Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Augustin Vondráček

Rovinná kvintika rodu 2

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 3, 142--153

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123187`

Rovinná kvintika rodu dvě.

† **Aug. Vondráček**, Bratislava.

(Došlo 10. ledna 1935.)

1. Křivka 5. stupně má obecně rovnici o 21 členech: 3 tvaru x_1^5, 6 tvaru $x_1^4x_2$, 6 tvaru $x_1^3x_2^2$, 3 členy $x_1^3x_2x_3$, 3 členy $x_1^2x_2^2x_3$; je určena 20ti svými body. K stanovení uvažované kvintiky rodu dvě (označme ji k_2^5) je třeba vedle čtyř jejích bodů dvojných D_1, D_2, D_3, D_4 osmi bodů jednoduchých. Podle Plückerových vzorců má k_2^5 třídu 12, dvojných tečen 32, tečen inflexních 21.

Vložíme-li tři dvojné body do vrcholů O_1 (1, 0, 0), O_2 (0, 1, 0), O_3 (0, 0, 1) souřadného trojúhelníka, odpadnou členy se souřadnicemi v stupni pátém a čtvrtém v jednotlivých souřadnicích (celkem 9 členů), takže rovnice kvintiky rodu tři je

$$F \equiv x_1^3\varphi_{23} + x_2^3\varphi_{31} + x_3^3\varphi_{12} + dx_1x_2^2x_3^2 + ex_1^2x_2x_3^2 + fx_1^2x_2^2x_3 = 0, \tag{1}$$

kde

$$\varphi_{ij} = \overset{k}{a}_{ii}x_i^2 + 2\overset{k}{a}_{ij}x_ix_j + \overset{k}{a}_{jj}x_j^2 \ (i, j, k = 1, 2, 3, i, j \neq k)$$

jsou kvadratické formy proměnných s indexy i, j, $\varphi_{ij} = 0$ pak rovnice tečen v bodě O_k.

Čtvrtým dvojným bodem kvintiky k_2^5 buď bod jednotkový J (1, 1, 1), což dá pro koeficienty další tři podmínky

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1 = x_2 = x_3 = 1) = \\
&= 3\varphi_{23} + 2(\overset{2}{a}_{31} + \overset{2}{a}_{11}) + 2(\overset{3}{a}_{11} + \overset{2}{a}_{12}) + d + 2e + 2f = 0 \\
&\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1 = x_2 = x_3 = 1) = \\
&= 3\varphi_{31} + 2(\overset{3}{a}_{12} + \overset{3}{a}_{22}) + 2(\overset{1}{a}_{22} + \overset{1}{a}_{23}) + 2d + e + 2f = 0 \\
&\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1 = x_2 = x_3 = 1) = \\
&= 3\varphi_{12} + 2(\overset{1}{a}_{23} + \overset{1}{a}_{33}) + 2(\overset{2}{a}_{33} + \overset{2}{a}_{31}) + 2d + 2e + f = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

vázané relací

$$F\,(x_1 = x_2 = x_3 = 1) = \varphi_{23} + \varphi_{31} + \varphi_{12} + d + e + f = 0,$$

kde ovšem

$$\varphi_{ij} = \overset{k}{a}_{ii} + 2\overset{k}{a}_{ij} + \overset{k}{a}_{jj}.$$

Je tedy (1) s podmínkami (2) rovnicí kvintiky k_2^5 s dvojnými body O_1, O_2, O_3, J.

2. Uvažovanou kvintiku k_2^5 lze, jak známo, synteticky vytvořiti průsečíky jednojednoznačně přiřazených kuželoseček svazku Σk^2 a křivek 3. stupně svazku Σk^3, jestliže čtyři ze základních bodů svazku Σk^3 splývají se základními body Σk^2, tvoříce dvojné body D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ křivky k_2^5.

Kuželosečky $k_1^2, k_2^2, \ldots$ svazku Σk^2 protnou korespondující kubiky $k_1^3, k_2^3, \ldots$ z Σk^3 (mimo D_i) ještě v bodových párech $A, A'; B, B'; \ldots$ Podle věty *Bertiniho* pro křivky hypereliptické[1]) *obalují spojnice* $a \equiv \overline{AA'}$, $b \equiv \overline{BB'}, \ldots$ *kuželosečku* l^2,[2]) jež znamená pochopitelně výhodné zjednodušení konstruktivní, jehož v dalším bude užito.

3. Na kuželosečce l^2 lze sestrojiti následující příbuznost. Tečna a (obr.) v jejím bodě A protne k_2^5 v pěti bodech dvou různých skupin: jednak v průsečících *1, 2* s korespondující kuželosečkou k_a^2 svazku Σk^2, jednak v bodech *I, II, III*, patřících jiným kuželosečkám $k^2_{a_I}, k^2_{a_{II}}, k^2_{a_{III}}$ svazku, k nimž jsou projektivně přiřazeny tečny a_I, a_{II}, a_{III} k l^2 s dotyčnými body A_I, A_{II}, A_{III}, jež přiřaďme bodu A. Hledejme obráceně k bodu (třeba A_I) bod A. Tečna a_I protne odpovídající kuželosečku $k_{a_I}{}^2$ mimo I ještě v I^*,

