na kteréž se určí stopy os pomocí kružnice opsané jich stopnímu trojúhelníku, jak prof. Sobotka ve své práci též uvádí. I jde' mi v přítomné úvaze hlavně o sestrojení této pomocné kružnice a jednoduché její zdůvodnění. Jednu její konstrukci podal pan profesor B. Procházka,*) v jehož pojednání obsažena jest i další literatura týkající se uvažovaného problému.



Obr. 1.

2. Budiž dána kuželová plocha řídící ellipsou e v nákresně a vrcholem V; ellipsa určena jest osami AA_1 a BB_1, vrchol pravoúhlým průmětem V' a distanční kružnicí v, jež opsána jest ze středu V' poloměrem $= VV'$ (obr. 1.).

*) „Příspěvek k sestrojování os plochy 2. stupně." Rozpravy české akademie, třída II., roč. XX., čís. 21., Praha 1911. — „Doplněk" k témuž článku, roč. XXI., čís. 4., Praha 1912.

Opisuje-li pólový paprsek kuželové plochy ve vrcholu V paprskový svazek v libovolné rovině μ, opisuje jeho polární rovina svazek rovinový, jehož osou jest pólový paprsek m_s sdružený k rovině μ. Současně opisuje rovina, kterou sestrojíme vrcholem V kolmo k pólovému paprsku, svazek rovinový, jehož osou jest přímka $m_k \perp \mu$. Oba rovinové svazky jsou vzájemně projektivní, jsouce projektivními se svazkem pólových paprsků v rovině μ, a vytvořují kuželovou plochu druhého stupně, jejíž povrchové přímky jsou kolmé paprsky sdružené k paprskům svazku v rovině μ.

Opakujeme-li tuto konstrukci pro paprskový svazek v další libovolné rovině vrcholové ν, obdržíme druhou kuželovou plochu téže vlastnosti.

Obě kuželové plochy se protínají v přímce, jež jest přiřazena průsečnici $\mu : \nu$, a mimo ni v osách dané kuželové plochy, ježto tyto průsečné přímky povrchové jsou přiřazeny dvěma kolmým paprskům sdruženým (v rovině μ a ν) t. j. mají sdruženou rovinu kolmou. Osy určíme stopním trojúhelníkem XYZ na nákresně, na které se sestrojí i stopy obou pomocných ploch kuželových uvedenými vztahy projektivními.

Zvolíme-li rovinu μ rovnoběžně s nákresnou, tedy její stopu p^{μ} v nekonečnu, jest stopou sdruženého paprsku pólového m_s střed M_s ellipsy e a stopou paprsku $m_k \perp \mu$ bod $M_k \equiv V'$ Sestrojujeme-li stopu k_{μ} příslušné pomocné plochy kuželové, shledáme, že jest hyperbolou Apolloniovou ellipsy e, přiřazenou bodu V'. Neboť obdržíme na př. její bod O_{μ} přiřazený úběžnému bodu ∞O na paprsku $V'M_s$ jako průsečík průměru o_s, sdruženého vzhledem k ellipse e ku směru $V'\infty O$, s kolmicí o_k, jež sestrojena jest bodem V' na $V'\infty O$; o_s a o_k jsou stopy roviny sdružené a roviny kolmé k paprsku $V\infty O$. I jeví se kuželosečka k_{μ} vskutku jako geometrické místo průsečíku průměru ellipsy e s kolmicí, jež sestrojena jest pevným bodem V' na průměr k němu sdružený. Průměr o_s sdružený k průměru $V'M_s$ sestrojen v obrazci pomocí affinity ellipsy e s kružnicí e_0, jež opsána jest nad velkou její osou AA_1 jako průměrem, a použito sdružených tečen t a t_0 v sdružených bodech B a B_0. Hyperbola k_{μ} prochází středem M_s, bodem V' a úběžnými body na osách ellipsy e, jak možno se snadno přesvědčiti z uvedeného jejího zákona výtvarného.

