Bohumil Bydžovský
Příspěvek k theorii cyklických projektivností

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 3, 281--295

Příspěvek k theorii cyklických projektivností.

Píše **B. Bydžovský**.

1. Cyklická projektivnost n-ho st. seřazuje všechny elementy daného útvaru ve skupiny, obsahující obecně n elementů, které budeme nazývati cykly. Ježto projektivnost je určena třemi dvojicemi sdružených elementů, je jasno, že pro $n > 3$ není cyklus skupina elementů zcela libovolná, nýbrž určitým způsobem specialisovaná. V následujícím je řešena úloha, nalézti podmínky, jimž musí vyhovovati skupina n elementů, aby tvořila cyklus v cyklické kollineaci n-ho st.

2. Tvoří-li n elementů cyklus v cyklické projektivnosti n-ho st., existuje právě n involucí, jimiž se tento cyklus reprodukuje. Důkaz toho podal ponejprve Lüroth[1]) uvažuje cyklickou projektivnost v křivé řadě na kuželosečce.

Připomeneme nejprve důkaz Lürothův. Opírá se o tuto větu: je-li na kuželosečce dána bodová projektivnost

$$XYZU \ldots \;\barwedge\; X'Y'Z'U' \ldots$$

leží body $(XY', X'Y)$; $(XZ', X'Z)$; $(YZ', Y'Z)$ atd. na téže přímce, t. zv. ose projektivnosti.[2]) Budiž dána projektivnost cyklická v n-tém stupni a řada bodů

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-2},\ A_{n-1}$$

jeden její cyklus; tyto body jsou psány tak, že projektivností každý přejde v následující, bod A_{n-1} v A_0. Můžeme obecněji říci: užijeme-li dané projektivnosti k-kráte, přejde bod A_h v bod A_{h+k}; jestliže $h+k$ přesáhne $n-1$, znamená to, že jsme pře-

1) Math. Ann. Sv. 11., str. 84. V. také Sturm, »Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften« sv. I., str. 189.

2) V. Weyr: »Projektivná geometrie atd.« str. 110.

kročili element A_{n-1} a začínáme znovu elementem A_0, čili: připustíme indexy libovolně velké, ale s podmínkou, že dva elementy jen tehdy jsou různé, nejsou-li jich indexy kongruentní dle modulu n. Je tedy $A_n \equiv A_0$, $A_{n+1} \equiv A_1$ a t. d. Podobně: užijeme-li inversní projektivnosti, přejde každý element v předcházející; obecně: užijeme-li jí k-kráte, přejde element A_h v element A_{h-k}. Vyjde-li $h-k$ záporné, značí to, že jsme při zpětném postupu překročili element A_0 a že pokračujeme od A_{n-1}. Index učiníme kladným přidáním násobku n; je tedy na př. $A_{-1} \equiv A_{n-1}$. atd. Užijme projektivnosti jednou; řada bodů

$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}$ přejde v řadu

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_0$.

Užitím citované věty nabudeme výsledku, že spojnice $\overline{A_0 A_{n-1}}$ a $\overline{A_1 A_{n-2}}$ protínají se na ose projektivnosti v bodě S_{n-1}. Z téhož důvodu $\overline{A_1 A_{n-2}}$, $\overline{A_2 A_{n-3}}$ se protínají na ose projektivnosti, a ovšem v témže bodě S_{n-1}; podobně $\overline{A_2 A_{n-3}}$ a $\overline{A_2 A_{n-4}}$ atd., obecně: spojnice $\overline{A_k A_{n-(k+1)}}$, $\overline{A_{k+1} A_{n-(k+2)}}$ se protínají v bodě S_{n-1} pro každé k. Jinými slovy: spojnice všech dvojic bodových, jichž indexy dávají součet $n-1$, procházejí týmž bodem S_{1-n}. To však znamená, že tyto dvojice tvoří dvojice involuce indukované na kuželosečce bodem S_{n-1}; tím je nalezena jedna involuce, kterou se reprodukuje cyklus n elementů.

Zcela stejně shledáváme, že $\overline{A_0 A_{n-2}}$ a $\overline{A_1 A_{n-3}}$, $\overline{A_1 A_{n-3}}$ a $\overline{A_2 A_{n-4}}$ atd., vůbec spojnice bodů, jichž indexy dávají součet $n-2$, procházejí týmž bodem S_{n-2}, čímž nabýváme druhé involuce, jež daný cyklus reprodukuje. Ježto můžeme A_0 spojovati se všemi body od A_{n-1} do A_0, obdržíme celkem n involucí, jimiž se cyklus reprodukuje; středy těchto involucí leží na ose projektivnosti. V určité involuci jsou sdruženy takové dvojice bodové, jichž indexy dávají týž součet. Je patrno, že tento součet rovná se některé z n hodnot

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1 \quad \mathrm{mod}\ n.$$

Na př. spojnice $\overline{A_0 A_0}$ (t. j. tečna k A_0) a $\overline{A_1 A_{n-1}}$ procházejí bodem S_0. Je totiž $n - 1 + 1 \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ n$ atd.

