Jan Vojtěch

Analytické vyjádření pohybu v prostoru

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 3, 154--164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123214

nice bodů ab, a_1b protnou osu X ve dvou bodech p, q, jež jsou sdruženými póly kuželosečky (*G. P. V. 19.* nebo *Č. M. XLVII, 2.*, odst. 4); $qP \perp X$ je polára pólu p, $pQ \perp X$ polára pólu q. Kuželosečka je sama s sebou v perspektivné involuci pro střed p a osu P; sestrojíme tedy třetí tečnu U přímkou homologickou k tečně T v soustavě (pP) : bod $(PT) \equiv m$ je samodružný; k bodu $(T, \overline{aa_1}) \equiv \alpha$ obdržíme homologický β v průsečíku paprsku $p\alpha$ s tětivou bb_1, která je sdružena s tětivou aa_1, načež spojnice $m\beta \equiv U$. Čtvrtá pak tečna U_1 je souměrná k tečně U podle osy X. Obě imaginárné kuželosečky, jež hoví úloze, mají tedy reálnou osu X, reálné body a, a_1, b, b_1, reálné tečny T, T_1, U, U_1.

2. Imaginárná kuželosečka buď dána reálnou osou X, dvěma reálnými tečnami T, U a reálným bodem a (týž obraz); sestrojiti jest ostatní dvě její reálné tečny a tři reálné body. Tečny T_1, U_1 jsou symmetrické k tečnám T, U podle osy X. Tyto čtyři tečny omezují čtyřúhelník $tmum_1$ a určují osnovu kuželoseček Ω, jejíž reálné ellipsy leží vnitř čtyřúhelníka, reálné pak hyperboly (a jedna parabola) v plochách, jež leží za vrcholy čtyřúhelníka (*G. P. III. 88.*). Aby tedy kuželosečka byla imaginárná, musí daný bod a ležeti v některé z ostatních částí roviny, danými tečnami rozdělené. Spojnice $mm_1 \equiv P$, $\overline{nn_1} \equiv Q$ jsou sdružené poláry (*G. P. V.* str. 20. odst. 6. nebo *Č. M. XLVII*, str. 3., odst. 6), body pak p, q na ose X sdružené póly. Druhý reálný bod kuželosečky obdržíme v bodě a_1 symmetrickém k a podle osy X, třetí b v průsečíku $(pa, \overline{a_1q})$ a čtvrtý b_1 symmetrický ku b.

Analytické vyjádření pohybu v prostoru.

Napsal Dr. *Jan Vojtěch* v Brně.

1. Libovolnému bodu P o souřadnicích X, Y, Z (v soustavě rovnoběžkových souřadnic pravoúhlých) ať odpovídá bod P' se souřadnicemi X', Y', Z', souměrně sdružený k bodu tomu podle roviny

$$ax + by - cz + d = 0.$$

Transformační rovnice vyjadřující souřadnice X', Y', Z' jako funkce souřadnic X, Y, Z (a konstant určujících rovinu souměrnosti) obdržíme krátce odtud, že pravoúhlé průměty vzdálenosti $P'P$ na osách souřadnic jsou jednak $X - X'$, $Y - Y'$, $Z - Z'$, jednak $2v \cos x$, $2v \cos \beta$, $2v \cos \gamma$, kde v je vzdálenost bodu P od dané roviny a $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ směrové kosiny normály k rovině. Protože pak jest

$$\cos \alpha = \frac{a}{s}, \ \cos \beta = \frac{b}{s}, \ \cos \gamma = \frac{c}{s}, \ \text{kde } s^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\text{a } v = \frac{1}{s}(aX + bY + cZ + d),$$

platí $$X' = X - \frac{2a}{s^2}(aX + bY + cZ + d) =$$
$$= \frac{1}{s^2}\left[(s^2 - 2a^2)X - 2abY - 2acZ - 2ad\right]$$
a obdobně pro Y' a Z'.

Téhož výsledku dojdeme také třebas z obou podmínek souměrnosti podle roviny, že totiž střed spojnice PP' o souřadnicích $\frac{1}{2}(X' + X)$, $\frac{1}{2}(Y' + Y)$, $\frac{1}{2}(Z' + Z)$ leží v dané rovině a že směr spojnice té, určený poměrem $(X' - X):(Y' - Y):(Z' - Z)$, je totožný se směrem normály k rovině dané.

