Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Cornelius Plch

O ploském obsahu kruhového výkrojku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 2, 101--110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123167

Položíme-li $x = \frac{m}{2^n}$ a oddělíme část reálnou od imaginarné, tu z rovnice (28) plynou sledující:

$$cos\, x\omega = Cos\, x\pi, \quad sin\, x\omega = Sin\, x\pi.$$

Rovnice tyto jsou v sebe menším intervallu pro $x = \frac{m}{2^n}$ kolikkrátkoli vyplněny, z čehož, vzhledem ku spojitosti funkcí, soudíme, že pro veškerá x daného intervallu vyplněny jsou.

Uvažujme konečně: $sin\, x\omega = Sin\, x\pi$.

Dělením hodnotou x a přechodem do limity obdržíme:

$$lim \frac{sin\, x\omega}{\omega} = lim\, \omega \frac{sin\, x\omega}{x\omega} = \omega = lim \frac{Sin\, x\pi}{x} = lim\, \pi \frac{Sin\, x\pi}{x\pi} = \pi,$$

t. j. $\omega = \pi$.

Tím identita funkcí definovaných rovnicemi (13) s funkcemi goniometrickými zjištěna jest.

O ploském obsahu kruhového výkrojku.

Studujícím napsal

P. **Cornelius Plch**, T. J. v Bohusudově (Mariaschein).

Věta. Kruhový výkrojek (V) rovná se polovině poloměru (R) znásobené příslušným obloukem (B).

Vzorec.

$$V = \frac{R}{2} . B.$$

1. Důkaz. Budiž v pravidelný mnohoúhelníkový výkrojek o kruhový výkrojek V *opsaný*, jenž sestává z $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (t. j. z libovolně mnoha) *rovnoramenných* a shodných trojúhelníků o výšce R (obr. 1.). Je-li $b = n.\frac{b}{n}$ lomená podstava výkrojku v, pak jest, jak známo, ploský obsah

$$v = \frac{R}{2} . b,$$

kdež při rostoucím n a stálém poloměru R proměnné veličiny v i b ku svým stálým mezím V i B ustavičně se přibližují *ubý-*

váním. Pročež obdržíme *dle obecné věty**) *hromadného* (pro každou hodnotu čísla $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ dovoleného) *přechodu k mezním hodnotám*

$$V = \frac{R}{2} . B,$$

aneb

$$\frac{R}{2} = \frac{v}{b} = \frac{V}{B},$$

z čehož opět plyne předešlý vzorec.

II. Důkaz. Značiž v_1 pravidelný mnohoúhelníkový výkrojek do kruhového výkrojku V *vepsaný*, jenž se skládá z n *rovnoramenných* a shodných trojúhelníků o rameně R a o výšce r_1. Znamená-li $b_1 = n . \frac{b_1}{n}$ lomenou podstavu výkrojku v_1, tož bude ploský obsah

$$v_1 = \frac{r_1}{2} . b_1 = \frac{R}{2} . \beta_1,$$

kdež při rostoucím n a stálém poloměru R, proměnné veličiny v_1 i $\beta_1 = b_1 . \frac{r_1}{R}$ ku svým stálým mezím V i $B = B . \frac{R}{R}$ ustavičně se přibližují *přibýváním.* Pročež dostaneme *hromadným přechodem k mezním hodnotám*

$$V = \frac{R}{2} . B,$$

aneb

$$\frac{R}{2} = \frac{v_1}{\beta_1} = \frac{V}{B},$$

čili

$$\frac{1}{2} = \frac{v_1}{b_1 r_1} = \frac{V}{BR},$$

odkudž opět plyne předešlý vzorec.

III. Důkaz. Podrží-li každé písmě svůj předešlý význam, tož *pro každou hodnotu čísla n* nezbytně platí tyto nerovnosti:

$$v > V > v_1,$$
$$b > B > \beta_1,$$

---

*) Tato *obecná věta* zní: *Stálá hodnota* (zde: $\frac{R}{2}$) *jakéhokoliv soujemu* (t. j. součtu, rozdílu, součinu, podílu čili poměru....) *proměnných na čísle n závislých veličin* (v, b) *rovná se obdobnému soujemu jejich stálých mezí (V, B).*

v nichžto proměnná čísla v i v_1 svou společnou stálou mezi V, a proměnná čísla b i β_1 svou společnou stálou mezi B tím těsněji svírají, čím větší jest n.

