Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Emil Weyr

O rovinných racionálních křivkách třetího stupně. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 5, 193--199

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123237

O rovinných racionálních křivkách třetího stupně.

(Podává Dr. *Emil Weyr.*)

(Dokončení.)

Podmínka, kterou jsme vyvinuli pro parametry tří na přímce ležících bodů u_1, u_2, u_3 racionalní kubické křivky, může se rozšířiti na průseky libovolné křivky s naší racionální křivkou třetího stupně. V nejvšeobecnější formě má pak dotýčná věta znění následující:

„*Součin parametrů všech průseků racionální křivky třetího stupně s libovolnou křivkou n-tého stupně rovná se n-té mocnosti jisté stálé, pouze na křivce třetího stupně závislé veličiny*“.

Jsou-li tedy $u_1 u_2 u_3 \ldots\ldots u_{3n}$ parametry $3n$ průseků naší kubické křivky C_3 s libovolnou křivkou $C_n n$-tého stupně a K hodnota oné, pouze na křivce C_3 závislé stálé, máme

$$u_1 u_2 u_3 u_4 \ldots u_{3n-1} u_{3n} = K^n. \tag{8}$$

Pro $n = 1$ obdržíme z této rovnice opět podmínku pro tři body na přímce:

$$u_1 u_2 u_3 = K. \tag{8'}$$

Důkaz rovnice (8) můžeme podati buď bezprostředně pomocí analytické geometrie aneb ryze geometricky z rovnice (8') pro $n = 1$ již dokázané, postupujíce k případu $n = 2$, $n = 3$ atd.

Začněmež důkazem přímým.

Určíme-li tečny bodu dvojného za osy souřadnic rovnoběžných, tak zní rovnice naší křivky C_3:

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 2Fxy = 0\text{*)}$$

*) Viz týž ročník str. 33.

a pomocí parametru u, vyjadřují se souřadnice x, y libovolného bodu rovnicemi:

$$x = \frac{-2Fu}{A + 3.Bu + 2Cu^2 + Du^3}$$

$$y = \frac{-2Fu^2}{A + 3Bu + 3Cu^2 + Du^3}$$

Rovnice libovolné křivky C_n n-tého stupně, seřaděná dle klesajících mocností úsečky x, zní:

$$a_0 x^n + (b_0 + b_1 y)x^{n-1} + (c_0 + c_1 y + c_2 y^2)x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots p_n y^n) = 0.$$

Chceme-li nyní určiti parametry průseků křivky C_3 s křivkou C_n, tak patrně musíme vložiti z hořejších rovnic plynoucí hodnoty za x a y do rovnice poslední; označíme-li čtyřčlen

$$A + 3Bu + 3Cu^2 + Du^3$$

k vůli větší krátkosti písmenou U, tak obdržíme po této substituci:

$$a_0 \frac{(-2F)^n u^n}{U^n} + \left(b_0 + b_1 \frac{(-2F)u^2}{U}\right)\frac{(-2F)^{n-1}u^{n-1}}{U^{n-1}} + \ldots.$$
$$\ldots + \left(p_0 + p_1 \frac{(-2F)u^2}{U} + p_2 \frac{(-2F)^2 u^4}{U^2} + \ldots.\right.$$
$$\left. + \ldots . p^n \frac{(-2F)^n u^{2n}}{U^n}\right) = 0.$$

Násobíme-li hodnotou U^n celou rovnici, tak obdržíme:

$$a_0(-2F)^n u^n + (b_0 U + b_1 (-2F) u^2) + \ldots$$
$$.. + (p_0 U^n + p_1 (-2F) U^{n-1} u^2 + \ldots p_n (-2F)^n u^{2n}) = 0.$$

Jelikož:

$$U = A + 3Bu + 3Cu^2 + Du^3$$

tedy jest poslední rovnice stupně $3n$-tého na důkaz, že skutečně křivka C_n protíná křivku C_3 v $3n$ bodech.