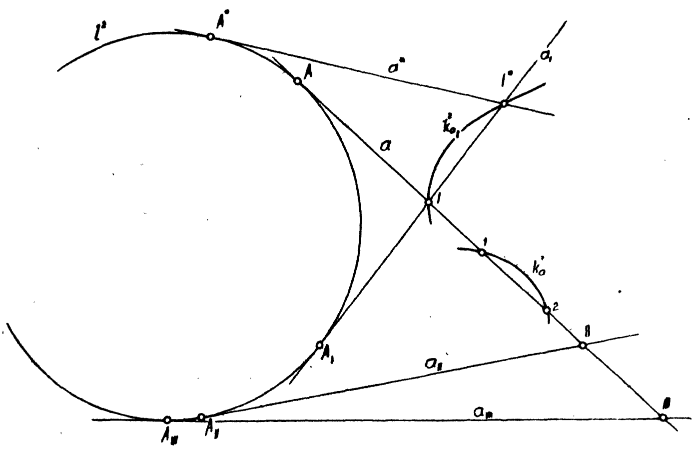
---

1) Uveř. v Ann. di mat. (2) **22** a zní: „Spojnice bodových dvojic jednomocného systému takových dvojic na hyperbolické křivce obalují racionální křivku třídy $n - p - 1$“ (n stupeň, p rod křivky). Na tuto větu byl jsem dodatečně laskavě upozorněn p. prof. Dr. *B. Bydžovským*, a proto vynechávám analytický výpočet, jímž jsem rovněž dospěl ke kuželosečce l^2.

2) Je to ostatně speciální případ tohoto vytvoření křivky: buď dána racionální křivka n-ho stupně l^n: $x_1 = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = f_1(t)$, $x_2 = b_n t^n + \ldots + b_0 = f_2(t)$, $x_3 = c_n t^n + \ldots + c_0 = f_3(t)$ a svazek kuželoseček Σk^2 o rovnici $k_1^2 + \varkappa k_2^2 = 0$. Tečně $y_1 (f_2 f'_3 - f_3 f'_2) + y_2 (f_3 f'_1 - f_1 f'_3) + y_3 (f_1 f'_2 - f_2 f'_1) = 0$ přikažme relací $a\varkappa t + b\varkappa + ct + d = 0$ kuželosečku z Σk^2 (koeficienty $f_i f'_k - f_k f'_i$ jsou stupně $2(n-1)$ v t). Po dosazení do rovnice tečny za $t = -\dfrac{b\varkappa + d}{a\varkappa + c} = \dfrac{bk_1^2 - dk_2^2}{-ak_1^2 + ck_2^2}$ dostaneme křivku $\Phi(y_1, y_2, y_3) = 0$ stupně $4(n-1) + 1 = 4n - 3$ jako místo průsečíků korespondujících prvků. Křivka $\Phi = 0$ má v základních bodech svazku Σk^2 body $2(n-1)$ násobné, představující $4(n-1)(2n-3)$ bodů dvojných. Její rod je tedy $\dfrac{(4n-3-1)(4n-3-2)}{2} - 4(n-1)(2n-3) = 2(n-1)$. Pro $n = 2$ máme právě k_2^5.

načež tečny z I, I^* (a, a^*) dají dotyčné body A, A^*. Tak zřízena na l^2 bodová (a tečnová) příbuznost (3, 2) s pěti koincidencemi.

Stane-li se bod A prvkem koincidenčním (na př. $A_I \equiv A$), přejde bod I v soumezný k A; poněvadž však bodem křivky $k_2{}^5$ prochází jediná příslušná kuželosečka svazku Σk^2, splynou současně jeden z bodů *1, 2* kuželosečky $k_a{}^2$ s bodem A. V koincidenčním bodě příbuznosti (3, 2) *splývají tudíž dva body různých skupin*, křivka $k_2{}^5$ se v něm l^2 *dotýká.* Tedy: *Kuželosečka l^2 dotýká se křivky $k_2{}^5$ v pěti bodech,* v nichž se však — jak patrno — nedotýkají (obecně) korespondující kuželosečky svazku Σk^2. Existuje



sice 6 kuželoseček ze Σk^2, dotýkajících se l^2 v dvojných bodech bikvadratické involuce, vytknuté svazkem na l^2, ale ty (obecně) s koincidenčními prvky z (3, 2) nesplývají. Dotyčných oněch pět bodů l^2 s $k_2{}^5$ jsou ovšem též koincidenčními body příbuznosti (1, 4) na l^2, utvořené bodovou řadou $A, B, \ldots$ a čtveřicemi zmíněné bikvadratické involuce průsečíků l^2 s korespondujícími kuželosečkami $k_a{}^2, k_b{}^2, \ldots$ svazku Σk^2.