Sestrojíme-li průměr p_s ellipsy e, souměrný s jejím průměrem $V'M_s$ dle os, obdržíme na něm bod P_{μ} hyperboly jako průsečík s kolmicí p_k sestrojenou na průměr sdružený; ten však vzhledem k souměrnosti svírá s osami ellipsy e týž úhel jako průměr o_s sdružený ku $V'M_s$; i obdržíme jeho směr jako spojnici RS pravoúhlých průmětů bodu O_{μ} do os ellipsy e; $p_k \perp RS$ určí na p_s bod P_{μ}. Kružnice k opsaná obdélníku $M_sRO_{\mu}S$ prochází bodem V' ježto $\sphericalangle O_{\mu}V'M_s = 90^0$ a bodem P_{μ}, jak plyne z rovnosti obvodových úhlů

$\widehat{o_s o_k} = \widehat{p_s p_k}$ (dvěma obloučky označených) při vrcholech O_μ a P_μ, jež jsou doplňky úhlu uvažovaných dvou družin průměrů, souměrných dle osy AA_1.

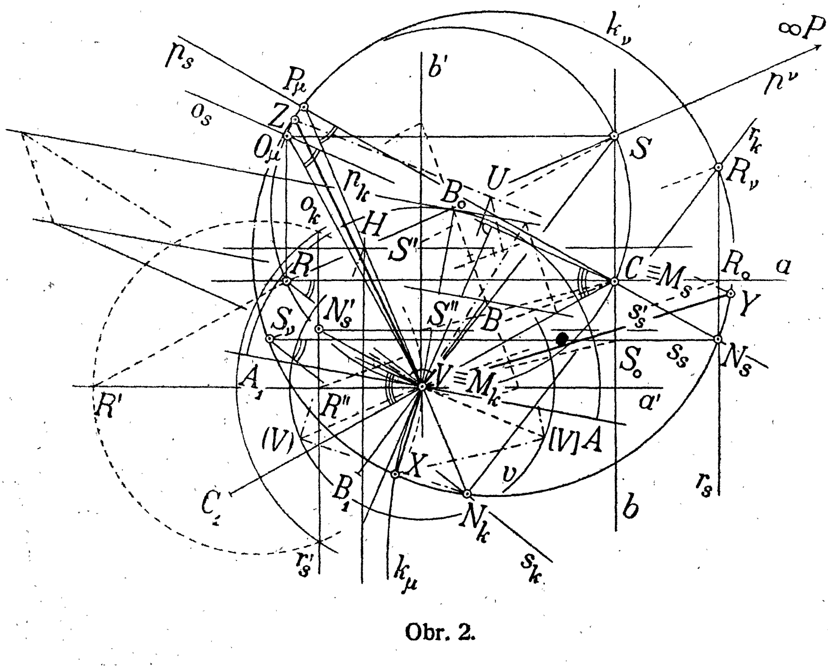
Úhlopříčna RS svírajíc s asymptotami hyperboly týž úhel jako tetiva $O_\mu M_s$ a půlíc tuto ve středu K jest průměrem hyperboly, sdruženým ku směru o_s. Vzhledem ke kružnici k půlí RS také tetivu $P_\mu V'$, ku které stojí kolmo, v bodě H; i jest $P_\mu V'$ nutně průměrem a H středem hyperboly. Tečna hyperboly v bodě V' svírá s jejími asymptotami týž úhel jako průměr $V'H$, t. j. hyperbola se dotýká v bodě V' kolmice spuštěné na o_s.