Urovnáme-li poslední rovnici dle u, tak shledáme snadně, že součinitel nejvyšší mocnosti u^{3n} jest $p_0 C^n$, a absolutní (u neobsahující) člen že jest: $p_0 A^n$, tak že rovnice jest tvaru:

$$p_0 C^n u^{3n} + \alpha u^{3n-1} + \ldots . . \pi . u + p_0 A^n = 0$$

z čehož dle známých vlastností vyšších rovnic jde:

$$u_1 . u_2 . u_3 \ldots . . u_{3n} = (-1)^{3n} . \frac{p_0 A^n}{p_0 C^n} = \left(-\frac{A}{C}\right)^n,$$

jsou-li u_1 $u_2 \ldots u_{3n}$ kořeny poslední rovnice, t. j. parametry průseků křivky C_3 s křivkou C_n.

Jelikož stálé A, C pouze na křivce C_3 závisí, tedy jest:

$$-\frac{A}{C}=K$$

hodnota pouze na C_3 závislá a máme v skutku rovnici všeobecnou

$$u_1 u_2 u_3 \ldots u_{3n} = K^n \ldots . \qquad (8)$$

Mysleme si nyní svazek kuželoseček, procházejících čtyřmi libovolnými body u_1, u_2, u_3, u_4 křivky C_3; každá křivka C_2 tohoto svazku protne C_3 v dálších dvou bodech u_5, u_6 a jelikož kuželosečka již pěti body určena jest, tedy určuje každý z obou bodů u_5, u_6 úplně bod druhý.

Každému bodu u_5 odpovídá tudíž jediný úplně určitý bod u_6 a souvislost těchto dvou bodů jest patrně involutorní, t. j. body u_5 u_6 sobě výměnlivě přísluší, neb kuželosečka svazku, procházející bodem u_6 co bodem pátým, protne patrně C_3 v bodě u_5 co v bodě šestém.

Jedna z kuželoseček svazku prochází však bodem dvojným křivky C_3, kterou protíná v bodech bodu dvojnému nekonečně blízkých, které tedy též sobě přísluší. Mezi parametry u_5, u_6 bude tudíž platiti taková symetrická rovnice prvního stupně co do u_5 a co do u_6, které též vyhovují i hodnoty $u_5 = \infty \, u_6 = 0$ co sobě příslušné, neb ∞ a 0 jsou parametry bodu dvojného. Rovnice ta jest tudíž tvaru

$$u_5 u_6 = const. \, *)$$

Třetí průsek u přímky $\overline{u_5 u_6}$ s křivkou C_3 plyne z rovnice (8′) t. j.

$$u = \frac{K}{u_5 u_6}$$

a jelikož $u_5 u_6$ jest hodnota stálá, tedy i u jest hodnota stálá t. j. bod u jest pevným bodem křivky C_3; máme tedy větu:

„*Kuželosečky procházející čtyřmi pevnými body u_1, u_2, u_3, u_4 racionální křivky C_3 stupně třetího, určují na této křivce páry dalších průseků u_5, u_6, které se nalezají na paprscích pevným bodem u křivky C_3 procházejících.***)

---

*) Viz též: „Základové vyšší geometrie I. díl str. 101.

**) Porovnej poslední theorem na str. 38.

Mezi kuželosečkami, body u_1, u_2, u_3, u_4 procházejícími, jest též pár přímek $\overline{u_1u_2}$, $\overline{u_3u_4}$ obsažený; jsou-li u'_5, u_6' třetí průseky těchto dvou přímek s křivkou C_3, tedy máme

$$u'_5 = \frac{K}{u_1u_2} \quad u'_6 = \frac{K}{u_3u_4}$$

aneb

$$u'_5u'_6 = \frac{K^2}{u_1u_2u_3u_4}$$

z čehož plyne, že

$$\frac{K^2}{u_1u_2u_3u_4} = const.$$

a tedy máme:

$$u_5u_6 = \frac{K^2}{u_1u_2u_3u_4}$$

aneb

$$u_1u_2u_3u_4u_5u_6 = K^2.$$

Tím dokázána platnost naší všeobecné věty pro případ $n = 2$.