4. Předchozí věty užijeme *k syntetickému určení křivky $k_2{}^5$ rodu dvě, dané čtyřmi dvojnými D_i ($i = 1, 2, 3, 4$) a osmi jednoduchými body A_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$) v obecné poloze.*

Při tom obecně položenými jsou body A_i tehdy, když příslušná kvintika je *vlastní.* Vylučujeme tedy hlavně případy: a) šest bodů A_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) patří přímce p; nastal by rozklad v p a kuželosečky $k_1{}^2$, $k_2{}^2$ svazku Σk^2 body A_7, A_8; b) tři z bodů A_i (A_1, A_2, A_3) patří kuželosečce k^2 svazku Σk^2 — kvintika je složená z k^2 a kubiky určené Di, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8; c) čtyři z bodů A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) patří přímce p incidentní s jedním z dvojných bodů (třeba D_1) — rozklad v p a racionálnou bikvadratiku určenou D_i, A_5, A_6, A_7, A_8

s dvojnými body v D_2, D_3, D_4; d) dva body (A_1, A_2) jsou incidentní se spojnicí p dvou dvojných bodů (třeba D_1, D_2) — křivka bude složená z p a bikvadratiky rodu jedna s D_2, D_3 jako dvojnými a D_1, D_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 jako body jednoduchými; e) body A_1, A_2 na $p = \overline{D_1D_2}$, A_3, A_4 na $q = \overline{D_1D_3}$; kvintika bude složená z p, q a racionální kubiky s dvojným bodem D_4 a D_2, D_3, A_5, A_6, A_7, A_8 body jednoduchými.

Snadno se synteticky určí kvintika, daná svými body dvojnými D_i ($i = 1, \ldots, 4$) a sedmi body A_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$), v náhradu pak za bod osmý podmínkou, že (třeba) body A_1, A_2, A_3, A_4 jsou s D_i základními body svazku kubik Σk^3; kuželosečkám svazku Σk^2 body A_5, A_6, A_7 jsou přiřazeny kubiky z Σk^3 týmiž body. Kvintika prochází ovšem též devátým bodem, asociovaným k A_1, A_2, A_3, A_4, D_i.

Při *obecné poloze* daných osmi bodů A_i je nyní postup patrný: sedm z bodů A_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$) určí s D_i svazek kvintik, z nichž určíme dvě ${}^1k_2{}^5$, ${}^2k_2{}^5$. Křivka ${}^1k_2{}^5$ buď vytvořena svazkem kubik Σk^3 o základních bodech (třeba) A_1, A_2, A_3, A_4, D_i a svazkem kuželoseček Σk^2, v kterýchžto svazcích přiřadíme křivky body A_5, A_6, A_7. Stanovme průsečíky kuželosečky $k_8{}^2$ svazku Σk^2, jdoucí bodem A_8 s korespondující kubikou svazku Σk^3 (úloha kvadratická); jich spojnicí je přímka a. Křivka ${}^2k_2{}^5$, podobným způsobem z bodů $A_1, \ldots, A_7$ určená, dá spojnici b svých průsečíků s $k_8{}^2$. Průsečík $(a, b) \equiv L$*) spojen s A_8 dá na $k_8{}^2$ druhý průsečík A'_8 žádané křivky s $k_8{}^2$, $\overline{LA_8}$ je ovšem zároveň jednou tečnou a_8 obálky l^2. Stanovením pěti takových tečen je l^2 jakož i křivka 5. stupně určena.

Konstruktivní zjednodušení nastane v případech zvláštní polohy daných osmi bodů A_i (při čemž kvintika zůstane vlastní), kdy totiž *jeden, dva, tři, resp. čtyři páry z A_i jsou incidentní s kuželosečkami svazku* Σk^2 (pro různé páry ovšem různými).

a) Nechť dva z bodů A_i (označme je A_1, A'_1, ostatní A_k ($k = 2, 3, \ldots, 6, 7$), $\overline{A_1A'_1} \equiv a_1$) patří kuželosečce $k_1{}^2$ z Σk^2. Sedmi body A_1, A'_1 a (třeba) A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 proložme opět dvě kvintiky ${}^1k_2{}^5$, ${}^2k_2{}^5$, při čemž ${}^1k_2{}^5$ je složená z kuželosečky $k_1{}^2$ a kubiky $k_1{}^3$ určené D_i, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, pro ${}^2k_2{}^5$ vezměme za základní body svazku kubik D_i a (třeba) A_1, A_2, A_3, A_4, z něhož třem křivkám body A_5, A_6, A'_1 přiřadíme tři kuželosečky z Σk^2 týmiž body. Kvintika ${}^1k_2{}^5$ (její část $k_1{}^3$) protne kuželosečku $k_7{}^2$ bodem A_7 v bodovém páru o spojnici a, ${}^2k_2{}^5$ v páru o spojnici b, $(a, b) \equiv L$, načež $\overline{A_7L} \equiv a_7$ protne $k_7{}^2$ v bodě A'_7 kvintiky; a_1, a_7 jsou již tečnami kuželosečky l^2, plně určené ještě dvěma tečnami (třeba)

*) L je střed involuce, kterou onen svazek kvintik vytíná na kuželosečce $k_8{}^2$.

a_5, a_6 body A_5, A_6. Neboť označíme-li t_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ tečny v dvojném bodě (třeba) D_1 ke kuželosečkám k_i^2 $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ z Σk^2 body A_1 (A'_1), $A_2, \ldots, A_7$, platí mezi a_i, t_i jednojednoznačná korespondence, takže označíme-li $k \equiv (a_k, a_1)$, $(k = 1, 2, \ldots, 7)$ průsečíky a_k s a_1, určíme z *5, 6, 7* další vztahem

$$a_1\,(1, 2, 3, 4, \ldots, 7)\,\pi D_1\,(t_1 t_2 t_3 t_4 \ldots t_7), \tag{23}$$

kde *1* je bodem dotyčným kuželosečky l^2 tečny a_1; tím kvintika synteticky plně určena.

