Literatura

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 3, D117--D128

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123184

LITERATURA.

A. Recense vědeckých publikací.

Antoni Zygmund: Trigonometrical series. Monografje matematyczne, sv. 5. Warszawa, Sem. matem. uniw. Warsz., 1935. IV, 332 str. Kč 135,—. — **Stefan Kaczmarz a Hugo Steinhaus:** Theorie der Orthogonalreihen. Monografje matematyczne, sv. 6. Warszawa, Sem. matem. uniw. Warsz., 1935. VI, 300 str. Kč 135,—.

Pokusím se objasniti čtenáři problémy, o nichž tyto knihy pojednávají. Teorie ortogonálních řad spočívá na pojmech, souvisejících s pojmem integrálu. Ve shodě s oběma uvedenými knihami budeme integrál bráti ve smyslu Lebesgueově.[1])

Budiž $\langle a, b\rangle$ konečný interval; budiž $p \geqq 1$. O funkci $f(x)$ budeme říkati, že patří k třídě L^p, jestliže integrál $\int_a^b | f(x) |^p \, dx$ konverguje. Na př. pro $a = 0$, $b = 1$ patří funkce $x^{-\frac{1}{2}}$ do každé třídy L^p, kde $p < 2$, ale nepatří do žádné třídy L^p, kde $p \geqq 2$; neboť $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}p} \, dx$ konverguje pro $p < 2$ a diverguje pro $p \geqq 2$. Je-li $p < p'$, je třída $L^{p'}$ zřejmě obsažena ve třídě L^p, takže nejrozsáhlejší je třída L^1. Budiž $p > 1$ a definujme číslo q rovnicí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \tag{1}$$

třídy L^p a L^q jsou v úzkém vztahu, jak ukazují na př. následující dvě věty:

I. Vždy je

$$\left| \int_a^b f(x)\, g(x) \, dx \right| \leqq \left(\int_a^b | f(x)^p | \, dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b | g(x) |^q \, dx\right)^{1/q}; \tag{2}$$

patří-li tedy $f(x)$ ke třídě L^p a $g(x)$ ke třídě L^q, je integrál

[1]) U všech funkcí, o nichž budeme mluviti, budeme předpokládati, že jsou měřitelné. Kdo zná poněkud teorii míry a měřitelných funkcí, ví, že tento předpoklad není příliš omezující: ač je dokázána existence neměřitelných funkcí, přece všechny funkce, s nimiž se v matematické „praksi" setkáváme, jsou měřitelné. (O Lebesguově integrálu je možno se poučiti na př. z knihy Saksovy (viz Čechův referát v tomto ročníku Časopisu, str. D 84) nebo z knihy Čechovy „Bodové množiny", díl 1, jež vyjde brzo nákladem JČMF.) Většina úvah, o nichž budu mluviti, platí (po příp. v pozměněném tvaru) též pro komplexní funkce reálné proměnné; pro jednoduchost omezím se však na reálná čísla a reálné funkce.

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \tag{3}$$

konvergentní.[2])

II. Naopak: je-li funkce $f(x)$ taková, že integrál (3) konverguje, ať je $g(x)$ jakákoliv funkce třídy L^q, patří $f(x)$ nutně k třídě L^p.[3])

Budiž nyní

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x), \ldots \tag{4}$$

posloupnost funkcí, definovaných v $\langle a, b\rangle$; pro jednoduchost předpokládejme, že funkce $\varphi_n(x)$ jsou ohraničené — ač tento předpoklad lze podstatně seslabiti. Posloupnost (4) nazývá se „*ortogonálním systémem*", jestliže platí

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx = 0 \text{ pro } i \neq k. \tag{5}$$

Platí-li mimo to ještě rovnice

$$\int_a^b \varphi_i^2(x)\, dx = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

nazývá se systém (4) *ortogonálním normovaným systémem.* Z každého ortogonálního systému (4) lze ovšem snadno vytvořiti ortogonální normovaný systém, není-li žádná z funkcí $\varphi_i(x)$ skoro všude rovna nule[4]); v tomto případě je totiž $\lambda_i = \int_a^b \varphi_i^2(x)\, dx > 0$ pro každé i, takže funkce $\varphi_i(x) : \sqrt{\lambda_i}$ tvoří ortogonální normovaný systém. Nejznámější ortogonální normovaný systém (pro $a = 0$, $b = 2\pi$) je t. zv. „trigonometrický systém"

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{7}$$

Ortogonální systém (4) nazývá se *úplným* vzhledem k třídě L^p, jestliže má tuto vlastnost: „patří-li funkce $f(x)$ k třídě L^p a je-li

$$\int_a^b f(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, 3, \ldots,$$

je $f(x) = 0$ skoro všude." Na př. systém (7) je úplný vzhledem ke každé třídě L^p ($p \geq 1$).

---

[2]) O nerovnosti (2) a jiných nerovnostech pro integrály a řady — jichž se v teorii ortogonálních řad často používá — je možno se poučiti v knize „Inequalities" od Hardyho, Littlewooda a Pólye (viz referát Kösslerův v tomto ročníku Časopisu, str. D 122). Ostatně v knize Zygmundově i Kaczmarzově a Steinhausově jsou všechny potřebné nerovnosti tohoto druhu odvozeny.