I pro případ $n = 3$ můžeme všeobecnou naši větu stvrditi, použijeme-li známého theoremu: „že veškeré křivky třetího stupně osmi body pevnými procházející, procházejí též devátým pevným bodem.*)

Máme-li svazek křivek třetího stupně, procházejících sedmi body u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 naší křivky C_3 a libovolným osmým bodem a mimo C_3 ležícím, protne každá křivka tohoto svazku křivku C_3 v dvou dálších bodech u_8, u_9, z kterýchž opět jest každý involutórně určen druhým; a jelikož jedna z křivek svazku prochází dvojným bodem křivky C_3, máme opět mezi u_8 a u_9 relaci:

$$u_8u_9 = const.$$

poněvadž i zde hodnoty ∞, 0, sobě co příslušné odpovídají.

Přímka $\overline{u_8u_9}$ prochází tedy i v tomto případě pevným bodem u křivky C_3. Jelikož dle podotknuté věty veškeré křivky třetího stupně, procházející osmi body u_1, u_2 .. u_7, u_8, musí též bodem u_9 procházeti, tedy si vrchol a, mimo křivky C_3 ležící, můžeme zcela dle libovůle zvoliti; dejme tomu, že se a nalezá na přímce $\overline{u_6u_7}$ a zvolme co bod u_8, třetí průsek u_8' křivky C_3 s přímkou u_6u_7.

*) Viz: Cremonův „Úvod do geometrické theorie křivek rovinných“ str. 74.

Křivka svazku, odpovídající bodu u_8' rozpadne se na přímku $u_6u_7u_8'$, poněvadž tato mimo těchto tří bodů i čtvrtý bod a obsahuje, a na kuželosečku $u_1u_2u_3u_4u_5$, která C_3 protne v bodě u_9', bodu u_8' odpovídajícím.

Nyní jest dle dřívějšího

$$u_1u_2u_3u_4u_5u'_9 = K^2$$
$$u_8'u'_9 = const.$$

ale též

$$u_6u_7u_8' = K$$

tudíž

$$u_8'u_9' = \frac{K^3}{u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7} = const.$$

z čehož jde všeobecně

$$u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9 = K^3.$$

Obdobnými úvahami lze větu i pro $n = 4$, $n = 5$ atd. dokázati.

Z předcházejících vět můžeme vyvinouti množství jiných; zejmena lze na základě dřívějšího dokázati takřka veškeré theorémy, týkající se soustav bodů na racionálních křivkách třetího stupně se nacházejících.

Z množství vět se vyskytujících vyjímáme jen následující, částečně pro veškeré (i neracionální) kubické křivky platící:

„*Proložíme-li třemi body u_1, u_2, u_3 křivky C_3 na přímce ležícími libovolné tři přímky, protnou nám tyto C_3 v dalších šesti bodech na kuželosečce ležících*“.

Buďtež P_1, P_2, P_3 přímky, body u_1, u_2, u_3 procházející, a u_1', u_1'', u_2', u_2'', u_3', u_3'' jich další průseky s křivkou C_3. Tu máme tedy rovnice

$$u_1u_2u_3 = K \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} u_1u_1'u_1'' &= K \\ u_2u_2'u_2'' &= K \\ u_3u_3'u_3'' &= K \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Dělíme-li součin posledních tří rovnic rovnicí první, obdržíme

$$u_1'u_1''u_2'u_2''u_3'u_3'' = K^2 \qquad (\gamma)$$

čímž věta dokázána jest.

Jelikož naopak z rovnic (β) a (γ) plyne rovnice (α) tedy máme i obrácenou větu:

„Protneme-li C_3 libovolnou kuželosečkou v šesti bodech, a spojíme-li vždy dva z těchto šesti průseků přímkou, obdržíme tři přímky protínající C_3 v třech na přímce ležících bodech“.

Splynou-li body u_1' u_1'', u_2' u_2'', u_3' u_3'', přejdou přímky $\overline{u_1'u_1''}$, atd. v tečny křivky C_3 v třech bodech, v kterýchž se této křivky jistá kuželosečka dotýká; body u_1, u_2, u_3 jsou pak body tangenciální bodů u_1', u_2', u_3', máme tedy větu:

„Dotýká-li se kuželosečka v bodech u_1', u_2', u_3' křivky C_3, nalezají se tangenciální body u_1, u_2, u_3 bodů styku na přímce“.