Leč kuželosečku l^2 možno určiti *přímo, bez dvojných bodů D_i* a svazku kuželoseček Σk^2, jen je-li dán svazek přímek t_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ (o středu Q libovolném, nebo řada bodů, nebo vůbec útvar z prvků, schopných příbuznosti (1, 1) s prvky jiného útvaru) užitím projektivního vztahu (23) čili $a_i \pi t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$.

Zvolme na a_1 bod $1'$, jímž a body A_2, A_3, A_4 sestrojme kuželosečku m_1^2, aby $1'$ $(t'A_2A_3A_4)\,\pi Q\,(t_1t_2t_3t_4)$ (t' tečna v $1'$). Pro jiný bod $1'_0$ na a_1 dostaneme podobně kuželosečku m'_2, pro niž $1'_0$ $(t'_0A_2A_3A_4)\,\pi Q\,(t_1t_2t_3t_4)$. Obě kuželosečky se protnou v čtvrtém bodě X, jenž musí zřejmě býti incidentní s a_1. Všechny kuželosečky m^2 žádané vlastnosti tvoří tudíž svazek o základních bodech A_2, A_3, A_4, X.

Podobně postupujeme pro druhou skupinu bodů A_5, A_6, A_7: zvolme na a_1 bod $1''$, jímž a body A_5, A_6, A_7 sestrojme kuželosečku n_1^2, aby $1''$ $(t''A_5A_6A_7)\,\pi Q\,(t_1t_5t_6t_7)$; druhý průsečík Y kuželosečky n_1^2 s a_1 tvoří s A_5, A_6, A_7 základní body svazku kuželoseček n^2.

Z prvého svazku vezměme kuželosečku m^2, pro niž $1' \equiv Y$, z druhého kuželosečku n^2, pro kterou $1'' \equiv X$. Sestrojme ve svazku Y paprsky a'_5, a'_6, a'_7, protínající m^2 v bodech A'_5, A'_6, A'_7 tak, aby

$$Y\,(t'A_2A_3A_4A'_5A'_6A'_7)\,\pi X\,(YA_2A_3A_4A'_5A'_6A'_7)\,\pi Q\,(t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7)$$

(t' tečna m^2 v Y) a podobně ve svazku X paprsky a''_2, a''_3, a''_4, protínající n^2 v A''_2, A''_3, A''_4, aby

$$X\,(t''A''_2A''_3A''_4A_5A_6A_7)\,\pi Y\,(XA''_2A''_3A''_4A_5A_6A_7)\,\pi Q\,(t_1t_2t_3 \ldots t_7)$$

(t'' tečna n^2 p X).

Perspektivní svazky

$$X\,(YA_2A_3A_4A'_5A'_6A'_7)\,\pi Y\,(XA''_2A''_3A''_4A_5A_6A_7)$$

mají osu perspektivity Δ, jejíž průsečíky s m^2 patří zřejmě i kuželosečce n^2. Spojnice korespondujících bodů kvadratických řad $(YA_2A_3A_4A'_5A'_6A'_7)$, $(XA''_2A''_3A''_4A_5A_6A_7)$ kuželoseček m^2, n^2, t. j. $\overline{XY} \equiv a_1$, $\overline{A_2A'_2} \equiv a_2$, $\overline{A_3A'_3} \equiv a_3$, atd. jsou již hledanými tečnami kuželosečky l^2.

Správnost konstrukce vysvítá též z prostorové úvahy: l^2 je obrysovou kuželosečkou průmětu sborcené plochy 2-ho stupně, jejíž površky spojují odpovídající body projektivních řad kvadratických na dvou kuželosečkách o průmětech m^2, n^2, při čemž obě řady mají samodružné body na přímce Δ (průsečnici rovin obou kuželoseček).

Tím zároveň rozřešena zajímavá úloha z projektivní geometrie: *Dána přímka* a_1, *šest bodů* $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ *a svazek přímek* t_i $(i = 1, 2, 3, \ldots 7,)$; *sestrojiti kuželosečku* l^2, *dotýkající se přímky* a_1 *a přímek* a_k *body* A_k $(k = 2, 3, \ldots, 7)$ *tak, že* $a_i \pi t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$.

b) Z bodů A_i nechť dva páry $(A_1, A'_1;\ A_2, A'_2$; ostatní A_3, A_4, A_5, A_6, $\overline{A_1A'_1} \equiv a_1$, $\overline{A_2A'_2} \equiv a_2)$ patří kuželosečkám k_1^2, k_2^2 z Σk^2.

Užijme svazku kvintik body $D_i, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A_4, A_5$, v němž lze sestrojiti dvě kvintiky složené z kuželosečky k_1^2 a křivky 3. st. k_1^3 body $D_i, A_2, A'_2, A_3, A_4, A_5$, pak z k_2^2 a kubiky k_2^3 body $D_i, A_1, A'_1, A_3, A_4, A_5$.