Volíme-li druhou rovinu ν, v níž pólový paprsek opisuje svazek, tím způsobem, že její stopa $p_\nu \equiv RS$, pak příslušná pomocná plocha kuželová má za stopu na nákresně kružnici k_ν. Vrcholem jednoho svazku kuželosečku k_ν vytvořujícího jest pól N_s stopy p^ν vzhledem k ellipse e; ten nachází se na průměru p_s sdruženém ku směru RS a na poláře $r_s \perp AA_1$ bodu R vzhledem ku e (a také e_0); polára s_s bodu S prochází pólem N_s kolmo na BB_1. Vrcholem druhého svazku s ním projektivního jest stopa N_k přímky $VN_k \perp \nu$, kterou sestrojíme pomocí sklopení pravoúhlého $\triangle HVN_k$ (VH jest spádová přímka roviny ν); sklopený (V) se nachází na distanční kružnici v. Přímky r_s a s_s jsou stopy rovin sdružených k paprskům VR a VS. Sestrojme ještě stopy r_k a s_k rovin vrcholových k nim kolmých; ty procházejí bodem N_k, $r_k \perp V'R$, $s_k \perp V'S$. Tím obdržíme dva body kuželosečky k_ν, t. j. $R_\nu \equiv r_s \,.\, r_k$ a $S_\nu \equiv s_s \,.\, s_k$. Úběžnému bodu ∞P na stopě p^ν jest přiřazen patrně bod $P_\nu \equiv P\mu$, jenž jest společným průsečíkem obou pomocných kuželoseček. Tím určili jsme pět bodů kuželosečky k_ν. Ježto $\sphericalangle RV'S = 90^0$ jako obvodový úhel nad průměrem kružnice k, jest i $r_k \perp s_k$, t. j. čtyřúhelník $N_s R_\nu N_k S_\nu$ má při vrcholech N_s a N_k pravé úhly, i lze mu opsati kružnici nad průměrem $R_\nu S_\nu$ o středu T. Tato kružnice jest stopou k_ν druhé pomocné plochy kuželové, ježto prochází i pátým bodem P_ν, což plyne z rovnosti úhlů obvodových na př. při vrcholech S_ν a P_ν (opět dvěma obloučky označených); patrně $\sphericalangle N_k S_\nu N_s = \sphericalangle V'RM_s$, ježto mají ramena rovnoběžna, a ten $= \sphericalangle V'P_\nu M_s$ jako obvodové úhly kružnice k nad tetivou $V'M_s$; $\sphericalangle V'P_\nu M_s$ jest úhlem $N_k P_\nu N_s$ a tedy $\sphericalangle N_k S_\nu N_s = \sphericalangle N_k P_\nu N_s$.

Stačí tedy sestrojiti druhý reálný průsečík hyperboly k_μ a kružnice k_ν jako stopu jedné osy dané plochy kuželové, což se stane přesně narýsovaným obloučkem hyperboly; ke konstrukci se hodí známá vlastnost hyperboly, že na libovolné její sečně jsou úseky mezi asymptotami a křivkou sobě rovny. Tím způsobem sestrojen v obrazci průsečík X (který se vpraví mezi dva body hyperboly). Rovina $YVZ \perp VX$ se sestrojí opět sklopením pravoúhlého $\triangle XVU$, kde U jest stopa spádové přímky, stopy Y a Z jsou na kružnici k_ν.

Skutečnou konstrukci os plochy kuželové možno ovšem zjednodušiti, jak ukážeme v obr. 3., kde sestrojeny současně osy ellipsoidů.

3. Proveďme obdobné úvahy pro sestrojení os trojosého ellipsoidu, jenž jest určen třemi sdruženými průměry AA_1, BB_1 a CC_1. Tečná rovina ve vrcholu C budiž nákresnou, na kterou sestrojíme kolmý průmět celého vztahu, diametrální řez e' o sdružených průměrech AA_1, BB_1 jest s nákresnou rovnoběžný (obr. 2). Průměty označeny jako útvary v prostoru. Střed V ellipsoidu určen opět distanční kružnicí, jejíž poloměr se rovná jeho vzdálenosti od nákresny.



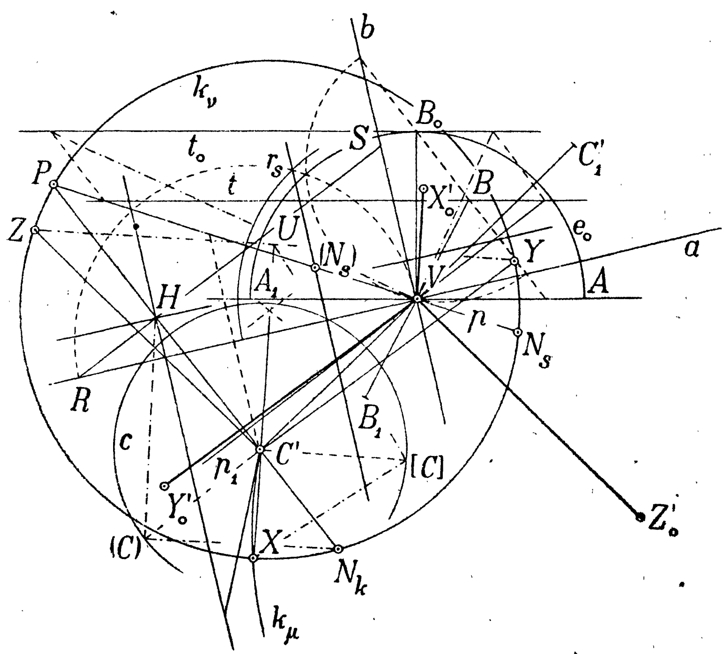
Obr. 2.