Potud Lürothův důkaz. Je zřejmo, že platí pro každý útvar prvého řádu.

3. Pro další úvahy je třeba doplniti tento důkaz určením samodružných elementů nalezených n involucí. K tomu cíli rozeznávejme dva případy: n liché, n sudé.

I. n liché. Označme J_k involuci příslušnou k součtu indexů rovnému k. V této involuci jsou sdruženy elementy

$$A_0, A_k; A_1, A_{k-1}; A_2, A_{k-2}; \ldots, A_h, A_{k-h}.$$

Je otázka, může-li některá tato dvojice se skládati z týchž dvou elementů; jinými slovy, existuje-li index h, pro který

$$A_h \equiv A_{k-h}.$$

I musí buď

$$h = k - h$$

nebo

$$h = k - h + n$$

t. j. buď

$$2h = k$$

nebo

$$2h = k + n.$$

Prvý případ je možný, je-li k sudé; pak

$$h = \frac{k}{2}$$

a druhý případ je nemožný, ježto $k + n$ je liché.

Druhý případ je možný, je-li k liché, ježto pak $k + n$ je sudé a

$$h = \frac{k+n}{2}.$$

Je tedy patrno, že lze pro každé k nalézti právě jeden index h, pro který

$$A_h \equiv A_{k-h}.$$

Element A_h je ovšem samodružný v příslušné involuci; když k probíhá všechny hodnoty od 0 do $n-1$, nabývá h také n různých hodnot, totiž:

$$0, \frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+2}{2}, 2, \ldots, n-1, \frac{n-1}{2};$$

i máme výsledek:

Pro n liché je každý element cyklu samodružným elementem v jedné z n involucí J_k; a sice je A_h samodružný v involuci J_{2h}, kde index $2h$ ovšem zase béřeme modulo n. Naopak je jeden samodružný element každé involuce J_k obsažen v cyklu, druhý je mimo něj.

Názorněji lze vysloviti tento výsledek takto:

Cyklus n elementů, příslušný n-árně cyklické projektivnosti pro n liché vyznačuje se tou vlastností, že vytkneme-li libovolný jeho element, lze zbývající seskupiti ve dvojice, jež všechny oddělují tento element harmonicky od téhož pevného elementu, ležícího mimo cyklus.

To lze ovšem učiniti n způsoby.

4. — II. n sudé. V involuci J_k je samodružný element A_h, pro který platí

$$A_h \equiv A_{k-h}.$$

I musí zase buď $h = k - h$

t. j. $2h = k$

nebo $h = k - h + n$

t. j. $2h = k + n.$

Prvý případ je možný pro k sudé; ale pak je možný také druhý. Pro k liché není možný žádný z nich. Když k nabývá všech sudých hodnot — celkem v počtu $\frac{n}{2}$ —

$$0, 2, 4, \ldots, n-2,$$

nabývá h všech n hodnot, totiž $\frac{n}{2}$ kráte po dvou:

$$0, \frac{n}{2}; \; 1, \frac{n+2}{2}; \ldots; \frac{n-2}{2}, \frac{2n-2}{2}.$$

Nabyli jsme výsledku:

Pro n sudé je každý element cyklu samodružným elementem v jedné z n involucí J_k; a sice je A_h samodružný v involuci J_{2h}. Naopak jen taková involuce J_k, pro niž k je sudé, má samodružné elementy v cyklu, a to oba; samodružné elementy involuce J_k pro k liché leží mimo cyklus.

Názorněji lze vysloviti tento výsledek takto:

Cyklus n elementů příslušný n-árně cyklické projektivnosti pro n sudé vyznačuje se tou vlastností, že lze jej seřaditi ve dvojice takové, že jedna z nich odděluje harmonicky všechny *ostatní; to lze učiniti $\frac{n}{2}$ způsoby. Právě tolika způsoby lze cyklus rozvrhnouti ve dvojice harmonicky sdružené dle téže pevné dvojice ležící mimo cyklus.*

Pozorujeme, že pro n liché existuje jediný druh involucí, kdežto pro n sudé existují dva druhy. Involuci, mající samodružné elementy v cyklu, nazveme involucí prvého druhu; involuci, mající samodružné elementy mimo cyklus, involucí druhého druhu.