Rovnice, jež vyjadřují transformaci bodu (X, Y, Z) v bod (X', Y', Z'), *souměrně* k onomu *podle roviny* $ax + by + cz + d = 0$ *sdružený*, jsou tedy

$$\begin{aligned}(1)\quad s^2 X' &= (s^2 - 2a^2)X - 2abY - 2acZ - 2ad,\\ s^2 Y' &= -2baX + (s^2 - 2b^2)Y - 2bcZ - 2bd,\\ s^2 Z' &= -2caX - 2cbY + (s^2 - 2c^2)Z - 2cd,\end{aligned}$$
při čemž $s^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Chceme-li v těchto rovnicích pro souměrnost podle roviny míti směrové kosiny normály k rovině souměrnosti $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ a její délku n od počátku soustavy k rovině, nabudou rovnice transformační tvaru (1.'):

$$\begin{aligned}X' &= (1 - 2\cos^2\alpha)X - 2\cos\alpha\cos\beta\, Y - 2\cos\alpha\cos\gamma\, Z + 2n\cos\alpha,\\ Y' &= -2\cos\beta\cos\alpha\, X + (1 - 2\cos^2\beta)Y - 2\cos\beta\cos\gamma\, Z + 2n\cos\beta,\\ Z' &= -2\cos\gamma\cos\alpha\, X - 2\cos\gamma\cos\beta\, Y + (1 - 2\cos^2\gamma)Z + 2n\cos\gamma,\end{aligned}$$

kde opět místo součinitele $1 - 2\cos^2\alpha$ lze psáti
$$-\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \text{ nebo } -\cos 2\alpha$$
a obdobně u dvou analogických součinitelů.

2. Rotaci prostoru kolem přímky jdoucí počátkem soustavy o úhel ω lze vždy pokládati za produkt dvou souměrností podle rovin položených touto přímkou a svírajících spolu úhel $\frac{\omega}{2}$.

Dvěma takovými rovinami buďtež roviny
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \quad\text{a}\quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$
(a budiž $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = s_1^2$, $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = s_2^2$). Bodu $P(X, Y, Z)$ ať odpovídá bod souměrný podle první roviny $P'(X', Y', Z')$, tomuto pak bod souměrný podle druhé roviny $P''(X'', Y'', Z'')$.

Platí tedy (podle odst. 1.) vzorce
$$\begin{aligned}s_1^2 X' &= (s_1^2 - 2a_1^2)X - 2a_1 b_1 Y - 2a_1 c_1 Z\\ s_1^2 Y' &= -2b_1 a_1 X + (s_1^2 - 2b_1^2)Y - 2b_1 c_1 Z\\ s_1^2 Z' &= -2c_1 a_1 X - 2c_1 b_1 Y + (s_1^2 - 2c_1^2)Z\end{aligned}$$

$$s_2^2 X'' = (s_2^2 - 2a_2^2) X' - 2a_2 b_2 Y' - 2a_2 c_2 Z'$$
$$s_2^2 Y'' = -2b_2 a_2 X' + (s_2^2 - 2b_2^2) Y' - 2b_2 c_2 Z'$$
$$s_2^2 Z'' = 2c_2 a_2 X' - 2c_2 b_2 Y' + (s_2^2 - 2c_2^2) Z'.$$

Dosadíme-li z rovnic prvé soustavy do rovnic druhé skupiny, obdržíme po úpravě

$$s_1^2 s_2^2 X'' = (s_1^2 s_2^2 - 2a_1^2 s_2^2 - 2a_2^2 s_1^2 + 4a_1 a_2 t) X + (4a_2 b_1 t - 2a_1 b_1 s_2^2 - 2a_2 b_2 s_1^2) Y + (4a_2 c_1 t - 2a_1 c_1 s_2^2 - 2a_2 c_2 s_1^2) Z,$$

kde $t = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$, a obdobné dvě rovnice pro Y'' a Z''.

Půjde nyní o to, abychom do těchto rovnic transformačních zavedli elementy určující rotaci, totiž směrové kosiny osy (jdoucí počátkem) a úhel rotace. Směrové kosiny osy rotačni $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ určíme z rovnic

$$a_1 \cos \alpha + b_1 \cos \beta + c_1 \cos \gamma = 0$$
$$a_2 \cos \alpha + b_2 \cos \beta + c_2 \cos \gamma = 0$$

ve tvaru

$$\cos \alpha = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{r}, \quad \cos \beta = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{r},$$

kde

$$r^2 = (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = s_1^2 s_2^2 - t^2$$

O úhlu otočení ω platí pak $\cos \frac{\omega}{2} = \frac{t}{s_1 s_2}$.

Koeficient při X (ve výrazu pro $s_1^2 s_2^2 X''$) jest $(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - 2a_1^2 (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - 2a_2^2 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + 4a_1 a_2 (a_1 \cdot a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) = a_1^2 a_2^2 - a_1^2 b_2^2 - a_1^2 c_2^2 - b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + b_1^2 c_2^2 - c_1^2 a_2^2 + c_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2 + 4a_1 a_2 b_1 b_2 + 4a_1 a_2 c_1 c_2$; doplníme-li jej dvojčlenem $2b_1 b_2 c_1 c_2 - 2b_1 b_2 c_1 c_2$, poznáváme, že jej lze upraviti na tvar