[3]) Tato věta souvisí též s teorií lineárních funkcionálů, o níž je možno se poučiti z knihy Banachovy „Théorie des opérations linéaires", o které referoval Čech v tomto ročníku Časopisu, str. D 81—83. V obou recensovaných knihách jsou ostatně potřebné základy teorie lineárních operací vyloženy.

[4]) „Skoro všude" značí: „všude, vyjma v bodech jisté množiny, jež má nulovou míru".

Je-li (4) ortogonální normovaný systém, nazývá se každá řada tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{8}$$

„ortogonální řadou". Je-li dána funkce $f(x)$ třídy L^1 a jsou-li koeficienty c_n definovány rovnicí

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) \, dx, \tag{9}$$

nazývá se ortogonální řada (8) „ortogonálním rozvojem funkce $f(x)$.[5]" Jde-li specielně o trigonometrický systém (7), nazýváme ortogonální řadu „trigonometrickou řadou" a ortogonální rozvoj funkce $f(x)$ „Fourierovou řadou funkce $f(x)$".

Naskytá se nyní především otázka: budiž dána nějaká ortogonální řada (8); ptáme se, je-li tato řada ortogonálním rozvojem nějaké funkce a do které třídy L^p tato funkce patří. Odpověď je jednoduchá pro třídu L^2 (poznamenejme, že pro $p = 2$ — a *jen* pro tuto hodnotu — dává nám rovnice (1) vztah $p = q$, tedy $L^p = L^q$); platí totiž tato známá věta (Riesz-Fischerova): *Aby ortogonální řada* (8) *byla ortogonálním rozvojem nějaké funkce* $f(x)$ *třídy* L^2, *k tomu je nutné a stačí, aby řada* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ *konvergovala.*

Poznamenejme ještě: v tomto případě je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqq \int_a^b f^2(x) \, dx$; je-li systém (4) úplný vzhledem k L^2, platí v tomto vztahu znamení rovnosti — to je t. zv. Parsevalova rovnice.

Pro $p \neq 2$ jsou poměry podstatně složitější; věta Riesz-Fischerova štěpí se zde totiž v tyto dvě věty: předpokládejme, že ortogonální systém (4) je „rovnoměrně ohraničen", t. j. že existuje číslo M tak, že $| \varphi_n(x) | \leqq M$ pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$ a *všechna* n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Potom platí:

Věta I. Je-li $1 < p \leqq 2$ a je-li řada (8) ortogonálním rozvojem jisté funkce třídy L^p, je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^q \tag{10}$$

konvergentní (q je definováno stále rovnicí(1)).

Věta II. Je-li $p \geqq 2$ a je-li řada (10) konvergentní, je řada (8) ortogonálním rozvoje jisté funkce třídy L^p.

Vidíme, že konvergence řady (10) je pro $p \leqq 2$ *nutnou* a pro $p \geqq 2$ *postačující* (tedy pro $p = 2$ nutnou i postačující) podmínkou k tomu, aby

---

[5]) Ke vzorcům (9) jsme vedeni na př. následující heuristickou úvahou: je-li ortogonální řada (8) stejnoměrně konvergentní a označíme-li znakem $f(x)$ její součet, můžeme rovnici

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) = f(x)$$

násobiti funkcí $\varphi_n(x)$ a integrovati člen po členu; vzhledem k (5), (6) dostaneme právě vzorce (9). Tato úvaha neříká ovšem nic o tom, zda při *obecné* funkci $f(x)$ je její ortogonální rozvoj konvergentní a jaký je jeho součet.

řada (8) byla ortogonálním rozvojem nějaké funkce, patřící k třídě L^p. Tato neúplnost (v případě $p \neq 2$) podnítila další vyšetřování, jež vedla jednak k zajímavým větám, analogickým k větám I, II (Paley, Hardy a Littlewood), jednak k zjištění některých podmínek, za nichž věty I a II *nelze* obrátit.

Mluvili jsme dosud o podmínkách, jež musí ortogonální řada (8) splňovati, má-li býti ortogonálním rozvojem nějaké funkce; neřekli jsme však dosud nic o tom, zda tento ortogonální rozvoj je konvergentní a jaký je jeho součet; obraťme se nyní k této otázce. Pro jednoduchost předpokládejme, že je dána funkce $f(x)$ třídy L^2 a že systém (4) je ortogonální, normovaný a *úplný* (vzhledem k L^2); řada (8) budiž ortogonálním rozvojem funkce $f(x)$; vyšetřujme *částečné součty* řady (8):

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Zde platí především, že posloupnost (11) konverguje „ve středu" k $f(x)$, t. j. že je

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b | f(x) - s_n(x) |^2 \, dx = 0.$$

Dále existuje *částečná posloupnost* $s_{k_1}(x), s_{k_2}(x), \ldots$ tak, že pro *skoro všechna* x je

$$\lim_{n=\infty} s_{k_n}(x) = f(x).$$

Nás však zajímá též otázka, zda *celá* posloupnost (11) konverguje k $f(x)$, t. j. zda platí rovnice

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = f(x). \tag{12}$$

Odpověď je obecně negativní: existuje funkce $f(x)$ třídy L^2 a ortogonální normovaný úplný systém (4) tak, že ortogonální rozvoj funkce $f(x)$ *diverguje pro každé* x. Kladnou odpověď dostáváme teprve, přidáme-li další podmínku: je-li řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n \tag{13}$$

konvergentní, platí rovnice (12) pro skoro všechna x. Je-li systém (4) speciélně trigonometrickým systémem (7), stačí místo konvergence řady (13) dokonce konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log n$.