II.

5. V předchozích větách jsou vyjádřeny nutné podmínky pro to, aby skupina elementů tvořila cyklus. Obrátíme se nyní ke zkoumání dostačujících podmínek.[1])

Budiž dána skupina n elementů, která se reprodukuje n involucemi J_k toho druhu, jaké jsme poznali v předchozím. Tážeme se, zdali v tom případě skupina tvoří cyklus. Označíme libovolný z daných elementů A_0 a další postupně $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ tak, jak po sobě následují v jednom přirozeném cyklickém pořadu [2]), daném v útvaru.

I. n liché. Z daných involucí vybereme dvě: jednu zcela libovolnou, tu označíme J_0, čímž je řečeno, že její samodružný element označíme A_0. Ona převádí A_1 v A_{n-1}, A_2 v A_{n-2}, obecně A_h v A_{n-h}. Jako druhou involuci zvolíme J_2, tedy již zcela určitou. Tato převádí A_h v $A_{n-(h-1)}$ a má samodružný element $A_{\frac{n+1}{2}}$.

Utvořme projektivnost $\alpha \equiv J_0 J_1$ a užijme jí na element A_0:

$$A_0 \ldots (J_0) \ldots A_0 \ldots (J_1) \ldots A_1$$

[1]) Touto úlohou se Lüroth nezabýval. Rovněž Sturm, který v uvedené již knize věnuje mnoho místa studiu cyklických kollineací, neklade si tuto úlohu obecně. Ukazuje však, že pro $n = 4$ stačí jedna, pro $n = 5$ určité dvě involuce, pro $n = 6$ určité tři »harmoničnosti« pro to, aby skupina elementů tvořila příslušný cyklus. Z těchto příkladů mohlo by se usuzovati, že počet involucí, tvořící dostatečné podmínky, mění se s rostoucím n; že tomu tak není, vysvitne z výkladu v textu.

[2]) V. Enriques: »Vorlesungen über projektive Geometrie« str. 17.

(tím rozumíme: A_0 přejde involucí J_0 v A_0, involucí J_1 v A_1); opakujme totéž pro A_1:

$$A_1 \ldots (J_0) \ldots A_{n-1} \ldots (J_1) \ldots A_2$$

a tak pokračujme:

$$A_2 \ldots (J_0) \ldots A_{n-2} \ldots (J_1) \ldots A_3$$

obecně

$$A_h \ldots (J_0) \ldots A_{n-h} \ldots (J_1) \ldots A_{h+1},$$

neboť $n - (n - h - 1) = h + 1$.

Tak tedy projektivnost α převádí každý element skupiny v sousední, čili vyměňuje tyto elementy cyklicky. Je tedy α projektivnost, mající cyklus $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$; avšak projektivnost, mající jeden cyklus n elementů, je n-árně cyklická. [1]) Tvoří tedy daná skupina cyklus v n-árně cyklické projektivnosti.

6. Vidíme tedy, že existence n involucí zpředu uvedených také stačí k tomu, aby skupina n elementů tvořila cyklus. A více než to: již existence dvou z těchto involucí stačí. Ovšem ze zvolených dvou involucí jen jedna, totiž J_0, je zcela libovolná. J_1 závisela již na volbě J_0.

Položme si tedy úlohu obecnější: je dána skupina n elementů, jež se reprodukuje dvěma libovolnými involucemi; má se rozhodnouti, jak dalece existence těchto involucí stačí k tomu, aby skupina tvořila cyklus.

Ježto n je liché, musí každá z daných involucí míti jeden samodružný element v dané skupině; druhý mimo ni. Samodružný element jedné té involuce označme A_0 a involuci samu J_0. Ostatní elementy pak označíme dle zásady nahoře vyslovené; budiž pak druhá involuce J_k, t. j. taková, že její samodružný element je $A_{\frac{k}{2}}$, je-li k sudé, nebo $A_{\frac{n+k}{2}}$, je-li k liché. Tato involuce převádí A_0, t. j. samodružný element prvé involuce, v A_k, t. j. v element o k míst vzdálenější. Utvořme projektivnost

$$\alpha = J_0 J_k,$$

užijme jí na A_0 a postupujme pak jako v předchozím případě:

---

[1]) V. Sturm, l. c. I. str. 187.

$$A_0 \dots (J_0) \dots A_0 \dots (J_k) \dots A_k$$
$$A_k \dots (J_0) \dots A_{n-k} \dots (J_k) \dots A_{2k}$$
$$A_{2k} \dots (J_0) \dots A_{n-2k} \dots (J_k) \dots A_{3k}$$
atd.