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2 + (b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 - (c_1 a_2 - a_2 c_1)^2 - (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2$$
$$= t^2 + r^2 \cos^2 \alpha - r^2 \cos^2 \beta - r^2 \cos^2 \gamma.$$

Sem konečně můžeme dosadit $t = s_1 s_2 \cdot \cos \frac{\omega}{2}$, $r = \sqrt{s_1^2 s_2^2 - t^2} = s_1 s_2 \cdot \sin \frac{\omega}{2}$, takže součinitel při X nabývá tvaru

$$s_1^2 s_2^2 \left[\cos^2 \frac{\omega}{2} + (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma) \sin^2 \frac{\omega}{2} \right].$$

Tento výraz lze, chceme-li, ještě dále upraviti na formu

$$s_1^2 s_2^2 \left[\cos^2 \frac{\omega}{2} + (2 \cos^2 \alpha - 1) \sin^2 \frac{\omega}{2} \right] =$$
$$= s_1^2 s_2^2 \left(\cos \omega + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \frac{\omega}{2} \right).$$

Podobně jest možno koeficientu při Y (ve výrazu pro $s_1^2 s_2^2 X'$) dáti tvar

$$2\,[(b_1 c_2 - c_1 b_2)(c_1 a_2 - a_1 c_2) - (a_1 b_2 - b_1 a_2)(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)] =$$
$$= 2\,(r^2 \cos\alpha \cos\beta - rt \cos\gamma)$$
$$= 2\, s_1^2 s_2^2 \left(\cos\alpha \cos\beta \sin\frac{\omega}{2} - \cos\gamma \cos\frac{\omega}{2}\right) \sin\frac{\omega}{2}$$
$$= s_1^2 s_2^2 \left(2 \cos\alpha \cos\beta \sin^2\frac{\omega}{2} - \cos\gamma \sin\omega\right);$$

koeficient při Z (tamtéž) jest analogicky roven

$$2\, s_1^2 s_2^2 \left(\cos\alpha \cos\gamma \sin\frac{\omega}{2} + \cos\beta \cos\frac{\omega}{2}\right) \sin\frac{\omega}{2}$$
$$= s_1^2 s_2^2 \left(2 \cos\alpha \cos\gamma \sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\beta \sin\omega\right).$$

A obdobně v rovnicích pro Y' a Z'.

Rotace o úhel ω *kolem přímky* ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) *jdoucí počátkem soustavy*, jež převádí bod (X, Y, Z) v bod (X', Y', Z'), jest tedy vyjádřena rovnicemi:

$$\text{(II.)}\quad X' = \left(2\cos^2\alpha \sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\omega\right) X + \left(2 \cos\alpha \cos\beta \sin^2\frac{\omega}{2} - \cos\gamma \sin\alpha\right) Y + \left(2 \cos\alpha \cos\gamma \sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\beta \sin\omega\right) Z,$$

$$Y' = \left(2 \cos\beta \cos\alpha \sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\gamma \sin\omega\right) X + \left(2\cos^2\beta \sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\omega\right) Y + \left(2 \cos\beta \cos\gamma \sin^2\frac{\omega}{2} - \cos\alpha \sin\omega\right) Z,$$

$$Z' = \left(2 \cos\gamma \cos\alpha \sin^2\frac{\omega}{2} - \cos\beta \sin\omega\right) X + \left(2 \cos\gamma \cos\beta \sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\alpha \sin\omega\right) Y + \left(2 \cos^2\gamma \sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\omega\right) Z.$$

Místo $2 \sin^2\frac{\omega}{2}$ možno ovšem všude psáti $1 - \cos\omega$.

Tyto rovnice obsahují přímo elementy určující rotaci. Můžeme však dostati rovnice kratší (a jednotnější), zavedeme-li do koeficientů rovnic původně nalezených zkratky

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{s_1 s_2} = \cos\frac{\omega}{2} = T,$$
$$\frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{s_1 s_2} = \cos\alpha \sin\frac{\omega}{2} = A_{23},$$
$$\frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{s_1 s_2} = \cos\beta \sin\frac{\omega}{2} = A_{31}.$$

$$\frac{a_1\, b_2 - a_2\, b_1}{s_1\, s_2} = \cos\gamma \sin\frac{\omega}{2} = A_{12}$$

(při čemž platí $A_{32} = - A_{23}$, $A_{13} = - A_{31}$, $A_{21} = - A_{12}$).
Dostaneme tyto rovnice pro rotaci:

$$
\begin{aligned}
(\text{II}'.)\quad X' &= (T^2 - A^2_{12} + A^2_{23} - A^2_{31})\, X + 2\,(A_{13}\, A_{32} - A_{12}\, T)\, Y \\
&\quad + 2\,(A_{12}\, A_{23} - A_{13}\, T)\, Z, \\
Y' &= 2\,(A_{23}\, A_{31} - A_{21}\, T)\, X + (T^2 - A^2_{23} + A^2_{31} - A^2_{12})\, Y \\
&\quad + 2\,(A_{21}\, A_{13} - A_{23}\, T)\, Z, \\
Z' &= 2\,(A_{32}\, A_{21} - A_{31}\, T)\, X + 2\,(A_{31}\, A_{12} - A_{32}\, T)\, Y \\
&\quad + (T^2 - A^2_{31} + A^2_{12} - A^2_{23})\, Z.
\end{aligned}
$$

Počátek v indexech koeficientů je patrný. Součinitele při X v 1. rovnici možno ještě zkrátiti na $2\,T^2 + 2\,A^2_{23} - 1$ a obdobně součinitele při Y a Z v 2. resp. 3. rovnici.