Přejde-li kuželosečka v dvé splývajících přímek, obdržíme nám již známý theorém na str. 36.

Představují-li dvě různé přímky kuželosečku, obdržíme theorém stránky 37.

Dejme tomu, že body u_1, u_2, u_3 na přímce ležící splynou t. j. že u_1 se stane bodem obratu. Tu pak přímky P_1, P_2, P_3 jsou libovolné tři přímky bodem obratu proložené; máme tedy větu:

„Tři libovolně bodem obratu proložené přímky protínají křivku C_3 v šesti. na kuželosečce se nalezajících bodech“.

Splynou-li dvě z přímek P_1, P_2, P_3, na př. P_2 a P_3, splyne bod u_2' s bodem u_3' a u_2'' s bodem u_3''; t. j. kuželosečka šesti průseky procházející bude míti s C_3 v bodech u_2', u_2'' styk dvojbodný (jednoduchý).

Splynou-li všecky tři přímky v P_1, splynou jak body u_1', u_2', u_3', tak i body u_1'', u_2'', u_3'' t. j.:

„V průsecích u_1', u_1'' s přímkou procházející bodem obratu má křivka C_3 trojbodové styky s jistou kuželosečkou“.

Stane-li se mimo to P_1 tečnou křivky v bodě u_1', splyne v bodě tom všech šest bodů, t. j.:

„V bodech, jichž tečny procházejí body obratu, má křivka C_3 s jistými kuželosečkami styk šestibodový“.

Poněvadž C_3 má tři body obratu, a každým, mimo tečny obratu, prochází jen jediná další tečna, obdržíme celkem *tré* takových kuželoseček šestibodového styku.

Jsou-li opět u_1, u_2, u_3 libovolné, na přímce ležící tři body křivky C_3 a P_1, P_2, P_3 přímky spojující je s týmž bodem u_1''

křivky C_3, pak zahrnuje bod u_1'' též body u_2'', u_3'' a všecky tři tyto body nalezají se s třetími průseky u_1', u_2', u_3' křivky C_3 a přímek P_1, P_2, P_3 na též kuželosečce; t. j. jinými slovy: kuželosečka procházející body u_1, u_2, u_3 a dotýkající se křivky C_3 v bodě u_1'', má v bodě tom s křivkou C_3 styk trojbodový.

O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení.

(Píše *K. Zahradník.*)

(Dokončení.)

Upotřebení.

16. *Má se určiti podmínka, vedle které tři body na stranách trojúhelníku leží na přímce.*

Budiž $a_1 a_2 a_3$ daný trojúhelník, na jehož stranách $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$ $\overline{a_3 a_1}$ zvoleny posloupně body b_3, b_1, b_2. Jsou-li $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ rovnice jeho vrcholů a_1, a_2, a_3, budou rovnice bodů b_k jež obecně B_k označiti chceme

$$B_1 \equiv U_2 - \lambda_1 \ U_3 = 0,$$
$$B_2 \equiv U_3 - \lambda_2 \ U_1 = 0,$$
$$B_3 \equiv U_1 - \lambda_3 \ U_2 = 0.$$

Znásobíme-li druhou rovnici λ_1, třetí $\lambda_1 \lambda_2$ a sečteme-li je, obdržíme

$$(1 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \ U_2 = 0 \equiv B_1 + \lambda_1 \ B_2 + \lambda_1 \lambda_2 \ B_3,$$

tudíž dle čl. (8) třeba, by

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1,$$

aneb přejdeme-li ku geometrickému významu koefficientu λ (čl. 5.), obdržíme (obr. 20).

$$\frac{a_2 b_1 \, . \, a_3 b_2 \, . \, a_1 b_3}{a_3 b_1 \, . \, a_1 b_2 \, . \, a_2 b_3} = 1,$$

relaci to, vyjádřující nám větu *Menelaovu: Rozdělují-li tři body*