Pro k_1^3 snadno stanovíme bod P_1 na a_2, protilehlý k bodům D_i jakožto bod, z něhož se $A_2(A'_2), A_3, A_4, A_5$ promítají paprskovou čtveřicí téhož dvojpoměru jako tečny k příslušným kuželosečkám k_i^2 z Σk^2: $P_1\ (A_2A_3A_4A_5)\ \pi D_i\ (t_2t_3t_4t_5)$. Zvolne na a_2 bod $2'$, z něhož se bod na a_2 k $2'$ soumezný a body A_3, A_4 promítají paprskovou trojicí a_2, a'_3, a'_4, v níž stanovme paprsek a'_5 tak, aby $2'\ (a_2a'_3a'_4a'_5)\ \pi D_i\ (t_2t_3t_4t_5)$. Paprsek a'_5 nebude obecně incidentní s A_5. Zvolme proto jiný bod $2''$ na a_2 a sestrojme a''_5, aby $2''\ (a_2a''_3a''_4a''_5)\ \pi D_i\ (t_2t_3t_4t_5)$, kde $a''_3 \equiv \overline{2''A_3}$, $a''_4 \equiv \overline{2''A_4}$. Perspektivní svazky $2'\ (a_2a'_3a'_4a'_5)$, $2''(a_2a''_3a''_4a''_5)$ mají osu perspektivity v přímce A_3A_4, na níž se protínají i přímky a'_5, a''_5 v bodě, jenž spojen s A_5 dá na a_2 žádaný bod P_1.

Právě tak stanovíme na a_1 bod P_2, protilehlý k bodům D_i pro křivku k_2^3. Obě kubiky protnou kuželosečku k_6^2 bodem A_6 v bodových párech (jichž netřeba rýsovati), jichž spojnice a, b procházejí P_1, P_2 a jež projektivním přiřazením k tečně t_6 kuželosečky k_6^2 v D_i snadno sestrojíme. Průsečík $(a, b) \equiv L$ spojen s A_6 dá další tečnu $A_6L \equiv a_6$ kuželosečky l^2; další postup patrný.

Z celého postupu zřejmo, že bod L a tedy i a_6 a tudíž i kuželosečku l^2 lze stanoviti bez dvojných bodů D_i, stačí, dán-li svazek $Q\ (t_1t_2 \ldots t_6)$.

Tím řešena úloha:

Dány přímky a_1, a_2, *body* A_3, A_4, A_5, A_6 *a svazek přímek* t_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$; *sestrojiti kuželosečku* l^2, *dotýkající se* a_1, a_2 *a přímek* a_k *incidentních s danými body* A_k $(k = 3, 4, 5, 6)$, *aby* $a_i\ \pi\ t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

c) Z bodů A_i buďte tři páry (A_1, A'_1; A_2, A'_2; A_3, A'_3, spojnice a_1, a_2, a_3) na kuželosečkách k_1^2, k_2^2, k_3^2 svazku Σk^2; ostatní označme A_4, A_5.

Ve svazku kvintik o základních bodech D_i, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3, A_4 užijeme s výhodou dvou křivek složených: z kuželosečky k_1^2 a kubiky k_1^3 body D_i, A_2, A'_2, A_3, A'_3, A_4, jejím bodem k D_i protilehlým je $P_1 \equiv (a_2, a_3)$, z kuželosečky k_2^2 a kubiky k_2^3 body D_i, A_3, A'_3, A_1, A'_1, A_4 s $P_2 \equiv (a_3, a_1)$ jako protilehlým k D_i. Ve svazku o středu P_1 sestrojme paprsek a'_5, aby $P_1(a_2, a_3, A_4, a'_5)$ πD_1 $(t_2t_3t_4t_5)$, podobně ve svazku P_2 paprsek a''_5, aby P_2 $(a_1a_3A_4a''_5)$ πD_1 $(t_1t_3t_4t_5)$. Průsečík $L \equiv (a'_5, a''_5)$ spojen s A_5 dá tečnu a_5 kuželosečky l^2, načež tečna a_4 bodem A_4 určena podle $(a_1a_2a_3a_4a_5)$ πD_1 $(t_1t_2t_3t_4t_5)$. Opět patrno, že konstrukci kuželosečky l^2 možno provésti bez dvojných bodů D_i, je-li dán příslušný svazek $Q(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$.

Řešena tedy i úloha:

Dány přímky a_1, a_2, a_3, *body* A_4, A_5 *a svazek přímek* t_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$; *sestrojiti kuželosečku* l^2, *dotýkající se přímek daných a přímek* a_4, a_5 *body* A_4, A_5 *tak, aby* $a_i \,\pi\, t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$.

d) Čtyři páry z bodů A_i (A_1, A'_1; A_2, A'_2; A_3, A'_3; A_4, A'_4, spojnice a_1, a_2, a_3, a_4) patří kuželosečkám k_i^2 $(i = 1, 2, 3, 4)$ z Σk^2.

Řešení patrno: označíme-li *2, 3, 4* průsečíky a_1 s a_2, a_3, a_4, je pro dotyčný bod *1* tečny a_1: a_1 $(1, 2, 3, 4)$ πD_1 $(t_1t_2t_3t_4)$, čímž kuželosečka l^2 plně určena.

Znění příslušné úlohy proj. geometrické je zřejmé.