3. Rotace prostoru kolem přímky jdoucí počátkem soustavy souřadnic má rovnice tvaru

$$
\begin{aligned}
X' &= c_{11}\, X + c_{12}\, Y + c_{13}\, Z, \\
Y' &= c_{21}\, X + c_{22}\, Y + c_{23}\, Z, \\
Z' &= c_{31}\, X + c_{32}\, Y + c_{33}\, Z.
\end{aligned}
$$

Devět koeficientů c_{hk} této transformace jest vázáno řadou rovnic; protože totiž při uvažované rotaci platí

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

musí býti

$$c^2_{1h} + c^2_{2h} + c^2_{3h} = 1, \quad c_{1h}\, c_{1k} + c_{2h}\, c_{2k} + c_{3h}\, c_{3k} = 0$$

$$\text{pro } h, k = 1, 2, 3 \text{ a } h \neq k.$$

Těmito šesti nezávislými rovnicemi redukuje se počet konstant na tři: a vskutku je rotace prostoru kolem přímky určena třemi podmínkami. Poněvadž produkt dvou rotací kolem přímek jdoucích týmž bodem jest opět rotace kolem přímky procházející tímto bodem, tvoří všechny rotace kolem přímek téhož svazku v prostoru (kontinuitní) grupu s ∞^3 členy.

Za konstanty určující rotaci kolem přímky jdoucí počátkem volíme přirozeně směrové kosiny stanovící směr přímky (poměr tří veličin, t. j. dvě veličiny) a úhel rotace. Abychom tyto veličiny $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\omega$ nalezli pro rotaci, danou hořejšími rovnicemi a tedy konstantami c_{hk}, sečtěme koeficienty c_{11}, c_{22}, c_{33} v rovnicích II.; obdržíme

$$c_{11} + c_{22} + c_{33} = 2 \sin^2\frac{\omega}{2} + 3 \cos\omega = 1 + 2 \cos\omega$$

a odtud

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\,(c_{11} + c_{22} + c_{33} - 1).$$

Dále z výrazu pro c_{11} vyplývá $\cos^2\alpha = (c_{11} - \cos\omega):(1 - \cos\omega)$ a tedy

$$\cos^2\alpha = \frac{c_{11} - c_{22} - c_{33} + 1}{3 - c_{11} - c_{22} - c_{33}};$$

obdobně nalezneme

$$\cos^2\beta = \frac{-c_{11} + c_{22} - c_{33} + 1}{3 - c_{11} - c_{22} - c_{33}}, \quad \cos^2\gamma = \frac{-c_{11} - c_{22} + c_{33} + 1}{3 - c_{11} - c_{22} - c_{33}}.$$

Chceme-li určiti také konstanty T, A_{hk}, obdržíme

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 1}, \quad A_{23} = \frac{1}{2}\sqrt{c_{11} - c_{22} - c_{33} + 1},$$

$$A_{31} = \frac{1}{2}\sqrt{-c_{11} + c_{22} - c_{33} + 1}, \quad A_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{-c_{11} - c_{22} + c_{33} + 1}.$$

4. Hledejme produkt dvou rotací kolem přímek jdoucích počátkem; jest to ovšem rotace kolem přímky procházející počátkem. Rovnice takové resultující rotace můžeme obdržeti, dosadíce do rovnic druhé rotace souřadnice otočeného bodu z rovnic první rotace. Pohodlněji je však dostaneme tímto způsobem:

Parametry první rotace kolem přímky a v rovnicích II.' buďtež T_a, A_{hk}, parametry druhé rotace kolem přímky b buďtež T_b, B_{hk}; parametry výsledné rotace kolem přímky c označme T_c, C_{hk}.

Sečtěme koeficienty při X v rovnici pro X', při Y v rovnici pro Y' a při Z v rovnici pro Z' systému II'., tedy $2T^2 + 2A_{23}^2 - 1$ atd.; obdržíme

$$6T^2 - 3 + 2(A^2_{23} + A^2_{31} + A^2_{12}) = 4T^2 - 1,$$

protože $A^2_{23} + A^2_{31} + A^2_{12} = 1 - T^2$.