Existence ortogonálních rozvojů, jež jsou divergentní pro všechna x, ukazuje, že obyčejný pojem konvergence nevede v teorii ortogonálních řad vždy k uspokojivým výsledkům. Proto nahrazujeme zde často obyčejný pojem konvergence obecnějším pojmem sumability; zmíním se alespoň o nejjednodušší metodě sumability, totiž o metodě aritmetických středů 1. řádu. Sestrojme z posloupnosti (11) posloupnost jejích aritmetických středů, t. j. posloupnost

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} (s_1(x) + s_2(x) + \ldots + s_n(x)) \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{14}$$

může se státi, že posloupnost (14) konverguje i tehdy, když posloupnost (11) diverguje (t. j. když řada (8) diverguje). A vskutku poskytuje posloupnost

(14) často mnohem uspokojivější výsledky než posloupnost (11). Platí na př. tyto věty: vezmeme-li za systém (4) speciálně trigonometrický systém (7) a je-li řada (8) ortogonálním rozvojem (t. j. Fourierovou řadou) nějaké funkce $f(x)$ třídy L^1, je

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n(x) = f(x) \tag{15}$$

pro *skoro všechna* x; je-li nad to $f(x)$ spojitá a je-li $f(0) = f(2\pi)$, platí rovnice (15) dokonce pro *všechna* x intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a to *stejnoměrně.*

Většina vět, o nichž jsme mluvili, platí pro obecné ortogonální systémy; pro speciální systémy — na př. pro trigonometrický systém (7) — je možno ovšem proniknouti ještě daleko hlouběji. Tak na př. speciální povaha trigonometrického systému dovoluje nám odvoditi řadu „lokálních" vět, které za určitých podmínek nám dovolují usuzovati na konvergenci nebo sumabilitu Fourierových řad v *určitém,* předem daném bodě x (o této věci nám ovšem věty, zaručující konvergenci nebo sumabilitu „skoro všude", neříkají nic, neboť ten daný bod by mohl patřiti právě k oné množině nulové míry, v níž konvergence resp. sumabilita není zaručena). A ještě na jednu okolnost, vyskytující se speciálně při *trigonometrických* řadách, chtěl bych poukázati. Řada

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n$$

je zřejmě reálnou částí mocninné řady

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)\, z^n = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)\, e^{nix}\, r^n \qquad (z = re^{ix}); \tag{16}$$

tedy trigonometrická řada

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{17}$$

je reálnou částí mocninné řady (16) na obvodě jednotkové kružnice, t. j. pro $|z| = 1$ čili $r = 1$. Tato okolnost především umožňuje použití metod teorie analytických funkcí v teorii trigonometrických řad; za druhé nás staví před zajímavou otázku, jaké jsou vztahy mezi reálnou a imaginární částí řady (16) pro $r = 1$, t. j. mezi řadou (17) a t. zv. „konjugovanou trigonometrickou řadou"

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx).$$

Obě knihy, o nichž zde referuji, pojednávají o teorii ortogonálních řad; a sice kniha Kaczmarzova a Steinhausova hlavně o obecné teorii (při čemž však jsou jako příklady probrány stručně též důležité speciální případy, jako polynomy Hermiteovy, Čebyševovy, Laguerreovy, Legendrovy a zajímavé systémy: Rademacherův, Haarův, Walshův, Steinhausův a pod.), kdežto kniha Zygmundova omezuje se na trigonometrické řady, při čemž ovšem zase toto omezení jí dovoluje jíti v jednotlivých problémech dále. Obě knihy jsou psány velmi pečlivě a celkem dobře se čtou; jejich bohatý obsah jsem ovšem ve svém stručném nástinu nemohl ani zdaleka vyčerpati. Zvláště kniha Zygmundova oplývá bohatstvím výsledků a rozmanitostí metod, což je způsobeno ovšem právě tím, že se omezuje na speciální případ, totiž na trigonometrický systém (obsažnost knihy Zygmundovy je zvýšena ještě tím, že ke každé kapitole je přidán značný počet příkladů); větší rozmanitost metod v knize Zygmundově ovšem působí, že její četba je poněkud obtížnější než četba knihy Kaczmarzovy a Steinhausovy. Kdo však zná první počátky Lebesgueovy teorie integrálu, může s prospěchem a bez vážnějších obtíží obě knihy studovati; některá drobná nedopatření si čtenář opraví buď sám nebo s použitím původní literatury, jež je v obou knihách hojně a pečlivě až do nejnovější doby citována. Obě knihy lze vřele doporučiti: obsahují důkladný a srozumitelný výklad o důležitém oboru analysy.

Jarník.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya: Inequalities. Cambridge, at the University press, 1934. XII, 314 str. Kč 115,20.