Pólový paprsek a sdruženou polární rovinu plochy kuželové nahradíme nyní průměrem a sdruženou rovinou diametrální ellipsoidu.

Opisuje-li průměr rovinu μ rovnoběžnou s nákresnou, opisuje jeho sdružená diametrální rovina rovinový svazek, jehož osou jest průměr VC a stopou na nákresně paprskový svazek o středu $M_s \equiv C$. Současně opisuje rovina kolmá na průměr rovinový svazek, jehož osou jest promítací paprsek středu a stopou na nákresně paprskový svazek o středu $M_k \equiv V$. Vzhledem k projektivnosti obou svazků o vrcholech M_s a M_k vytvořuje s jimi v nákresně opět kuželosečka a to Apolloniova hyperbola bodu V diametrálního řezu e', posunutého po trajektorii VC do polohy e do nákresny; neboť diametrální rovina, jež jest sdružena k některému průměru v rovině μ, prochází jeho průměrem sdruženým vzhledem k ellipse e'.

Sestrojme osy a', b' ellipsy e' na př. známou mechanickou konstrukcí: učiníme $VB_0 \perp VA$, $VB_0 = VA$ a opíšeme půlkružnici mající za střed půlící bod úsečky B_0B a procházející středem V, jež určí již na spojnici B_0B průsečíky s osami. Posuňme i tyto osy do rovnoběžných poloh a a b středem M_s v nákresně.

Sestrojme nyní Apolloniovu hyperbolu k_μ docela obdobně jako v odstavci předešlém, zvláště její bod O_μ na průměru o_s sdruženém ku spojnici VM_s (sestrojeno pro e' affinitou, jež má za družinu bodů BB_0) a bod P_μ na průměru p_s souměrném k téže spojnici



Obr. 3.

dle osy a. Pravoúhlé průměty R a S bodu O_μ do os a a b určí stopu p^ν roviny diametrální $\nu \equiv Vp_\nu$. Opisuje-li průměr ellipsoidu rovinu ν, pak příslušná pomocná plocha kuželová má opět za stopu na nákresně kružnici k_ν.

Vrcholem jednoho svazku kuželosečku k_ν vytvořujícího jest stopa N_s průměru sdruženého k rovině ν vzhledem k ellipsoidu. Tento průměr obdržíme jako průsečnici diametrálních rovin, sdružených ku průměrům VR a VS, a stopu N_s jako průsečík jich stop r_s a s_s. Abychom sestrojili na př. rovinu diametrální, jež jest sdružena k průměru VS, sestrojíme polární rovinu σ bodu S vzhledem k ellipsoidu; žádaná rovina diametrální jest s ní rovnoběžna. Rovina σ prochází pólem C nákresny, ježto S leží v nákresně, úběžným bodem na průměru a', jenž jest pólem diametrální roviny Sb', obsahující průměr VC, a bodem S'' na průměru b', jejž sestrojíme jako pól roviny, která prochází bodem S a jest rovnoběžna s rovinou diametrální Ca', sdruženou k b', a protíná průměr sdružený b' v bodu S'; $VS' = CS$. Body S' a S'' jsou na průměru b' vzhledem k ellipsoidu sdruženy, t. j. jsou sdruženy vzhledem k ellipse e', odkud plyne konstrukce bodu S''. Rovina σ má tedy za stopu přímku a a obsahuje přímku $s'_s \parallel a'$ a procházející bodem S'' a diametrální rovina s ní rovnoběžná protíná přímku b v bodě S_0, který obdržíme, učiníme-li $VS_0 \# S''C$; bodem S_0 prochází $s_s // a$. Obdobně sestrojili bychom stopu r_s; ostatně bod N_s se nachází i na stopě p_s diametrální roviny sdružené ku průměru $V\infty P // RS$.