Koeficient při X v rovnici pro X'' (bodu po obou rotacích) jest $(2T^2 + 2B^2_{23} - 1)(2T_a^2 + 2A^2_{23} - 1) + 4(B_{13}B_{32} - B_{12}T_b)(A_{23}A_{31} - A_{21}T_a) + 4(B_{12}B_{23} - B_{13}T_b)(A_{32}A_{21} - A_{31}T_a)$
$= 4T_a^2 T_b^2 - 2T_a^2 - 2T_b^2 + 1 + 4T_a^2 B_{23}^2 + 4T_b^2 A_{23}^2 +$
$+ 4A_{23}^2 B_{23}^2 - 2A_{23}^2 - 2B_{23}^2 + 4(A_{23}A_{31}B_{13}B_{32} + A_{32}A_{21}B_{12}B_{23})$
$- 4T_a(A_{21}B_{13}B_{32} + A_{31}B_{12}B_{23}) - 4T_b(B_{12}A_{23}A_{31} + B_{13}A_{32}A_{21}) +$
$+ 4T_a T_b(A_{21}B_{12} + A_{31}B_{13})$.

Sečtěme tento koeficient s koeficientem při Y pro Y'' a s koeficientem při Z pro Z''; dostaneme $12T_a^2T_b^2 - 6T_a^2 - 6T_b^2 + 3 + 4T_a^2(1 - T_b^2) + 4T_b^2(1 - T_a^2) + 4(A_{23}^2 B_{23}^2 + A_{31}^2 B_{31}^2 + A_{12}^2 B_{12}^2) - 2(1 - T_a^2) - 2(1 - T_b^2) + 8(A_{23}B_{23}A_{31}B_{31} + A_{23}B_{23}A_{12}B_{12} + A_{31}B_{31}A_{12}B_{12}) - 8T_aT_b(A_{12}B_{12} + A_{23}B_{23} + A_{31}B_{31} = 4T_a^2T_b^2 - 1 - 8T_aT_b(A_{12}B_{12} + A_{23}B_{23} + A_{31}B_{31}) + 4(A_{23}^2B_{23}^2 + A_{31}^2B_{31}^2 + A_{12}^2B_{12}^2) + 8(A_{23}B_{23}A_{31}B_{31} + A_{23}B_{23}A_{12}B_{12} + A_{31}B_{31}A_{12}B_{12}) = 4[T_aT_b - (A_{23}B_{23} + A_{31}B_{31} + A_{12}B_{12})]^2 - 1$.

Srovnáním vyplývá

$$\pm T_c = T_a T_b - (A_{23} B_{23} + A_{31} B_{31} + A_{12} B_{12}).$$

Koeficient $\widehat{y}$ při X v rovnici pro X'' u rotace kolem přímky c a u produktu obou rotací kolem přímek a, b jsou si rovny, t. j.

$$2 T_c^2 + 2 C_{23}^2 - 1 = (2 T_b^2 + B_{23}^2 - 1)(2 T_a^2 + A_{23}^2 - 1) +$$
$$+ 4 (B_{13} B_{32} - B_{12} T_b)(A_{23} A_{31} - A_{21} T_a) + 4 (B_{12} B_{23} - B_{13} T_b)(A_{32} A_{21} - A_{31} T_a);$$

odtud se zřetelem k výrazu nalezenému pro T_c plyne

$$\pm C_{23} = T_a B_{23} + T_b A_{23} + A_{12} B_{31} - B_{12} A_{31}.$$

Obdobně platí

$$\pm C_{31} = T_a B_{31} + T_b A_{31} + A_{23} B_{12} - B_{23} A_{12},$$
$$\pm C_{12} = T_a B_{12} + T_b A_{12} + A_{31} B_{23} - B_{31} A_{23}.$$

Jestliže 1. rotace se stala kolem přímky směru ($\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$) o úhel ω_1, druhá kolem přímky směru ($\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$) o úhel ω_2 a rotace výsledná kolem přímky směru ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) o úhel ω, upravíme výsledky (co do znaménka vzhledem k spec. případu dvou souměrností) na tvar

$$\cos\frac{\omega}{2} = \cos\lambda \sin\frac{\omega_1}{2} \sin\frac{\omega_2}{2} - \cos\frac{\omega_1}{2} \cos\frac{\omega_2}{2},$$

kde $\cos\lambda = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$, λ tedy jest úhel obou os a, b;

$$\cos\alpha \sin\frac{\omega}{2} = \cos\alpha' \sin\lambda \sin\frac{\omega_1}{2} \sin\frac{\omega_2}{2}$$
$$- \cos\alpha_1 \sin\frac{\omega_1}{2} \cos\frac{\omega_2}{2} - \cos\alpha_2 \sin\frac{\omega_2}{2} \cos\frac{\omega_1}{2}$$

a dvě obdobné, kde ($\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$) je směr kolmý k oběma daným, tedy $\cos\alpha' \sin\lambda = \cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1$, atd.