5. V odst. 2 uvedené vytvoření kvintiky k_2^5 průsečíky kuželoseček svazku Σk^2 a jim korespondujících tečen kuželosečky l^2 umožňuje *i konstrukci tečny* této křivky, k níž dospějeme touto prostorovou úvahou:

Buď dán čtyřhran o vrcholu O, hranách d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ a přímka m. Třem bodům A^1, B^1, C^1 na m přiřaďme tři roviny α, β, γ touto přímkou. Každá z těchto rovin protne hrany d_i v čtyřech bodech, jimiž a body A^1, B^1, C^1 jsou v rovinách α, β, γ stanoveny kuželosečky k_1^2, k_2^2, k_3^2, protínající m ještě v bodech A^2, B^2, C^2, tvořících s A^1, B^1, C^1 páry kvadratické involuce. Kuželosečky v rovinách svazku m, protínající hrany d_i a vytínající na m páry involuce, při čemž $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) \,\pi\, (A^1A^2, B^1B^2, C^1C^2, \ldots)$, vyplní plochu 3. stupně K^3 s O jako bodem dvojným. Rovina (mO) obsahuje kuželosečku, složenou z přímek $\overline{OU^1} \equiv u^1$, $\overline{OU^2} \equiv u^2$, při čemž U^1, U^2 patří rovněž kvadratické involuci na m. Šest přímek d_i, u^1, u^2 tvoří skupinu dvojšestice (po dvou splývajících) přímek plochy, mimo ně má K^3 ještě 15 přímek (jedna z nich je m).[3])

[3]) Srov.: Dr. *Jan Vojtěch*, Projektivní geometrie, Praha 1932, str. 491.

Z bodu O promítají se uvedené kuželosečky plochy K^3 do roviny π, jež není s O incidentní, právě *ve svazek kuželoseček* Σk^2 *o základních bodech* D_i (průmětech d_i); kuželosečka složená z přímek u^1, u^2 se promítá ovšem do bodů U^1, U^2 na m,[4]) jimi však též prochází jedna z kuželoseček Σk^2.

Přímka m plochy K^3 buď zároveň povrchovou přímkou zborcené plochy 2. stupně K^2, neincidentní s O. Výše užité roviny $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ svazku m protnou K^2 ještě v površkách řady prvé $a, b, c, \ldots$, jež protnou kuželosečky $k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots$ plochy K^3 v týchž rovinách v bodových párech $A\,A'$; B, B'; C, C'; ...

Obě plochy K^3, K^2 se pronikají (mimo m) v prostorové křivce stupně pátého c^5, mající površky prvé řady $a, b, c, \ldots$ za bisekanty, tudíž površky řady druhé $m, n, p, q, \ldots$ za trisekanty. Mimo to přímky d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) plochy K^3 jsou též bisekantami křivky c^5, protínajíce ji v průsečících K^2 s d_i; u^1, u^2 jsou ovšem unisekantami c^5.[5])

Průmětem plochy K^2 z O do π je *právě kuželosečka* l^2, průmět to dotyčné kuželosečky l^2 dotyčného kužele (OK^2), jejíž každá tečna je průmětem vždy dvou površek různých řad.

Proniková křivka c^5 se promítá z O do π v *obecnou kvintiku rodu dvě* k_2^5 s dvojnými body D_i ($i = 1, 2, 3, 4$), průměty to bisekant d_i křivky c^5. Kuželosečky plochy K^3 a površky prvé řady plochy K^2 v rovinách $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ svazku m dají v průmětně π kuželosečky svazku Σk^2 a projektivní k nim řadu tečen kuželosečky l^2 $[(k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots) \,\pi\, (a, b, c, \ldots)]$, jež podle odst. 2 vytvořují právě křivku k_2^5. Tečnami dvojných bodů D_i křivky k_2^5 jsou stopy tečných rovin (incidentních s O) v průsečících K^2 s d_i.

Tím je (po promítnutí z O) blíže osvětlena různost bodových pětiskupin po třech a po dvou na tečnách kuželosečky l^2, o nichž byla zmínka v odst. 3. Označme jednomocnou soustavu dvojbodovou průsečíků $A, A' \equiv (a, k_1^2)$, $B, B' \equiv (b, k_2^2), \ldots$ krátce g_2^1, soustavu trojbodovou g_3 (ta ovšem není na k_2^5 jediná: paprsky svazků D_i vytínají na k_2^5 soustavy rovněž trojbodové). Pět koincidenčních prvků příbuznosti (3, 2) na l^2 z téhož odst. pochází od pěti (vedle šestého na m) průsečíků kuželosečky dotyčné l^2 s plochou K^3: tečny pronikové křivky c^5 v nich se promítají do tečen průmětu kuželosečky l^2.

Předchozí úvaha umožňuje nyní *konstrukci tečny kvintiky* k_2^5 v jejím bodě A. Poněvadž tečná rovina τ plochy K^2 je jednoduše určena povrchovými přímkami a, q řady prvé a druhé bodem A procházejícími (jichž stejnojmenné průměty jsou tečnami a, q

[4]) Průměty označeny pro jednoduchost stejně jako útvary v prostoru.
[5]) Srov. též Dr. J. Vojtěch, Projektivní geometrie, str. 677 a násl. o *monoidním vyjádření* prostorové křivky.

z A k l^2), stačí sestrojiti tečnu t průsečné křivky roviny $\tau \equiv (a, q)$ s plochou K^3. Rovina τ protne K^3 v křivce 3. st. c^3, protínající přímky d_i ($i = 1, 2, 3, 4$), u^1, u^2, procházející body $A, A', {}^1A, {}^2A$, kde A' patří s A na a soustavě g_2^1, ${}^1A, {}^2A$ na q s A soustavě g_3. Průmět křivky c^3 z O do π prochází tudíž body dvojnými D_i, U^1, U^2, $A, A', {}^1A, {}^2A$; tečna t tohoto průmětu v A je *už hledanou tečnou kvintiky* k_2^5 *v* A.