Avšak platí též nezbytně *pro každou hodnotu* n úměra

$$\frac{v}{b}=\frac{v_1}{\beta_1}=\frac{R}{2}$$

v nížto při rostoucím n svírající proměnné přední členy v i v_1 k sevřené stálé mezi V, a svírající proměnné zadní členy b i β_1 k sevřené stálé mezi B, jednak *ubýváním* jednak *přibýváním* ustavičně se přibližují, kdežto *rovné poměry* $\frac{v}{b}$ i $\frac{v_1}{\beta_1}$ těchto svírajících proměnných členů *rovněž tak jsou stálé, jakož poměr* $\frac{V}{B}$ sevřených stálých mezí *je stálý.*

Jelikož pak společné nejvyšší číslice svírajících proměnných čísel v i v_1 *tím spíše náležejí sevřené stálé mezi* V, *a poněvadž společné nejvyšší číslice svírajících proměnných čísel* b i β_1 *tím spíše náležejí sevřené stálé mezi* B, *proto jest nezbytně nutno, aby i společná stálá hodnota* $\frac{R}{2}$ *rovných a stálých poměrů* $\frac{v}{b}$ i $\frac{v_1}{\beta_1}$ *oněch svírajících proměnných čísel tím spíše náležela stálému poměru* $\frac{V}{B}$ *sevřených stálých mezí.*

Pročež bude *tím spíše* (a fortiori)

$$\frac{v}{b}=\frac{V}{B}=\frac{v_1}{\beta_1}=\frac{R}{2},$$

z čehož plyne

$$V=\frac{R}{2}.B.$$

IV. Důkaz. Opíšeme-li o každý částečný výkrojek $\frac{V}{n}$, jehož oblouku $\frac{B}{n}$ středový úhel $\frac{U}{n}$ přísluší, *pravoúhlý* trojúhelník $\frac{v_2}{n}$ o odvěsnách R i $R\,tang\,\frac{U}{n}$ (obr. 1.), pak bude ploský obsah každého *opsaného* trojúhelníku

$$\frac{v_2}{n}=\frac{R}{2}.\,R\,tang\,\frac{U}{n},$$

a následovně obsah všech *n opsaných* trojúhelníků

$$v_2 = \frac{R}{2} . R n \, tang \frac{U}{n},$$

kdež při rostoucím n a stálém poloměru R proměnné veličiny v_2 i $n \, tang \frac{U}{n}$ ku svým stálým mezím V i $n \, arc \frac{U}{n} = arc \, U$ ustavičně se přibližují *ubýváním*. Pročež nabudeme *hromadným přechodem k mezním hodnotám*

$$V = \frac{R}{2} . R \, arc \, U \equiv \frac{R}{2} . B,$$

aneb

$$\frac{R}{2} . R = \frac{v_2}{n \, tang \frac{U}{n}} = \frac{V}{arc \, U},$$

z čehož opět plyne předešlý vzorec.

V. Důkaz. Vpíšeme-li do každého částečného výkrojku $\frac{V}{n}$, jehož oblouku $\frac{B}{n}$ středový úhel $\frac{U}{n}$ odpovídá, *pravoúhlý trojúhelník* $\frac{v_3}{n}$ o podponě R a o odvěsnách $R \sin \frac{U}{n}$ i $R \cos \frac{U}{n}$, pak bude ploský obsah každého *vepsaného* trojúhelníku

$$\frac{v_3}{n} = \frac{R}{2} \cos \frac{U}{n} . R \sin \frac{U}{n},$$

a tudíž obsah všech *n vepsaných* trojúhelníků

$$v_3 = \frac{R}{2} \cos \frac{U}{n} . R n \sin \frac{U}{n},$$

kdež při rostoucím n a stálém poloměru R proměnné veličiny v_3, $\cos \frac{U}{n}$, $n \sin \frac{U}{n}$ ku svým stálým mezím V, 1, $n \, arc \frac{U}{n} = arc \, U$ ustavičně se přibližují *přibývaním*. Pročež obdržíme *hromadným přechodem k mezním hodnotám*

$$V = \frac{R}{2} . 1 . R \, arc \, U \equiv \frac{R}{2} . B,$$

aneb

$$\frac{R}{2} . R = \frac{v_3}{\cos \frac{U}{n} . n \sin \frac{U}{n}} = \frac{V}{1. \, arc \, U},$$

odkudž opět plyne předešlý vzorec.