5. Rotaci prostoru kolem přímky obecně položené o rovnicích

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

obdržíme jako produkt souměrností podle těchto rovin, při čemž o úhlu rotace ω platí

$$s_1 s_2 \cos\frac{\omega}{2} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \ (= t).$$

Do vzorce pro $s_1^2 s_2^2 X''$ (v odst. 2.), kde X'' je úsečka bodu otočeného, přibude při této obecné poloze rovin souměrnosti člen

$$4 a_2 d_1 t - 2 (a_1 s_2^2 d_1 + a_2 s_1^2 d_2)$$

a obdobně do vzorců pro ostatní dvě souřadnice.

Tento přistupující člen lze upraviti na tvar

$$2\, s_1{}^2 s_1{}^2 \left(n_1 \cos \alpha_1 \quad n_2 \cos \alpha_2 - 2 n_1 \cos \alpha_2 \cos \frac{\omega}{2}\right)$$

a obdobně ovšem ostatní dva, kde n_k, $\cos \alpha_k$, $\cos \beta_k$, $\cos \gamma_k$ značí délku a směrové kosiny normály vedené počátkem k 1. a 2. rovině uvedené (pro $k = 1$ resp. 2).

Aby tyto nové členy v rovnicích rotace se zjednodušily, zvolme za první rovinu souměrnosti jako složky rotace rovinu jdoucí počátkem, tedy $n_1 = 0$. Doplňky výrazů pro souřadnice bodu otočeného (ve skupině II.) nabudou tím krátkého tvaru

$$2 n_2 \cos \alpha_2, \quad \text{resp. } 2 n_2 \cos \beta_2, \quad \text{resp. } 2 n_2 \cos \gamma_2.$$

Místo délky a směru normály k rovině druhé souměrnosti (složky rotace) hleďme zavésti úhel otočení ω a konstanty určující osu rotace, totiž její směrové kosiny $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, směrové kosiny kolmice z počátku k ní vedené $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ a délku této kolmice n.

Platí předně $n_2 = n \sin \frac{\omega}{2}$. Abychom žádaným způsobem určili ještě $\cos \alpha_2$, $\cos \beta_2$, $\cos \gamma_2$, budeme řešiti soustavu rovnic

$$\begin{aligned} &\cos \alpha_2 \cos \alpha \cdot \cos \beta_2 \cos \beta + \cos \gamma_2 \cos \gamma = 0, \\ &\cos \alpha_2 \cos \alpha' + \cos \beta_2 \cos \beta' + \cos \gamma_2 \cos \gamma' - \sin \frac{\omega}{2}, \\ &\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_2 = 1, \end{aligned}$$

z nichž druhá rovnice vyjadřuje, že normála druhé roviny souměrnosti svírá s první rovinou úhel $\frac{\pi}{2} \quad \frac{\omega}{2}$.

Vyloučíme-li z rovnic těchto $\cos \beta_2$, $\cos \gamma_2$ a zavedeme-li do počtu kosiny $\cos \alpha''$, $\cos \beta''$, $\cos \gamma''$ směru kolmého ke směrům ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$) a ($\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$), obdržíme rovnici pro $\cos \alpha_2$ ve tvaru

$$\cos^2 \alpha_2 - 2 \cos \alpha' \sin \frac{\omega}{2} \cos \alpha_2 + \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\omega}{2} - \cos^2 \alpha'' = 0$$

(použijeme totiž při úpravě vztahů $\cos \beta \cos \gamma' - \cos \beta' \cos \gamma = \cos \alpha''$ a obdobných dvou, potom $\cos^2 \alpha'' + \cos^2 \beta'' + \cos^2 \gamma'' - 0$, $\cos \beta'' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma'' = \cos \alpha'$).

Řešíce tuto rovnici nalezneme

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha' \sin \frac{\omega}{2} + \cos \alpha'' \cos \frac{\omega}{2}$$

(se zřetelem k tomu, že $\cos^2 \alpha' + \cos^2 \alpha - 1 = - \cos^2 \alpha''$). Místo $\cos \alpha''$ můžeme ovšem psáti $\cos \beta \cos \gamma' - \cos \beta' \cos \gamma$. Obdobné výrazy platí pak pro $\cos \beta_2$ a $\cos \gamma_2$.

Přistoupí tedy do vzorců (II.) pro rotaci v případě *rotace kolem přímky obecně položené* směru ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$), mající od počátku vzdálenost n směru ($\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$) u výrazu pro X resp. Y' resp. Z' člen

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} &+ n\left(2\cos\alpha'\sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\alpha''\sin\omega\right),\\ &+ n\left(2\cos\beta'\sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\beta''\sin\omega\right),\\ &+ n\left(2\cos\gamma'\sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\gamma''\sin\omega\right),\end{aligned}$$

kde $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$ jsou kosiny směru kolmého k oběma směrům už uvedeným a tedy rovny $\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma$, resp. $\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha$, resp. $\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta$.