Že involuce J_k převede A_{n-k} v A_{2k}, je patrno z toho, že součet indexů

$$n - k + 2k = n + k \equiv k \text{ mod } n.$$

Je patrno, že platí obecně

$$A_{mk} \dots (J_0) \dots A_{n-mk} \dots (J_k) \dots A_{(m+1)k}.$$

Jsou pak možné tři případy:

a) k a n jsou čísla nesoudělná. Pak, jak je známo z elementární theorie čísel, řada

$$0, k, 2k, 3k, \dots, (n-1)k$$

je modulo n totožna (až na pořad) s řadou

$$0, 1, 2, \dots, n-1.$$

To znamená: projektivnost α obsahuje cyklus

$$A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_0;$$

je to tedy n-árně cyklická projektivnost, a daná skupina tvoří cyklus v této projektivnosti.

Je zřejmo, že to platí také pro $k = 1$.

b) k je dělitel čísla n, takže $n = m \cdot k$. Pak tedy opětovné užití projektivnosti α vede k cyklu

$$A_0, A_k, A_{2k}, \dots, A_{mk} \equiv A_0,$$

t. j. α je projektivnost stupně m-ho a

$$A_0, A_k, A_{2k}, \dots, A_{(m-1)k}$$

jeden cyklus. Je patrno, ježto

$$A_h \dots (J_0) \dots A_{n-h} \dots (J_k) \dots A_{h+k},$$

že α obsahuje také cykly

$$A_1, A_{k+1}, A_{2k+1}, \dots$$
$$A_2, A_{k+2}, A_{2k+2}, \dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$A_{k-1}, A_{2k-1}, A_{3k-1}, \dots$$

t. j. celá skupina se rozpadá v k cyklů po m elementech příslušných cyklické projektivnosti stupně m-ho. Ježto J_0, J_k jsou involuce, je $J_k J_0$ projektivnost inversní k $J_0 J_k$,[1]) jejím užitím došli bychom tedy k témuž výsledku.

c) k je soudělné s n, tak že

$$n = n' . m$$
$$k = k' . m$$

a n', k' čísla nesoudělná. Pak

$$n'k = k' . n' . m = k'n$$

a n' je, jak známo, nejmenší číslo, jímž k násobeno dává násobek n. Při tom $n' < n$. Opětovné užití projektivnosti α vede k cyklu

$$A_0, A_k, A_{2k}, \ldots, A_{(n'-1)k},$$

jak snadno zjistíme úvahou obdobnou předchozí. Je tedy α cyklická projektivnost st. $n' < n$ a daná skupina se rozpadá v m cyklů po n' elementech.

7. Došli jsme tím k výsledku:

Jestliže skupina n elementů (pro n liché) se reprodukuje dvěma involucemi, z nichž jedna převádí samodružný element druhé (a to ten, jenž leží ve skupině) v element o k míst vzdálenější (v daném cyklickém uspořádání), tvoří tato skupina cyklus v n-árně cyklické projektivnosti tehdy a jen tehdy, když čísla k a n nemají — mimo 1 — společné míry. Pak ovšem existuje dalších $(n - 2)$ involucí, jimiž se skupina reprodukuje. Společnou míru 1 proto výslovně vylučujeme, poněvadž ve větu je zahrnut také případ $k = 1$.

Mimo jiné odtud plyne: *je-li n prvočíslo, stačí vždy existence kterýchkoli dvou involucí, skupinu reprodukujících, k tomu, aby tato skupina tvořila cyklus.*

8. Příklady tuto větu nejlépe objasní:

a) $n = 3$. Tři elementy vždy tvoří cyklus, ježto představují tři dvojice právě nutné k určení projektivnosti. Involuce J_k zde ovšem také existují; každá z nich je právě určena jedním elementem jako samodružným a dvojicí druhých dvou.

---

[1]) Jsou-li β, γ dvě libovolné projektivnosti a $\omega = \beta\gamma$ jich resultanta, je $\omega^{-1} = \gamma^{-1}\beta^{-1}$. Jsou-li β, γ involuce, je $\beta^{-1} = \beta$, $\gamma^{-1} = \gamma$, tedy $\omega^{-1} = \gamma\beta$.