Pár U^1, U^2 je na přímce $m \equiv e$ [e průmět površky prvé řady plochy K^2 v rovině (mO)] bodovým párem soustavy g_2^1. Poněvadž za společnou přímku m ploch K^3, K^2 lze (v průmětě) zvoliti libovolnou jinou tečnu kuželosečky l^2 a tím bodový pár U^1, U^2 kubiky c^3 zaměniti jiným párem z g_2^1, jsme vedeni k jednoduše nekonečnému množství těchto kubik, v bodě A se kvintiky dotýkajících a tvořících *svazek* o základních bodech $D_i, A, A', {}^1A, {}^2A$ a k A soumezném, k nim *asociovaném bodě* jako devátém.

Dospějeme tudíž k tečně kvintiky k_2^5 v jejím bodě A takto: *Sestrojíme k bodu A body* A'; ${}^1A, {}^2A$, *tvořící s ním soustavu* g_2^1 *resp.* g_3; *tečna* t *v bodě* A *kterékoli kubiky body* $D_i, A, A', {}^1A, {}^2A$ *je už tečnou kvintiky* k_2^5 *v* A.

Patrně: *Všecky kubiky svazku o základních bodech* D_i, A, A', ${}^1A, {}^2A$ (v A se kvintiky k_2^5 dotýkající) *protínají kvintiku ještě v bodových párech soustavy* g_2^1.

6. Uveďme ještě jedno možné vytvoření kvintiky k_2^5, jež je v souvislosti s předchozím jejím určením svazkem kuželoseček a projektivní s ním řadou tečen kuželosečky l^2.

Tečna m_0 kuželosečky l^2 nechť protne korespondující kuželosečku k^2_{m0} z Σk^2 v bodech M_0, M'_0 z g_2^1, spojnici dvojných bodů $\overline{D_3D_4} \equiv d_{34}$ v bodě M^*, z něhož druhá tečna m k l^2 nechť protne příslušnou k_m^2 z Σk^2 v páru M, M' z g_2^1. Potom podle věty Desarguesovy jsou body $D_1, D_2, M_0, M'_0, M, M'$ incidentní s kuželosečkou $k^2_{M^*}$, protínající k_2^5 ještě v bodech X, Y. Jednotlivé kuželosečky svazku (D_1, D_2, X, Y) vytnou z kuželoseček Σk^2 páry involuce o středech $M^*, N^*, \ldots$ na d_{34}; v každé z těchto involucí existují (na tečnách l^2 z $M^*, N^*, \ldots$) dva páry, patřící g_2^1 křivky k_2^5.

Tím se sobě přiřazují páry tečen m_0, m; n_0, n; ... kuželosečky l^2, tvořící involuční řadu tečen o ose d_{34} a kuželosečky svazku (D_1, D_2, X, Y), *jež vytvořují průsečíky korespondujících prvků rovněž křivku* k_2^5.

Samodružnými body této příbuznosti na d_{34} jsou jednak body dvojné D_3, D_4, v nichž se d_{34} dotýkají dvě kuželosečky svazku (D_1, D_2, X, Y), jednak bod D_{34}, pátý to průsečík k_2^5 s d_{34}.

Jde ještě o určení bodů X, Y. Kuželosečka z Σk^2, složená z přímek $\overline{D_1D_2}$, $\overline{D_3D_4} \equiv d_{34}$ protne k_2^5 v bodech D_{12}, D_{34} z g_2^1;

$\overline{XY}$ prochází tudíž bodem D_{34} a poněvadž kuželosečka z (D_1, D_2, X, Y), složená z $\overline{D_1D_2}$, $\overline{XYD_{34}}$ musí (mimo D_{12}, D_{34}) míti ještě jeden pár z g_2^1, musí $\overline{XY}$ býti druhou tečnou (vedle $\overline{D_{12}D_{34}}$) kuželosečky l^2 z D_{34}. X, Y nemohou ovšem splynouti s tímto párem z g_2^1, poněvadž by kuželosečky z (D_1, D_2, X, Y) obsahovaly tři takové páry z g_2^1, což nemožno. *I musí býti body X, Y totožny s body ${}^1D_{34}$, ${}^2D_{34}$, patřícími s D_{34} skupině trojbodové g_3.* Tedy:

Kvintika k_2^5 je též vytvořena průsečíky párů kvadratické involuce tečen kuželosečky l^2 a s ní projektivních kuželoseček svazku, při čemž spojnice dvou základních bodů tohoto svazku (netvořících dvojné body křivky) *je prvkem oné kvadratické involuce* (tečnou l^2).

Dvojná tečna involuce (tečna l^2 v průsečíku d_{34} s l^2) protne příslušnou kuželosečku svazku (D_1, D_2, ${}^1D_{34}$, ${}^2D_{34}$) v dvou párech bodů soumezných, t. j. kuželosečka ta se k_2^5 ve dvou bodech *dotýká*; takové kuželosečky jsou ovšem dvě.

Patrně též platí:

Kvintika k_2^5 je místem průsečíků jedno-dvojznačně přiřazených kuželoseček dvou svazků o dvou společných základních bodech; zá-základní body svazku dvojznačného jsou dvojnými body křivky [jsou to ve výše uvedeném označení svazky (D_1, D_2, ${}^1D_{34}$, ${}^1D_{34}$) a Σk^2].