6. Zvláštním případem rotace kolem přímky jest souměrnost podle přímky jako rotace o úhel π. Transformační rovnice *souměrnosti podle přímky* směru ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), jež má od počátku vzdálenost n směru ($\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$), dostaneme tedy z rovnic (II.) a (III.) pro $\cos\omega = -1$, $\sin\omega = 0$, $\sin\frac{\omega}{2} = 1$; jsou to rovnice (IV.):

$$\begin{aligned} X' &= (2\cos^2\alpha - 1)X + 2\cos\alpha\cos\beta\, Y + 2\cos\alpha\cos\gamma\, Z + 2n\cos\alpha',\\ Y' &= 2\cos\beta\cos\alpha\, X + (2\cos^2\beta - 1)\, Y + 2\cos\beta\cos\gamma\, Z + 2n\cos\beta',\\ Z' &= 2\cos\gamma\cos\alpha\, X + 2\cos\gamma\cos\beta\, Y + (2\cos^2\gamma - 1)Z + 2n\cos\gamma'.\end{aligned}$$

Totéž vyjádření souměrnosti podle přímky obdržíme ostatně i přímo, formulujíce analyticky třebas podmínky, aby spojnice bodů sdružených byla kolmá k ose souměrnosti a aby střed úsečky omezené body těmi ležel na ose.

Výrazy pro souřadnice bodu souměrného k danému podle přímky (ve skupině IV.) liší se od výrazů pro souřadnice bodu souměrného k danému podle roviny (ve skupině I'.) v koeficientech pro X, Y, Z pouze znaménkem, což je přirozené. Neboť souměrnosti podle roviny, podle přímky k ní kolmé a podle průsečíku obou tvoří grupu o třech (záměnných) členech, souměrnost pak podle bodu (a, b, c) má rovnice $X' = 2a - X$, $Y' = 2b - Y$, $Z' = 2c - Z$.

Hledejme analytické vyjádření produktu dvou souměrností podle přímek p_1 a p_2, jež mají směr ($\cos\alpha_k$, $\cos\beta_k$, $\cos\gamma_k$), vzdálenost od počátku soustavy n_k a směr této kolmice ($\cos\alpha'_k$, $\cos\beta'_k$, $\cos\gamma'_k$) (pro $k = 1, 2$).

V transformačních rovnicích takového produktu mají součinitelé u X, Y, Z po úpravě týž tvar jako ve vzorcích (II.), při čemž $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny přímky kolmé k oběma osám souměrnosti a $\frac{\omega}{2}$ úhel těchto os; opačná znaménka koeficientů ve vzorcích (IV.) vůči koeficientům ve vzorcích (I'.) se při dvojnásobné aplikaci jich zajisté zruší.

Člen prostý jest pak ve výrazu pro X' tvaru

$$4n_1 \cos \alpha_2 (\cos \alpha_2 \cos \alpha'_1 + \cos \beta_2 \cos \beta'_1 + \cos \gamma_2 \cos \gamma'_1) + \\ + 2n_2 \cos \alpha'_2 - 2n_1 \cos \alpha'_1$$

a obdobně prosté členy ve výrazech pro Y' a Z'.

Všimněme si nejdříve dvou případů speciálních. Jestliže osy obou souměrností uvažovaných se protínají, jest produktem souměrností těch rotace kolem osy kolmé k oběma přímkám oněm o úhel ω; neboť v tom případě můžeme zvoliti osy p_1 a p_2 jdoucí počátkem, tedy $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, a rovnice resultující transformace redukují se na rovnice (II.).

Jestliže v druhém případě zvláštním platí $\cos \alpha'_2 = \cos \alpha'_1 = \cos \alpha$, $\cos \beta'_2 = \cos \beta'_1 = \cos \beta$, $\cos \gamma'_2 = \cos \gamma'_1 = \cos \gamma$, t. j. přímka protínající kolmo obě osy p_1 a p_2 souměrností-složek prochází počátkem soustavy, zkrátí se prosté členy ve vzorcích pro X', Y', Z' na $2(n_2 - n_1) \cos \alpha$, $2(n_2 - n_1) \cos \beta$, $2(n_2 - n_1) \cos \gamma$. Resultující transformace je pohyb šroubový s osou jdoucí počátkem o směru ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$), skládaje se z rotace, vyjádřené rovnicemi (II.), a z translace, vyjádřené členy právě uvedenými.

Abychom v obecném případě zjednodušili prosté členy ve výrazech pro souřadnice bodu transformovaného, zvolme přímku p_1 jdoucí počátkem, tedy $n_1 = 0$; absolutní členy ve vzorcích pro X', Y', Z' redukují se tím na

$$2n_2 \cos \alpha'_2, \quad 2n_2 \cos \beta'_2, \quad 2n_2 \cos \gamma'_2,$$

aniž by se porušila obecnost produktu dvou souměrností osových.