b) $n = 5$. Budiž příslušná skupina

$$A_0 A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Nechť se reprodukuje involucí J_0, ve které jsou sdruženy A_0 a A_0, A_1 a A_4, A_2 a A_3, a involucí J_3, v níž jsou sdruženy

$$A_0, A_3;\ A_1, A_2;\ A_4, A_4.$$

Utvořme $\alpha = J_0 J_3$ a užijme této projektivnosti na A_0 a postupně dále:

$$\begin{array}{l}
A_0 \ldots (J_0) \ldots A_0 \ldots (J_3) \ldots A_3 \\
A_3 \ldots (J_0) \ldots A_2 \ldots (J_3) \ldots A_1 \\
A_1 \ldots (J_0) \ldots A_4 \ldots (J_3) \ldots A_4 \\
A_4 \ldots (J_0) \ldots A_1 \ldots (J_3) \ldots A_2 \\
A_2 \ldots (J_0) \ldots A_3 \ldots (J_3) \ldots A_0
\end{array}$$

t. j. obdrželi jsme cyklus:

$$A_0, A_3, A_1, A_4, A_2, A_0.$$

c) $n = 15$. Skupina

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{14}.$$

α) Dány involuce J_0 a J_5.

Utvoříme $\alpha = J_0 J_5$; jejím užitím obdržíme cyklus A_0, A_5, A_{10}, A_0.

β) Dány involuce J_0 a J_{10}; utvoříme $\alpha = J_0 J_{10}$; jejím užitím obdržíme cyklus A_0, A_{10}, A_5, A_0. Zde je totiž $10 = 2 . 5$, $15 = 3 . 5$, tedy $n' = 3$ (v. případ *c*)).

γ) Dány involuce J_0 a J_7. Utvoříme $\alpha = J_0 J_7$

$$\begin{array}{l}
A_0 \ldots (\alpha) \ldots A_7 \ldots (\alpha) \ldots A_{14} \ldots (\alpha) \ldots A_6 \\
A_6 \ldots (\alpha) \ldots A_{13} \ldots (\alpha) \ldots A_5 \ldots (\alpha) \ldots A_{12} \\
A_{12} \ldots (\alpha) \ldots A_4 \ldots (\alpha) \ldots A_{11} \ldots (\alpha) \ldots A_3 \\
A_3 \ldots (\alpha) \ldots A_{10} \ldots (\alpha) \ldots A_2 \ldots (\alpha) \ldots A_9 \\
A_9 \ldots (\alpha) \ldots A_1 \ldots (\alpha) \ldots A_8 \ldots (\alpha) \ldots A_0
\end{array}$$

t. j. máme cyklus úplný:

$$A_0, A_7, A_{14}, A_6, A_{13}, A_5, A_{12}, A_4, A_{11}, A_3, A_{10}, A_2, A_9, A_1, A_8, A_0.$$

9. — II. n sudé. Vedeni analogií s případem I. řešme hned obecnou úlohu: skupina se reprodukuje dvěma involucemi; má se rozhodnouti, jak dalece existence těchto involucí stačí k tomu, aby skupina tvořila cyklus. Zde je třeba rozeznávati tři případy.

a) Obě dané involuce jsou prvého druhu. Jednu lze označiti J_0. Její samodružné elementy jsou tedy A_0, $A_{\frac{n}{2}}$; druhá budiž J_k, kde ovšem k je číslo sudé. Užitím projektivnosti

$$\alpha = J_0 J_k$$

obdržíme, jako v případě I., řadu elementů

$$A_0, A_k, A_{2k}, \ldots$$

Avšak k a n mají nejméně 2 za společnou míru, tak že, ne-li dříve, jistě po $\frac{n}{2}$ násobném opětování projektivnosti α vrátíme se k A_0. V nejpříznivějším případě tedy rozpadne se skupina ve dva cykly. K tomu, aby skupina tvořila jediný cyklus v projektivnosti n-árně cyklické, existence dvou involucí prvého druhu tedy nestačí.

b) Obě dané involuce jsou druhého druhu. Označme jednu J_1 (což znamená, že převádí A_0 v A_1 [1]), druhá budiž J_k, při čemž k je číslo liché. Užijeme projektivnosti $\alpha = J_1 J_k$: obdržíme cyklus

$$A_0, A_{k-1}, A_{2(k-1)}, \ldots, A_{h(k-1)}, \ldots$$

Tento cyklus obsahuje v nejpříznivějším případě $\frac{n}{2}$ elementů, ježto $k - 1$ je číslo sudé. Tedy ani existence dvou involucí druhého druhu nestačí k tomu, aby skupina tvořila cyklus v n-árně cyklické projektivnosti.

c) Jedna involuce je prvého, druhá druhého druhu. Prvou označme J_0, druhá budiž J_k, kde k je číslo liché. Užitím projektivnosti $\alpha = J_0 J_k$ vznikne cyklus

$$A_0, A_k, A_{2k}, \ldots$$

který obsahuje všech n elementů, jestliže k a n nemají — mimo 1 — společné míry, což je možné, ježto n je sudé a k liché.