Každá nerovnost sama o sobě jest matematickou větou, mimo to však, jak zkušenost ukazuje, jsou nerovnosti jednou z nejúčinnějších pomůcek při různých důkazech. Kniha, o které zde mluvíme, bude jistě dlouhou dobu základní příručkou pro každého pracovníka v teorii číselné, v teorii funkcí reálných i komplexních proměnných, v počtu pravděpodobnosti a v mnohých jiných partiích matematiky. Různé nerovnosti roztroušené v mnoha těžko přístupných pojednáních a knihách jsou zde systematicky srovnány a v mnoha případech teprve autory této knihy vysloveny ve své nejpřesnější formě. To týká se zejména důsledného provedení úvah, které ukazují, za kterých předpokladů nerovnost přechází v rovnost. Kniha rozpadá se ve dvě části. Kapitola II až VI obsahují teorii základních nerovností jak elementárních tak nerovností pro nekonečné řady a integrály. Zbývající kapitoly obsahují aplikace na nejrozmanitější problémy matematické.

V kapitole II dokázány jsou tři základní elementární nerovnosti. Jsou to věta o aritmetickém a geometrickém středu (9), Hölderova nerovnost (11) a Minkovského nerovnost (24). Budiž (a) soustava n nezáporných čísel reálních $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(a_\nu \geqq 0)$, nazveme dále čísla q_ν vahami, vyhovují-li vztahům $q_\nu > 0$, $\sum_1^n q_\nu = 1$ a budiž r reálný parametr. Jestliže teorém obsahuje více soustav proměnných $(a), (b), (c), \ldots$ předpokládáme o nich, že mají stejný počet elementů a že ve všech užíváme týchž vah. O dvou soustavách budeme říkati, že jsou úměrné, jestliže existuje reálné číslo λ takové, že $b_\nu = \lambda \cdot a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$. Definujme nyní různé střední hodnoty soustavy (a) následujícími vzorci

$$\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r(a) = \left(\sum_1^n q_\nu a_\nu^{\,r}\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\mathfrak{M}_r = 0, \text{ jestliže } r < 0 \text{ a aspoň jedno } a_\nu \text{ jest nula.}$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(a) = \prod_1^n a_\nu^{\,q_\nu}; \qquad \mathfrak{M}_0(a) = \mathfrak{G}(a),$$

$$\mathfrak{A}\,(a) = \mathfrak{M}_1(a).$$

$\mathfrak{A}(a)$ nazýváme aritmetickým a $\mathfrak{G}(a)$ geometrickým středem soustavy (a) při vahách q_ν.

Teorém o aritmetickém a geometrickém středu zní pak $\mathfrak{G}(a) < \mathfrak{A}(a)$, pokud si nejsou všechna a rovna, kdy nerovnost přechází v rovnost. První historicky doložený důkaz této věty základní důležitosti pochází od Euklida. Hölderova nerovnost zní: Buďtež $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ positivní čísla, $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1$. Pak

$$\Sigma a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda < (\Sigma a)^\alpha (\Sigma b)^\beta \ldots (\Sigma l)^\lambda.$$

Rovnost nastane, jen když buď všechny soustavy (a), (b), ..., (l) jsou úměrné nebo aspoň jedna soustava jest nulová. Minkovskiho nerovnost zní: Budiž r konečné a různé od jedné. Pak

$$\mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b) + \ldots + \mathfrak{M}_r(l) > \mathfrak{M}_r(a + b + \ldots + l) \quad (r > 1),$$

$$\mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b) + \ldots + \mathfrak{M}_r(l) < \mathfrak{M}_r(a + b + \ldots + l) \quad (r < 1).$$

Rovnost nastane, jen když buď všechny soustavy (a), (b), ..., (l) jsou úměrné, anebo když $r \leqq 0$ a aspoň pro jedno ν platí $a_\nu = b_\nu = \ldots = l_\nu = 0$. Kapitola třetí obsahuje analogické teorémy týkající se obecnějších středních hodnot $\mathfrak{M}_\Phi(a) = \Phi^{-1}\{\Sigma q \Phi(a)\}$, kdež $\Phi(x)$ jest monotonní funkce a $\Phi^{-1}(x)$ její inversní funkce. Jest zde také vyložena podrobná teorie funkcí konvexních. V kapitole čtvrté jsou různé aplikace na maxima a minima, na porovnávání řad a integrálů. Kapitola pátá obsahuje rozšíření základních nerovností na nekonečné řady a kapitola šestá na integrály v definici Lebesguově a Stieltjes-Lebesguově. Zde jest n. př. dokázána nerovnost (2) z Jarníkova referátu o knihách Zygmundově a Kaczmarz-Steinhausově (viz toto číslo Časopisu, str. D 118).