Za veličiny n_2, $\cos \alpha'_2$, $\cos \beta'_2$, $\cos \gamma'_2$ zaveďme sem konstanty určující polohu přímky p, jež kolmo protíná osy p_1 a p_2 obou souměrností, vedle směru jejího ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$) — jak je už ve vzorcích (II.) — směr kolmice ($\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$), spuštěné s počátku na ni, a délku n této kolmice, jakož i úhel $\frac{\omega}{2}$ a (nejkratší) vzdálenost v obou mimoběžných přímek p_1 a p_2.

O směrových kosinech kolmice jdoucí počátkem k přímce p_2 platí rovnice

$$\cos \alpha'_2 \cos \alpha_2 + \cos \beta'_2 \cos \beta_2 + \cos \gamma'_2 \cos \gamma_2 = 0,$$

$$\cos \alpha'_2 \cos \alpha + \cos \beta'_2 \cos \beta + \cos \gamma'_2 \cos \gamma = \frac{v}{n_2},$$

$$\cos^2 \alpha'_2 + \cos^2 \beta'_2 + \cos^2 \gamma'_2 = 1,$$

z nichž druhá vyjadřuje dvěma způsoby kosinus úhlu sevřeného uvedenou kolmicí a přímkou jdoucí počátkem rovnoběžně k ose mimoběžek p_1, p_2.

Odtud postupem obdobným počtu v odst. 5. nalezneme

$$\cos \alpha'_2 = \frac{1}{n_2} (v \cos \alpha + \cos \alpha_3 \sqrt{n_2^2 - v^2})$$

a výrazy analogické pro $\cos \beta'_2$ a $\cos \gamma'_2$; zde jest ($\cos \alpha_3$, $\cos \beta_3$, $\cos \gamma_3$) směr kolmý k směrům přímek p a p_2, je tedy $\cos \alpha_3 = \cos \beta \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma$ atd.

Avšak z trojúhelníku, jehož vrcholy jsou počátek soustavy souřadnic, pata kolmice s počátku na p_2 spuštěné a pata kolmice s počátku spuštěné na rovnoběžku vedenou bodem (pp_2) k přímce p_1, vyplývá relace $n_2^2 = v^2 + n^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}$; proto jest

$$n_2 \cos \alpha'_2 = v \cos \alpha + n \cos \alpha_3 \sin \frac{\omega}{2},$$

$$n_2 \cos \beta'_2 = v \cos \beta + n \cos \beta_3 \sin \frac{\omega}{2},$$

$$n_2 \cos \gamma'_2 = v \cos \gamma + n \cos \gamma_3 \sin \frac{\omega}{2}.$$

Abychom konečně z těchto výrazů odstranili $\cos \alpha_3$, $\cos \beta_3$, $\cos \gamma_3$, všimněme si, že pro tyto veličiny platí tytéž tři rovnice jako pro $\cos \alpha_2$, $\cos \beta_2$, $\cos \gamma_2$ v odst. 3.; jest tedy

$$\cos \alpha_3 = \cos \alpha' \sin \frac{\omega}{2} + \cos \alpha'' \cos \frac{\omega}{2}$$

a obdobně pro $\cos \beta_3$, $\cos \gamma_3$, kde ($\cos \alpha''$, $\cos \beta''$, $\cos \gamma''$) je směr kolmý k směrům ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$) a ($\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$).

Shrneme-li celý výpočet, shledáváme, že souřadnice bodu (X', Y', Z'), vznikajícího z bodu (X, Y, Z) produktem dvou souměrností podle přímek obecně položených, jsou souřadnicemi tohoto bodu vyjádřeny ve vzorcích skupiny (II.), k nimž přistupují u X' resp. Y' resp. Z' členy

$$\text{(V.)} \quad + n \left(2 \cos \alpha' \sin^2 \frac{\omega}{2} + \cos \alpha'' \sin \omega\right) + 2 v \cos \alpha,$$

$$+ n \left(2 \cos \beta' \sin^2 \frac{\omega}{2} + \cos \beta'' \sin \omega\right) + 2 v \cos \beta,$$

$$+ n \left(2 \cos \gamma' \sin^2 \frac{\omega}{2} + \cos \gamma'' \sin \omega\right) + 2 v \cos \gamma.$$

Spojené vzorce skupiny (II.) a (V.), podávající souřadnice bodu transformovaného (X', Y', Z') jako lineární funkce souřadnic bodu původního (X, Y, Z), jsou analytickým výrazem obecného pohybu v prostoru, totiž *pohybu šroubového kolem osy (obecně položené)* o směru ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$), jejíž vzdálenost od počátku soustavy souřadnic má délku n a směr ($\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$), při čemž ($\cos \alpha''$, $\cos \beta''$, $\cos \gamma''$) je směr kolmý k oběma směrům uvedeným; pohyb ten složen je z rotace kolem osy o úhel ω a z translace podél osy o délku v.