---

[1]) Malá úvaha postačí k poznání, že v dané skupině existují dvě dvojice, utvořené ze sousedních elementů skupiny (totiž těch, jež jsou nejblíže k oběma samodružným elementům, ležícím ovšem mimo skupinu). Jednu tu dvojici označíme $A_0 A_1$ (pak druhá je $A_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}1}$).

10. Nabyli jsme výsledku:

Jestliže skupina n elementů (pro n sudé) se reprodukuje dvěma involucemi, z nichž jedna má samodružné elementy ve skupině, druhá nikoliv, a tato převádí samodružný element prvé v element o k míst vzdálenější (v daném cyklickém uspořádání), tvoří tato skupina cyklus v n-árně cyklické projektivnosti tehdy a jen tehdy, když čísla k a n nemají — mimo 1 — *společné míry.* Pak ovšem existuje dalších (n — 2) involucí, jež skupinu reprodukují.

Mimo jiné z toho plyne: je-li $n = 2m$ a m prvočíslo, stačí vždy existence dvou involucí, není-li náhodou $k = m$.

11. Sledujme tuto větu na příkladech:

a) $n = 4$, příslušná skupina

$$A_0 A_1 A_2 A_3.$$

A priori existují tři involuce druhého druhu, totiž involuce o dvojicích A_0, A_1; A_2, A_3 a další dvě obdobné, ježto dvěma dvojicemi je involuce právě určena. I je třeba existence již jen jedné involuce prvého druhu [1], na př. J_0, jež má samodružné elementy A_0, A_2. Předpokládejme tedy, že A_1, A_3 oddělují harmonicky A_0, A_2. Vezměme vedle toho involuci druhého druhu J_1 a utvořme $\alpha = J_0 J_1$. Obdržíme ihned cyklus

$$A_0, A_1, A_2, A_4.$$

Věta o nutnosti dvou involucí je tu zachována, jenom že existence jedné z nich netvoří žádnou omezující podmínku pro polohu čtyř elementů.

b) $n = 6$. Užijeme involuce prvého druhu J_0 a jedné druhého druhu, třeba J_5. Obdržíme cyklus $A_0, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1, A_0$.

III.

12. Předchozí výklady týkaly se útvarů prvého řádu. Na útvary druhého řádu přenesou se předchozí výsledky bezprostředně. Máme-li na mysli body roviny, platí věta [2]), že skupina bodů, tvořící cyklus v cyklické kolli-

[1]) Srv. s pozn. na str. 285. o příkladu Sturmově.

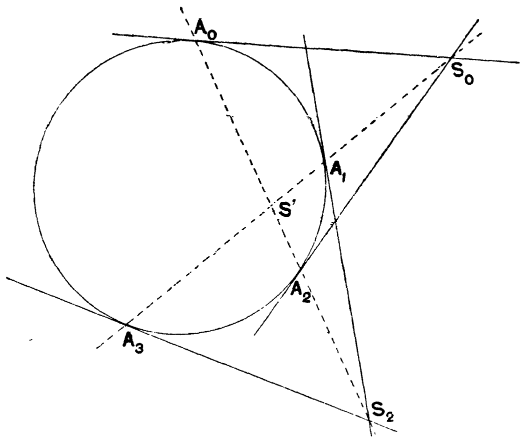
[2]) V. Lüroth, l. c.

neaci, leží na kuželosečce [1]), pro tu kollineaci invariantní. Jsou tedy dostatečné podmínky pro to, aby n bodů tvořilo cyklus v n-árně cyklické kollineaci rovinné, tyto:

a) tyto body musí ležeti na kuželosečce, a

b) na této kuželosečce (t. j. útvaru prvého řádu) hověti podmínkám v předchozím nalezeným.

13. Pro $n = 4$ jsou vyplněny vždy; to tím, že 4 dvojicemi je kollineace právě určena. Zakládá se to pak na tom: jsou-li A_0, A_1, A_2, A_4 dané body, lze vždy jimi položiti — a to jediným způsobem — kuželosečku tak, aby ony body se reprodukovaly některou involucí prvého druhu. Budiž to involuce označená J_0, její samodružné body A_0, A_2. Spojme A_0, A_2; A_1, A_3. K prů-



Obr. 1.

sečíku S' obou těchto paprsků sestrojme (v. obr. 1.) čtvrtý harmonický bod vzhledem k A_1, A_3; označme jej S_0. Kuželosečka, mající v A_0 a A_2 tečny A_0S_0, resp. A_2S_0 a procházející bodem A_1, prochází ovšem také bodem A_3. Jsou pak A_1, A_3 body sdružené v involuci, indukované bodem S_0 na této kuželosečce, a A_0, A_2 její samodružné body. Je pak pouhý následek polárné vlastnosti kuželosečky, že tytéž 4 body se reprodukují involucí

[1]) To platí však jen pro cykly reálných kollineací, což v dalším mlčky předpokládáme.

o středu S_2, takže skutečně existují dvě involuce prvého druhu, jež polohu čtyř bodů nijak neomezují, nýbrž určují jen polohu příslušné kuželosečky.