Každá z dalších kapitol tvoří samostatnou a z velké části originální monografii o nějaké partii matematiky. V kapitolách těch najde čtenář právě tak velké množství hotových výsledků, jako mnoho podnětů k samostatné práci další. Každá z těchto kapitol vyžadovala by samostatného referátu. Zde uvádím proto jen pouhá hesla. Sedmá jedná o nerovnostech počtu variačního zejména v těch případech, kdy klasický počet selhává, protože extrémála neexistuje. Osmá jedná o bilineárních a multilineárních formách. Jako příklad uvedu zde jen Young-Hausdorffovo zobecnění teorému Riesz-Fischerova. Budiž $f(x)$ třídy L^p (viz shora citovaný referát Jarníkův) a $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ její komplexní Fourierova řada. Je-li $1 < p \leqq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a označíme-li $\mathfrak{S}_p(a) = (\Sigma | a_n |^p)^{\frac{1}{p}}$, $I_p(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} | f(x) |^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, pak platí

$$I_q(f) \leqq \mathfrak{S}_p(a); \quad \mathfrak{S}_q(a) \leqq I_p(f).$$

Devátá kapitola jedná o jisté nerovnosti Hilbertově, která má důležité aplikace n. př. v teorii momentů a_n dané funkce $f(x)$ definovaných vztahy

$$a_n = \int\limits_0^1 x^p f(x) \,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Konečně desátá kapitola obsahuje krásně psanou teorii přeřazení (rearrangments) soustavy o konečném nebo nekonečném počtu členů jakož i „přeřazení" funkčních hodnot. Součtové a integrální nerovnosti zde odvozené jsou nejen velmi zajímavé, ale i důležité.

První polovinu knihy může čísti každý, kdo zná látku středoškolskou a první počátky počtu diferenciálního a integrálního. Druhá polovina předpokládá základní pojmy z teorie funkcí a z teorie integrálu Lebesgueova. Celá kniha vyniká jasností výkladu, bohatostí látky a téměř ideální přesností. Z těchto důvodů doporučuji ji každému, kdo matematiku studuje nebo v matematice samostatně pracuje. *Kössler.*

B. Hostinský: Méthodes générales du Calcul des Probabilités. Mémorial des Sciences Mathématiques. Fasc. LII. Paris 1931. Stran 66. Kč 27,—.

V tomto svazku podává autor pěkný výklad metod, ve kterých sám nejvíce pracuje a kde dospěl k původním výsledkům všeobecně oceňovaným. Je to metoda libovolných funkcí (kapitola I) a teorie zřetězených jevů (kapitola II: případ náhodových veličin nespojitě proměnných a kapitola III: náhodové veličiny spojitě proměnné). Při tom opírá se o zákon sčítání a násobení pravděpodobností jako o předpoklady. Jest litovati, že o podstatě těchto zákonů nečiní bližší zmínky a že se při výkladu nezužitkoval pojem „závislosti" a „nezávislosti" jevů; teorie zřetězených jevů by tím nabyla ještě ostřejších rysů. Pokud jde o všeobecný základ, vychází autor z Poincaréových názorů, podle kterých jako „náhodové" jeví se nám to, co jest výsledkem příčin buď velmi malých, anebo velmi složitých (str. 1 a 57). Postrádáme však při tom zmínku, co vůbec třeba za „příčinu" a „účinek" považovat.

Svazek lze jen doporučiti. Recensent se osobně přesvědčil, že jest na cizích universitách (na př. ve Stockholmu) hojně používán jako doporučená studijní četba.

Otomar Pankraz.

W. Böttger: Physikalische Methoden der analytischen Chemie. Akadem. Verlagsges., Leipzig. Díl I, 1933. X, 388 stran. Cena RM 34,—. Díl II, 1936. XII, 343 str. Cena RM 28,—.

Z podnětu známého analytika, pedagoga a organisátora vědeckých publikací, profesora lipské university W. Böttgera, vychází toto dílo, jehož účelem je seznámiti chemika s novějšími fysikálními metodami analytickými. Jest třeba zvláště vítati, že druhý díl, který právě vyšel, obsahuje příspěvky dvou českých autorů ve formě samostatných monografií. Je to především „Polarografie" prof. J. Heyrovského, jehož neúnavné patnáctileté práci jest vděčiti za to, že tato jím vynalezená metoda je dnes již v cizině všeobecně uznávána a po zásluze hodnocena. Také druhý příspěvek, Dr. K. Šandery, o použité konduktometrii je výsledkem jeho původních prací v tomto oboru. Oběma autorům dostává se tím, že jejich články byly vydavatelem pojaty do uvedeného díla, dalšího uznání jejich prací za hranicemi.

Přes vzrůstající význam fysikálních metod, které sice velmi zvolna, ale tím jistěji vytlačují v různých oborech mnohé zdlouhavé a neekonomické metody chemické a otevírají nové možnosti výzkumu, nebylo úmyslem vydavatelovým podati čtenáři úplnou sbírku všech známých metod a pracovních postupů. Jde mu spíše o to, aby chemiku-analytikovi přiblížil fysikův názor a způsob myšlení a umožnil mu tak používati fysikem získaných poznatků a zkušeností k tomu, aby si pro své speciální potřeby vypracoval detailní postupy. Tuto práci nemůže s úspěchem vykonati fysik sám, neboť není tak obeznámen se složitostí zjevů souvisící s látkovou rozmanitostí jako chemik.

Uvedenou směrnicí je dána metodika zpracování jednotlivých příspěvků; hlavní váha se klade především na jasné, byť i stručné podání teoretických základů, pečlivé vybrání typických příkladů, kritické hodnocení jednotlivých metod (tedy i nezamlčování jejich nedostatků a záludů) a konečně na zvláště přehledné a důkladné uspořádání příslušné literatury.