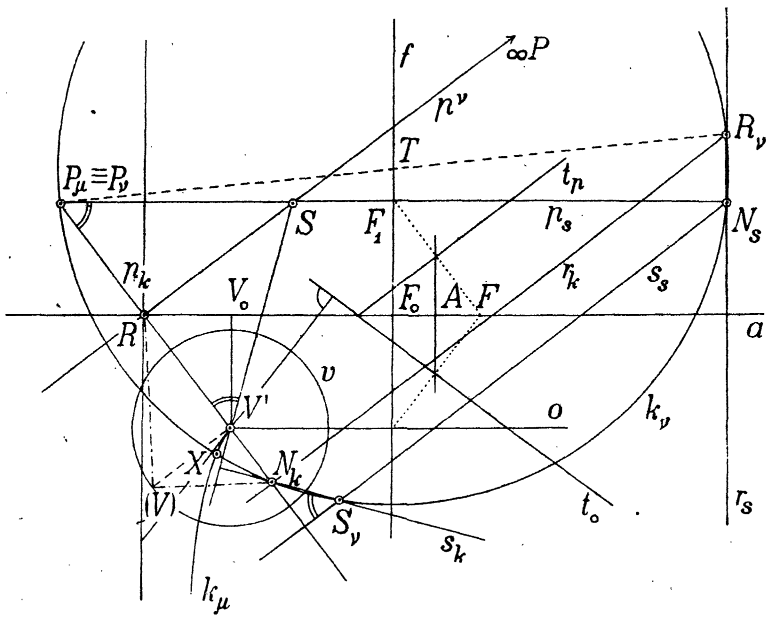
Vrcholem druhého svazku kružnic k_ν vytvořujícího jest stopa N_k přímky $VN_k \perp \nu$, kterou opět sestrojíme pomocí sklopení pravoúhlého $\triangle HVN_k$. Bodem N_k procházejí stopy r_k a s_k diametrálních rovin kolmých na průměry VR a VS, $r_k \perp VR$, $s_k \perp VS$. Kružnice k_ν prochází body $R_\nu \equiv r_s \,.\, r_k$ a $S_\nu \equiv s_s \,.\, s_k$ a bodem $P_\nu \equiv P_\mu$, jenž jest přiřazen průměru $V \infty P$. Že projektivně vytvořená kuželosečka k_ν jest kružnice, ukáže se týmž způsobem jako u plochy kuželové (rovností úhlů dvěma obloučky označených).

Osový stopní trojúhelník XYZ sestrojíme rovněž způsobem uvedeným v odst. 2.

4. Na základě provedených pozorování možno jednoduše s e s t r o j i t i o s y t r o j o s é h o e l l i p s o i d u p o m o c í k o n s t r u k c e o s j i s t é p l o c h y k u ž e l o v é. V obr. 2. jest totiž průsečík $N'_s \equiv r'_s \,.\, s'_s$ patrně pólem spojnice $R'S' // RS$ vzhledem k ellipse e' a bod N_s jest posunutá poloha jeho bodu protějšího na křivce; z posunutí po trajektorii VC plyne následující konstrukce:

Je-li dán ellipsoid středem V a třemi sdruženými průměry AA_1, BB_1 a CC_1, předpokládejme, že diametrální řez e o průměrech AA_1 a BB_1 leží v nákresně a vrchol C promítnut kolmo na nákresnu do bodu C' a určen distanční kružnicí c (obr. 3.). Sestrojujme osy kuželové plochy, jež určena jest ellipsou e a vrcholem C.