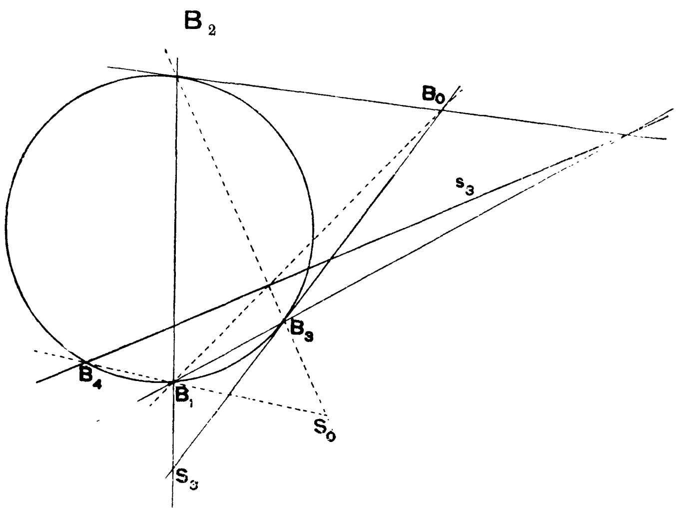
13. Pro prostorové kollineace cyklické neplatí věta tak jednoduchá, jako pro rovinné. Nicméně existují až do $n = 6$ kubické křivky prostorové, obsahující daný cyklus a invariantní pro příslušnou cyklickou kollineaci [1]). Tím tedy je věc převedena pro $n \leq 6$ na útvary prvého řádu; tímto útvarem je křivka kubická, která je, jak známo, racionálná. Nás zvláště zase zajímá případ $n = 5$, neboť jedním cyklem je prostorová kollineace právě určena, není-li to náhodou — a to vylučujeme — kollineace planárná (t. j. s cykly rovinnými) nebo poloperspektivní (s cykly na přímkách). Není tedy poloha 5 bodů v prostoru nijak omezena podmínkou, že těchto 5 bodů má tvořiti cyklus v kvinárně cyklické kollineaci; musí však býti možno, položiti těmito 5 libovolnými body kubickou křivku prostorovou tak, že tyto body tvoří na křivce skupinu, hovící podmínkám výše nalezeným.

Řešme tedy úlohu: je dáno 5 libovolných bodů v prostoru, z nichž žádné 4 neleží v rovině. Těmito body jest položiti křivku kubickou tak, aby na ní se skupina bodů reprodukovala dvěma involucemi. Tyto dvě involuce, jak víme, právě stačí k tomu, aby skupina tvořila cyklus v útvaru prvého řádu, jímž je zde křivka kubická. Představme si úlohu již řešenu; body dané skupiny označme $A_0, \ldots, A_4$ tak, jak po sobě následují v jednom cyklickém pořadu; z jednoho bodu, na př. A_4, promítněme křivku do roviny v kuželosečku. Obdržíme na této kuželosečce body B_0, B_1, B_2, B_3, vzniklé průseky sečen, a B_4, vzniklý průsekem tečny v bodu A_4. Těchto 5 bodů musí zase tvořiti cyklus na kuželosečce. Z pěti involucí, jimiž se reprodukuje cyklus na prostorové křivce, zvolme dvě, a to J_3, jež má A_4 za samodružný bod, a libovolnou jinou, na př. J_0. V rovině tomu odpovídají dvě involuce; středy těmto involucím příslušné buďtež S_3, S_0. Má tedy skupina $B_0, \ldots, B_4$ zcela určitou polohu na kuželosečce.

1) V. Sturm, l. c. III., str. 306 a násl.

14. Na základě toho řešíme danou úlohu takto (v. obr. 2.): z bodu A_4 promítneme ostatní body do roviny. Jich průměty $B_0 \dots B_8$ je určen svazek kuželoseček. Úloha záleží v tom, najíti určitou z nich, na níž by ležel bod B_4.