Přes takto vymezený cíl přerostlo již nyní dílo původně stanovený rámec dvou svazků. Jednotlivé příspěvky byly podrobněji zhodnoceny v odborných časopisech chemických (viz Chem. Obzor 1936 č. 1, Chem. Listy 1936 č. 5, Collection 1935 č. 12 a 1936 č. 2) a proto budiž na tomto místě uveden jen stručně jejich obsah.

Díl I. 1. G. Scheibe: *Chemická analysa spektrální.* Tento příspěvek obsahuje velmi jasně a poutavě zpracovanou kvalitativní i kvantitativní emisní analysu spektrální, s pěknou kapitolou pojednávající o fotografické desce a tabulkami posledních čar i homologických párů podle Gerlacha a Schweizera. Zvláštní kapitola je věnována absorpční analyse spektrální, zejména absorpční spektrofotometrii. Autor podává především poznatky a metody, které mají největší význam pro analytické potřeby chemikovy. Jest při této příležitosti poznamenati, že mnohé z těchto metod, které dosud v chemii nenalezly všeobecného použití, jsou již nahrazovány novějšími a dokonalejšími.

2. H. Mark: *Chemická analysa použitím Röntgenových paprsků.* Také v tomto článku chce autor zdůrazniti to, co je pro chemickou aplikaci nejdůležitější. Snaží-li se dosíci toho neobvyklým uspořádáním (autor popisuje nejprve přístroje a pracovní postupy a pak teprve vykládá systematiku a teorii Röntgenových spekter), trpí poněkud jasnost a přehlednost celé stati. Jednotlivé kapitoly však jsou pečlivě zpracovány a čtenář v nich kromě pěkných typických příkladů nalezne použití absorpčních spekter i sekundárního záření a konečně podrobné tabulky čar spektrálních až do $\lambda = 6000$ X. j. a čar ve druhém řádu až do $\lambda = 3000$ X. j., tedy právě těch, které mají pro chemickou analysu největší důležitost.

3. R. Ehrenberg: *Radiometrické metody.* Tyto zajímavé metody, při nichž je k analyse používáno radioaktivních isotopů jakožto indikátorů, nalezly již použití v mikrochemii i v biochemii. Přes poněkud nejasné podání na některých místech přispěje jistě tento článek k rozšíření těchto výjimečně citlivých metod, kterými lze vhodnou kombinací s chemickou reakcí stanoviti velmi mnoho látek.

Díl II. 1. G. Jander a O. Pfundt: *Konduktometrické titrace.* Velmi pěkné podání akustických i novějších visuálních způsobů je tu doloženo praktickými příklady a tabelárním uspořádáním literatury.

2. K. Šandera: *Použitá konduktometrie.* Tento příspěvek pojednává o oněch metodách, kde k výsledku docházíme bez titrace pouhým měřením vodivosti event. po předchozí chemické úpravě nebo ve spojení s jiným fysikálním měřením. Tato konduktometrická stanovení lze výhodně aplikovati při různých speciálních problémech technických. Autor sám vypracoval použitím konduktometru vlastní konstrukce několik metod důležitých pro cukrovarnictví i příbuzné obory a podává přehled těchto pracovních způsobů, které vlastně až dosud nebyly kriticky roztříděny a souborně zpracovány.

3. W. Böttger: *Elektroanalysa.* Hlavní cena tohoto příspěvku záleží v experimentální části, v níž s pečlivostí sobě vlastní sestavuje autor výběr všech prostředků a cest, které se dosud osvědčily, a uvádí metody, z nichž převážná většina byla v jeho laboratoři přezkoušena a kriticky zhodnocena. Po známé knize Classenově z r. 1927 dostává se analytikovi opět dobré příručky pro elektrolytické stanovení a dělení celé řady kovů.

4. J. Heyrovský: *Polarografie.* Tato ryze česká originální metoda nabývá vzrůstající důležitosti i v analytické chemii. Přes 200 původních prací v tomto oboru vyžádalo si po vydání české příručky před třemi roky nového souborného zpracování. Autor uvádí princip a teoretické základy polarografie, vykládá význam polarografických křivek intensity a napětí, aparaturu a způsob měření, kriticky oceňuje výhody i nevýhody své metody, její citlivost i reprodukovatelnost výsledků. Nehledíme-li k hlavnímu významu této metody pro teoretickou i experimentální elektrochemii, záleží její analytická cena především v použití v mikrochemii a pro řešení některých speciálních problémů, kde jiné metody buď vůbec nevedou k cíli nebo vyžadují příliš mnoho práce a času.

Přes některé nedostatky jednotlivých příspěvků, které však jsou vesměs podřadného rázu, má toto dílo velikou cenu pro rozšíření metod, které užívají moderních poznatků fysikálních a fysikálně-chemických i technických pokroků v konstrukci přístrojů. Oba svazky jsou pečlivě vypraveny, mají bezvadný tisk, obsahují jen velmi málo tiskových chyb a přehlédnutí. Text je doplněn četnými přehledně uspořádanými tabulkami i vzorně reprodukovanými obrázky. Není pochyby, že „Fysikální metody analytické chemie" naleznou praktické použití ve velmi mnohé analytické či výzkumné laboratoři, ale této knihy užije zajisté i každý fysik, který hledá v tomto směru poučení.

Dr. *Vladimír Majer.*

H. Wieleitner: Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde, herausg. v. Dr. J. Hofmann (Wissensch. Beil. zum Jahresber. d. Neuen Realgymn. München, 1933-4), VI — 74 str., cena Kč 15,—.