Sestrojíme osy ellipsy e uvedenou již konstrukcí, ku průměru $C'V$ sestrojíme její průměr p souměrný dle os a k tomu sdružený průměr p_1 pomocí affinity s kružnicí e_0 opsanou nad průměrem AA_1 a družiny tečen tt_0 v družině bodů BB_0 této affinity. Pak $C'P \perp p_1$ určí na p ten společný bod P pomocné hyperboly a kružnice, jímž neprochází osa kuželové plochy. Úsečka $C'P$ jest průměrem hyperboly a jeho osa souměrnosti prochází jejím středem H a jest přímkou RS. Sestrojme dále pól (N_s) přímky RS vzhledem k ellipse e (leží na průměru p a na poláře r_s bodu R, která sestrojena jako jeho polára pro kružnici opsanou nad její velkou osou) a stopu N_k normály CN_k na rovinu CRS (sklopením odchylkového trojúhelníku). Kružnice pomocná, určující na hyperbole k_μ stopy os plochy kuželové Ce, jest opsána trojúhelníku $P(N_s)N_k$. Sestrojíme-li však bod N_s protější na ellipse e bodu (N_s), tu kružnice k_ν opsaná trojúhelníku PN_sN_k určuje na téže hyperbole stopní trojúhelník XYZ, pravoúhlého trojhranu o vrcholu C, s nímž osy ellipsoidu jsou rovnoběžny. Trojúhelník XYZ sestrojen v obr. známým způsobem a osy ellipsoidu omezeny body X_o, Y_o a Z_o v rovině, která prochází bodem C rovnoběžně s nákresnou; na př. $VX_0 \# CX$ ve smyslu protivném.



Obr. 4.

Při sestrojování os hyperboloidu jednoplochého nebo dvojplochého, určeného třemi sdruženými průměry, se konstrukce nezmění podstatně; diametrální řez o průměrech sdružených AA_1 a BB_1 může býti hyperbolou a bod (N_s) jest pólem přímky RS vzhledem k ní.

5. Uvažujme ještě o kuželové ploše parabolické. Řídící parabola dána v nákresně ohniskem F a řídící přímkou f, vrchol V určen pravoúhlým průmětem V' na nákresnu a distanční kružnicí v (obr. 4.). Zachováme-li pokud možná označení z odst. 2., utváří se konstruktivní poměry následovně:

Sestrojme osu a a vrchol A paraboly, označme $F_o \equiv a \,.\, f$ a k průměru paraboly $o \,//\, a$, procházejícímu bodem V', sestrojme průměr p_s souměrný dle osy. Apolloniova hyperbola k_μ se jeví jako geometrické místo průsečíku průměru s kolmicí sestrojenou bodem V' na tečnu jemu sdruženou. Na průměru p_s obdržíme bod P_μ jako průsečík s kolmicí p_k, kterou sestrojíme bodem V' na tečnu t_p, sestrojenou k parabole v jejím průsečíku s průměrem p_s; i jest bod P_μ přiřazen k pólovému paprsku, jenž prochází bodem ∞P na t_p. Střed hyperboly Apolloniovy jest na ose a paraboly, která jest jednou její asymptotou, jak plyne již z vytvořovacího zákona. Střed hyperboly půlí zase tetivu $V'P_\mu$ a jest totožný s bodem R. Označíme-li F_1 bod na řídící přímce f souměrný k ohnisku F dle tečny t_p, t. j. $F_1 \equiv f \cdot p_s$, a je-li dále V_o pata kolmice spuštěné bodem V' na osu, jest patrno ze vztahu $\Delta\, V'RV_o \cong \Delta\, F_1FF_o$, že $V_oR = FF_o$ v témž smyslu; přeneseme-li tedy parametr paraboly od bodu V_o ve smyslu FF_o, obdržíme střed R hyperboly. Přímkou p_ν, která přiřazena jest známým způsobem k pomocné kružnici k_ν, jest průměr hyperboly kolmý k průměru $V'P_\mu$, $p^\nu \,//\, t_p$. Že k_ν jest vskutku kružnicí, ukážeme pomocí bodu $F_\nu \equiv P_\mu$, bodu R a průsečíku $S \equiv p^\nu \cdot p_s$. K pólovému paprsku VR jest sdružena polární rovina, mající stopu r_s, a rovina kolmá se stopou r_k; stopa r_s prochází pólem N_s přímky p^ν vzhledem ku parabole, která na průměru p_s půlí úsečku SN_s; bod N_k, stopu to přímky $VN_k \perp \nu$, obdržíme opět sklopením odchylkového trojúhelníku, stopou N_k prochází $r_k \,//\, p^\nu$ a určuje na stopě r_s bod R_ν křivky. Pólový paprsek VS má sdruženou rovinu polární, jejíž stopa $s_s \,//\, p^\nu$ a rovinu kolmou, jejíž stopa $s_k \perp V'S$. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $N_s R_\nu N_k F_\nu$, jenž má pravé úhly při vrcholech N_s a N_k, prochází i bodem S_ν, jak plyne z rovnosti úhlů dvěma obloučky označených, i jest křivkou k_ν známým způsobem projektivně vytvořenou. Střed T této kružnice jest průsečíkem průměru $P_\nu R_\nu$ s přímkou řídící, což plyne odtud, že vrchol A půlí vzdálenost $R \dashv r_s$.