7. Všimněme si nyní některých *složitějších singularit* kvintiky k_2^5, vzniklých jednak ze splynutí dvojných jejích bodů, jednak ze splynutí tečen jednotlivých dvojných bodů v hroty.

a) Jestliže kuželosečky svazku Σk^2 se v bodě $D_1 \equiv D_2 \equiv D$ dotýkají tečny t, je *D dvojným dotykovým* (taknodálním) bodem křivky.

Pro tři soumezné body dvojné v D oskulují se kuželosečky svazku Σk^2 v D, jenž je *dvojným bodem oskulačním* (osknodálním) kvintiky.

Jsou-li všechny čtyři základní body Σk^2 soumezné v D, stává se *D dvojným bodem hyperoskulačním* (hyperosknodálním) pro k_2^5.

b) Splynou-li tečny dvojného bodu (třeba) D_1 v tečnu jedinou (přímka d_1 plochy K^3 z odst. 5 se v $A_1 \equiv B_1$ plochy K^2 dotýká), je *D_1 hrotem* kvintiky, jež je třídy 11té, s 24 tečnami dvojnými a 19 tečnami inflexními. Tu stanou se soumeznými i tečny z D_1 ku l^2, t. j. *kuželosečka l^2 prochází hrotem D_1*.

Tak je tomu postupně pro jeden, dva, tři, čtyři hroty; křivka k_2^5 má třídu 11, 10, 9, 8 s 24, 17, 11, 6ti tečnami dvojnými a 19, 17, 15, 13ti tečnami inflexními.

V posledním případě, kdy všechny čtyři body D_i jsou hroty, *stává se kuželosečka l^2 prvkem svazku Σk^2, dotýkajíc se kvintiky* *v jednom bodě* Q, jenž s body D_i tvoří skupinu pěti bodů v odst. 3 uvedených, v nichž se kvintika l^2 dotýká.

Je tedy syntetické vytvoření kritiky s čtyřmi hroty patrno: stačí přiřaditi třem kuželosečkám z Σk^2 tři tečny kuželosečky l^2 z Σk^2. Dotyčný bod Q kuželosečky l^2 s $k_2{}^5$ je dotyčným bodem tečny na l^2, *korespondující* l^2 *jako prvku svazku*. Tečny hrotů D_i jsou tečnami v D_i kuželoseček z Σk^2, odpovídajících tečnám l^2 v D_i.

c) Splyne-li dvojný bod D_1 s hrotem D_2, má křivka v bodě $D \equiv D_1 \equiv D_2$ *hrot druhého druhu* (bod návratu). Křivka vznikne projektivním přiřazením kuželoseček svazku Σk^2, dotýkajících se v D a tečen kuželosečky l^2, jež je incidentní s D.

Další možné singularity jsou patrny: hrot může splynouti s bodem taknodálním v hrot dotykový, nebo s bodem osknodálním v hrot oskulační.

Při splynutí dvou hrotů $D_1 \equiv D_2 \equiv D$ splyne tečna kvintiky v D s tečnou kuželosečky l^2 v témž bodě; při splynutí tří hrotů oskuluje kuželosečka l^2 kuželosečky Σk^2 a při čtyřech soumezných hrotech je l^2 opět prvkem svazku Σk^2.

d) K uvedeným hypereliptickým kvintikám druží se kvintika rodu rovněž dvě, mající však onen lineární systém dvojbodový $g_2{}^1$ speciální. Je to kvintika s bodem trojnásobným D_1 a dalším bodem dvojnásobným D_2. Paprsky bodem trojnásobným vytínají na kvintice právě bodové páry speciálního $g_2{}^1$. Křivka ta je synteticky určena známým způsobem: průsečíky korespondujících křivek svazku racionálních kubik o základních bodech D_1 (jejich bodě dvojném), D_2, B_1, B_2, B_3, B_4 a s ním projektivního svazku kuželoseček o základních bodech D_1, D_2, C_1, C_2 nebo též paprskovou příbuzností (3, 2) o středech D_1, D_2.

*

Courbe plane de $5^{\text{ième}}$ ordre de genre deux.

(Extrait de l'article précédent.)

Cette courbe $k_2{}^5$ est engendrée par deux faisceaux projectifs: un faisceau de coniques Σk^2 et un faisceau de cubique, ces faisceaux ayant quatre points de base (points doubles de $k_2{}^5$) communs.

A l'aide des théorèmes a): les droites joignant les paires de points d'intersection des courbes correspondantes k^2, k^3 (points du système linéaire $g_2{}^1$ de $k_2{}^5$) ont pour enveloppe une conique l^2 et b) les courbes d'un certain faisceau de $k_2{}^5$ coupent chaque conique de Σk^2 en des points d'une involution, l'auteur donne la construction de $k_2{}^5$, déterminée par ses points doubles et par huit points simples. Il fait voir comment se simplifie le procédé indiqué en cas de positions spéciales des huit points simples, où un, deux, trois ou quatre paires sont situées sur les coniques de Σk^2. Il construit la tangente au point de k_2^5 comme tangente d'un certain faisceau de cubiques.

La courbe considérée est aussi le lieu des points d'intersection d'un faisceau de coniques et d'une involution de tangentes de l^2, projectifs.

Enfin, l'auteur considère quelques singularités composées que peut présenter cette courbe.