S každou prací, kterou vděčný Wieleitnerův žák a v poslední době jeho spolupracovník, Dr. J. E. Hofmann vydává, poznává obec historiků matematiků stále více, jakou nenahraditelnou ztrátou je předčasná smrt Wieleitnerova. Pojednání o měsíčcích kruhových je zase práce, která nám ukazuje úžasnou sečtělost, svědomitost, kritický smysl a rozhled po dějinách matematiky jejího autora. O bohatství materiálu svědčí 115 někdy značně obšírných poznámek a seznam 112 citovaných jmen. Dějiny měsíčků shlížejí na úctyhodnou historii téměř dvou a půl tisíciletí, od Hippokrata (kol 440 př. Kr.) až po Landaua a moderní práce. Rukopis Wieleitnerův nebyl ještě k tisku připraven. Spíše zde byl připraven materiál, který musil Hofmann v duchu zemřelého doplniti a zpracovati. Celá práce je kromě úvodu a seznamu jmen rozdělena do dvou částí, měsíčky zavřené a měsíčky otevřené. Je zde přineseno mnoho nového, jak věcně, tak hlediskem a souvislostmi. Na př. jen namátkou vybírám poznámku na str. 5, že již v XVI. stol. vedoucí duchové se propracovávali k vědomí, že kvadratura kruhu jest nemožností, s poukazem na poznámky Stifelovy nebo Vietovy. Ač je tu tolik literárního materiálu sneseno, přece svědčí o velké skromnosti jak původního autora tak jeho vydavatele poznámka, že vývody zde podané jsou zajisté mezerovité a že by bylo radno, je ještě doplniti. Tak by bylo, myslím, jistě zajímavo v tom ohledu probadati literaturu naši. Myslím na př. Marca Marci a Gregoria a Scto Vincentio. Práce Wieleitner-Hofmannova je cenným obohacením matematicko-historické literatury.

Q Vetter.

B. Recense didaktických publikací.

K. Reinhardt: Zur Behandlung der Integralrechnung auf der Schule. Universitätsverlag L. Bamberg, Greifswald, 1935, 16 str.

Malá brožura ukazuje, jak lze na střední škole zavésti infinitesimální počet nikoli na základě diferenciálu, nýbrž integrálu. Autor pokládá tento postup, shodující se také s historií, za názornější. Vychází, jak ani jinak na střední škole nelze, od kvadratury obrazců, omezených křivkami. Z toho lze elementárním způsobem vyvoditi omezený integrál mocniny, s mocniteli celými i lomenými, integrály goniometrických funkcí, funkcí inversních, logaritmický integrál, integrál exponenciální funkce, ba i některých složitějších případů. Autor takto ukázal, že lze skutečně středoškolskou látku z nauky o integrálu nejen vyčerpati, nýbrž i překročiti. Myšlenka je dobrá a stojí za pokus.

Q. Vetter.

J. Simerský: Jak učiti analytické geometrii na reálných gymnasiích. Sbírka metodik pro střední školy, Praha, 1936, Jedn. čes. mat. a fys., 40 str., cena Kč 7,60.