Osový stopní trojúhelník se sestrojí průsečíkem X kružnice a hyperboly a dále jako v případech dřívějších. Hyperbola k_μ se dotýká v bodě V' kolmice sestrojené na tečnu t_o, jež jest sdružena k průměru o paraboly.

Ve skutečnosti sestrojil by se střed R pomocí parametru, bod P_μ na průměru p_s, bod N_s pomocí poláry r_s a bod N_k sklopením odchylkového trojúhelníku.

Jediná osa paraboloidu elliptického nebo hyperbolického, známe-li směr jejich průměrů, se sestrojí nejlépe pomocí průseku rovinou, která stojí na směr průměrů kolmo; středem tohoto řezu prochází osa. Pro elliptický paraboloid jest tento normálný řez homothetický s kolmým průmětem libovolného řezu elliptického na tuto rovinu Při hyperbolickém paraboloidu sestrojujeme pak rovinu tečnou, jež jest kolmá na průměr; dotyčný její bod jest vrcholem plochy.

*

Le problème des axes des surfaces du second ordre.

(Extrait de l'article précédent.)

Si l'on ne dispose d'aucune conique précisément dessinée, on construit ordinairement les axes d'un cône du second ordre à l'aide d'une hyperbole équilatère d'Apollonius, et d'un cercle dont les points d'intersection nous offrent, dans le plan de la directrice, les pieds du trièdre trirectangle des axes. Chaque cône, concentrique au cône donné et ayant une de ces deux coniques auxiliaires pour sa directrice, est le lieu des droites orthogonales conjuguées à un faisceau, dont le centre se trouve au sommet du cône.

Dans cet article on donne une simple construction projective de ce cercle auxiliaire dans le problème des axes de la quadrique; on suppose que la directrice du cône possède un centre, ou bien qu'elle n'en possède pas. Outre cela l'auteur construit les axes d'un ellipsoïde (et, par suite, de deux hyperboloïdes) donné par trois diamètres conjugués, à l'aide d'un cône auxiliaire ayant une des sections diamétrales données pour directrice et l'extrémité du diamètre conjugué pour sommet.

Užití kotovaného promítání v nomografii.

Napsal V. *Láska.*

Při přechodu od tří ke čtyřem argumentům jest na snadě užití method deskriptivní geometrie, jež řeší prostorové problémy konstrukcemi v rovině. Z jejích method hodí se zvláště methoda kotovaného promítání k applikaci nomografické.

Je-li možno na př. rovnici

$$F(a, b, c, d) = 0$$

dáti tvar

$$f_1(a) \, . f_4(d) + f_2(b) \; \varphi_4(d) + f_3(c) \; \psi_4(d) + \chi_4(d) = 0$$

a položíme-li

$$x = f_1(a), \quad y = f_2(d), \quad z = f_3(c),$$

můžeme krátce psáti

$$x \, . f_4(d) + y \, . \, \varphi_4(d) + z \, . \, \psi_4(d) + \chi_4(d) = 0.$$

To jest však rovnice roviny, jejíž stopu v rovině $[XY]$ určuje přímka

$$x \, . f_4(d) + y \, . \, \varphi_4(d) + \chi(d) = 0.$$

Tuto rovinu zobrazujeme v kotovaném promítání kotovanou přímkou kolmou k její stopě.

Odvodíme jednoduchý příklad takovéto applikace.