Průsečík spojnic $\overline{B_0B_3}$, $\overline{B_1B_2}$ je střed S_3; bod B_4 se obdrží jako dotyčný bod tečny z S_3 vedené k hledané kuželosečce svazku. Je tedy geometrické místo bodu B_4 diagonálná strana s_8 čtyrrohu $B_0B_1B_2B_8$, ležící proti diagonálnému rohu S_3. Druhé geometrické místo pro bod B_4 obdržíme takto: střed S_0 leží na spojnici $\overline{B_2B_8}$; spojnice $\overline{S_0B_0}$ dotýká se v B_0 hledané kužело-



Obr. 2.

sečky; spojnice $\overline{S_0B_1}$ protne ji v bodě B_4. Když tedy kuželosečka probíhá svazek $(B_0B_1B_2B_3)$, probíhá tečna v B_0 svazek paprsků s ním projektivný a průsečík této tečny se spojnicí $\overline{B_2B_3}$ řadu rovněž projektivnou se svazkem kuželoseček. Svazek paprsků promítajících tuto řadu z B_1 konečně je rovněž projektivný se svazkem kuželoseček. Křivka k, vytvořená průseky kuželoseček svazku a sdružených paprsků projektivného svazku (B_1), je hledané druhé geometrické místo pro bod B_4. Tato křivka je tedy kubická křivka, mající v B_1 bod dvojnásobný. Avšak uvažujeme-li specielně tu kuželosečku svazku, jež se skládá z paprsků $\overline{B_0B_1}$, $\overline{B_2B_3}$, je tečna v B_0 totožna s B_0B_1, příslušný paprsek svazku (B_1) je také $\overline{B_0B_1}$, t. j. paprsek $\overline{B_0B_1}$ tvoří součást křivky k. Snadno lze zjistiti, že jiné paprsky ze spojnic bodů B_i netvoří součást křivky k. Skládá se tedy k z paprsku $\overline{B_0B_1}$ a kuželosečky k'. Křivka k má v B_1 bod dvojnásobný, ve zbývajících třech bodech body jednoduché. Kuželosečka k prochází tedy body B_1, B_2, B_3. Ale na paprsku $\overline{B_0B_3}$ nemůže ležeti žádný bod této kuželosečky mimo B_3. Neboť kdyby ležel na tomto paprsku bod X kuželosečky k', znamenalo by to, že kuželosečce, skládající se z paprsků $\overline{B_0B_3}$, $\overline{B_1B_2}$ odpovídá v projektivnosti výše nalezené paprsek $\overline{B_1X}$. Avšak k této zvrhlé kuželosečce svazku je $\overline{B_0B_3}$ tečnou v B_0, průsečík s $\overline{B_2B_3}$ je B_3 a $\overline{B_1B_3}$ je příslušný paprsek ve svazku B_1. Musí tedy $X \equiv B_3$. Ale z toho plyne, že $\overline{B_0B_3}$ se dotýká kuželosečky k' v B_3. Podobně je $\overline{B_0B_2}$ tečná k' v B_2. Je tedy k' úplně určena (třemi body a tečnami ve dvou z nich).

Průsečíky paprsku s_3 a kuželosečky k' podávají řešení úlohy. Každý z nich lze pokládati za B_4. Avšak bod B_4 vznikne jako průsek roviny s tečnou ke kubické křivce; je tedy $\overline{A_4B_4}$ tečna ke křivce v bodu A_4 a tím je křivka určena, neboť je známo 5 jejích bodů A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 a tečna v jednom z nich. Ježto pro B_4 obdržíme dvě polohy, je úloha dvojznačná, t. j. danými pěti body lze položiti dvě kubické křivky [1]), na nichž těchto pět bodů se reprodukuje dvěma, a tedy pěti involucemi, a tvoří ovšem cyklus v kvinárně cyklické projektivnosti.

Je ovšem jasno, že k týmž dvěma bodům B_4 musíme dojíti užitím každé jiné involuce než J_0. Je zajímavou úlohou, totožnost těchto bodů dokázati přímo; to však přenechávám čtenáři.

Zároveň jsme v předchozím rozřešili rovinnou úlohu: *určiti rovinnou kollineaci kvinárně cyklickou, jsou-li dány čtyři body jednoho cyklu.* Je zřejmo, že úloha je určitá, ale dvojznačná [2])

---

[1]) To je v souhlase s tím, že pro danou kvinárně cyklickou kollineaci v prostoru existují dva systémy kubických křivek pro tuto kollineaci invariantních. V. Sturm, l. c. III., str. 306.

[2]) Pokud je mi známo, nebyla dosud, ani ve zvláštních případech, řešena úloha: určiti rovinnou kollineaci cyklickou daného stupně, jsou-li dány čtyři body jednoho cyklu.