Již dlouho se u nás cítí potřeba metodik vyučování jednotlivým předmětům na střední škole. Nedostatek jejich se stává přímo katastrofálním po zavedení ustanovovacích zkoušek. Je jistě záslužno, že výbor naší Jednoty vypsal cenu na metodickou práci, poctil spisek, o němž hovoříme, cenou a uveřejnil jej také ve Sbírce metodik. Autor praví v úvodu: „Spisek... nechtěl býti ničím jiným, než provisorním elementem naší universální metodiky matematiky, jenž by poskytl spolu s jinými podobnými pracemi vhodnou základnu tomu, kdo by se podjal úkolu, úplnou metodiku sestaviti." Této úloze spisek plně vyhověl a bylo by si jen přáti, aby se našlo více autorů, kteří by podobným způsobem zpracovali i ostatní části matematického učiva. Ba, bylo by velmi výhodno, kdyby některé části byly zpracovány několikerým způsobem. Neboť cesty mohou býti rozličné a více očí více vidí. Práce dr. Simerského tu může býti vzorem. Ve shodě s podmínkami soutěže staví se autor na stanovisko t. zv. činné školy. Činí to však rozumně, kriticky a zaujímá tak hledisko velmi sympatické. Upozorňuji tu na př. jen na kritické stanovisko k Jungbluthově „tichému zaměstnání". Také jeho slova o větší potřebě času na vyučování novými metodami prozrazuje zkušeného, rozumného a upřímného učitele. Autor je si jistě vědom, že t. zv. činné metody nejsou zvláště v matematickém vyučování naprostou novinkou a že mnohý z dobrých starších učitelů jich užíval již mnohem dříve než se činná škola stala modním heslem. Zásluhou však moderní metodické matematické literatury jest, že se snaží tyto metody uplatniti důsledně a promyšleně. Jistě cenné jsou jeho návody k t. zv. „matematickým experimentům". Při svých hospitacích s posluchači didaktiky matematiky viděl jsem krásné výsledky podobných experimentů u p. kol. Friedricha a sám jsem se kdysi z vlastní učitelské zkušenosti také přesvědčil, že se velmi dobře osvědčují. Svůj výklad počíná autor stručným souhrnem zásad, na nichž své vývody staví, rozděleným do tří statí: 1. Metoda. 2. Zmechanisování základních výkonů. 3. Domácí cvičení a písemné práce školní. Zásady zde shrnuté mohou sloužiti za základ i dalším podobným pracím. Po kratičkých kapitolkách „Průprava k analytické geometrii" a „Výběr látky" přistupuje k podrobnému vylíčení vyučovacího postupu hodinu po hodině. Celou látku si rozdělil na 30 hodin. Je to důsledek snížení počtu hodin, věnovaných analytické geometrii podle Návrhu učebních osnov z r. 1933, podle něhož na matematiku v VII. třídě reál. gymnasií připadají jen 2 hodiny týdně a tudíž na analytickou geometrii jen 1 hodina týdenní. Ač autor redukuje látku na minimum, přece sám přiznává, že látka je pro 30 hodin velmi obsáhlá a obtížná. Není to ovšem vinou jeho, nýbrž osnovy. A i při tomto omezení, myslím, bude těžko udržeti v praxi krok s autorem. Kde je místo ke spojení analytické geometrie s jinými částmi matematiky, didakticky tak důležitému a moderní matematicko-didaktickou literaturou vyžadovanému? Kde získáme času na dostatečné procvičení látky na příkladech, zvláště s ohledem na slabší žáky? Kam vsuneme tak důležité přehledné opakování látky? A kde konečně je časová reserva pro nečekané ztráty, na př. jen všeliké ty statistiky, onemocnění učitele atd., kteréžto překážky se netáží, je-li právě na ně času? Ovšem, jak pravím, to není vinou autorovou a dr. Simerský je si tohoto časového nedostatku plně vědom. Jeho redukce látky je velmi promyšlená a jistě se osvědčí. Lze jen chváliti, že stále myslí na to, aby žáci sami, ovšem pod vedením učitelovým, hledali problémy. Také rovnováha, kterou udržuje mezi t. zv. badací metodou a metodami ostatními, svědčí o zkušeném učiteli. Shrneme-li svůj úsudek o práci dr. Simerského, lze říci, že je velmi dobrou a nabádavou pomůckou každému učiteli matematiky.

Q. Vetter.

C. Původní publikace československých matematiků a fysiků.

O. Borůvka: Über die partiellen Differentialgleichungen, denen hermitesche Formen genügen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **11** (1934), str. 65—72.

O. Borůvka: Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à *n* dimensions à courbure constante. II. Spisy přír. fak. Masarykovy univ. **212** (1935), 20 str.

O. Borůvka: Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à *n* dimensions à courbure constante. III. Spisy přír. fak. Masarykovy university **214** (1935), 25 str.

Hampl M.: Zur Berechnung von Schwingungen mit quadratischer Dämpfung. Ingenieur-Archiv **6** (1935), 213.

Z. Horák: Jednoduchá metoda měření tepelné vodivosti kapalin. Strojnický Obzor **15** (1935), 233.

Autor popisuje Nachtikalovu aparaturu pro technické měření tepelné vodivosti, podává její teorii a uvádí výsledky svých měření tepelných vodivostí některých technicky důležitých kapalin, většinou olejů.

R. Koťová: Měření koeficientů spřažení při kyvech torsních kyvadel spřažených výchylkou. Spisy přírod. fak. Masar. univ. **216** (1935), str. 11—19.

F. Link: Occultations et éclipses par les planètes. Bull. Astronom. **9** (1935), 227.

J. M. Mohr: Études sur les conséquences de la théorie de la rotation simple de la galaxie. Bull. astronom. **9** (1935), 1.

V. Nechvíle: Observations photographiques d'Eros en 1931. En colloboration avec dr. V. Guth, dr. J. Štěpánek et feu dr. J. Kaván. Publikace Pražské státní hvězdárny, No. **8** (1935), 10 str.

V. Nechvíle: Sur les méthodes pour la détermination des coordonnées standard et la réduction des clichés astrographiques. Publikace Pražské státní hvězdárny, No. **9** (1935), 34 str.

J. Zahradníček: Dynamická metoda pro měření gravitačního pole zemského. Spisy přírod. fak. Masar. univ. čs. **216** (1935), str. 1—10.

F. Záviška: Elektromagnetické vlny v kabelu s dvěma isolačními vrstvami. Rozpravy II. tř. České akad. **45** (1935), čs. 15. Electromagnetic waves along a cable with two insulating layers. Bull. internat. de l'Acad. des Scien. de Boh. (1935).

Kabelem s dvěma isolačními vrstvami mohou procházeti dva druhy elektromagnetických vln. Vlny prvního druhu vznikají při každé frekvenci a mají vlastnosti vln postupujících buď po jediném vodivém drátě nebo v kabelu s jedinou isolační vrstvou. Při dosti vysokých frekvencích šíří se kabelem vlny druhého druhu; ty odpovídají vlnám na dielektrickém drátě. Jich počet roste se stoupající frekvencí, mohou vznikati jen v kabelech, které mají dvě isolační vrstvy.

J. Žák: Měření na jazýčkových píšťalách. Spisy přírod. fak. Masar. univ. čs. **218** (1935), str. 13—24.