VI. Důkaz. Podrží-li každé písmě svůj dřívější význam, tož *pro každou hodnotu čísla n* nezbytně platí tyto nerovnosti:

$$v_2 > V > v_3,$$

$$n\, tang\, \frac{U}{n} > arc\, U > n\, sin\, \frac{U}{n}\, cos\, \frac{U}{n};$$

avšak platí též nezbytně *pro každou hodnotu n* úměra (rovnice)

$$\frac{v_2}{n\, tang\, \frac{U}{n}} = \frac{v_3}{n\, sin\, \frac{U}{n}\, cos\, \frac{U}{n}} = \frac{R}{2}.\, R;$$

pročež bude *tím spíše* (a fortiori)

$$\frac{v_2}{n\, tang\, \frac{U}{n}} = \frac{V}{arc\, U} = \frac{v_3}{n\, sin\, \frac{U}{n}\, cos\, \frac{U}{n}} = \frac{R}{2}.\, R,$$

odkudž jde

$$V = \frac{R}{2}.\, R\, arc\, U \equiv \frac{R}{2}.\, B.$$

*VII. Důkaz.**) Budiž *stálý poloměr* $AC \equiv R$ (obr. 1) daného kruhového výkrojku $ACM \equiv V$ osou pořadnic čili osou y-ovou pravoúhlé soustavy.

Promítneme-li každý částečný oblouk $\frac{AM}{n} \equiv \frac{B}{n}$ na osu x-ovou a na osu y-ovou, tož budou difference

$$x_{m+1} - x_m = \Delta x_{m+1},$$

$$y_m - y_{m+1} = \Delta y_{m+1},$$

poměrnými čísly těchto pravoúhlých průmětů, při čemž

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1).$$

Opíšeme-li o každý částečný kruhový výkrojek $\frac{V}{n} \equiv \frac{ACM}{n}$ čtyrúhelník w_{m+1} podobným spůsobem, jakým o vedlejší výkrojek CMM' opsán jest čtyrúhelník $CMNM'$, sestávající z trojúhelníku *rovnoramenného* CMM' a z trojúhelníku *pravoúhlého* MNM', pak jest ploský obsah *ledakterého* takto *opsaného* čtyrúhelníku w_{m+1} roven součtu ploských obsahů oněch trojúhel-

*) Důkaz tento přípravou jest následujícího, jenž *absolutní správnost počtu differencialného* znázorňuje a objasňuje příkladem. Srovn. *Dr. A. Mayr*: *„Vollständige Theorie des Differenzial-Calculs."* Regensburg. Verlag von G. J. Manz, 1854.

níků, z nichžto sestává. Difference Δx_{m+1} i Δy_{m+1} jsou odvěsnami trojúhelníku pravoúhlého, jehož podponou jest tětiva

$$\sqrt{\Delta x_{m+1}^2 + \Delta y_{m+1}^2};$$

tatáž tětiva jest zároveň podstavou trojúhelníku rovnoramenného, jehož ramenem jest R a jehož výška $R \cos \frac{U}{2n}$ rozpoluje středový úhel $\frac{U}{n}$.

Tudíž jest

$$w_{m+1} = \frac{R}{2} \cos \frac{U}{2n} \sqrt{\Delta x_{m+1}^2 + \Delta y_{m+1}^2} + \tfrac{1}{2} \Delta x_{m+1} \Delta y_{m+1},$$

odkudž jde

$$w_1 = \frac{R}{2} \cos \frac{U}{2n} \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} + \tfrac{1}{2} \Delta x_1 \Delta y_1,$$

$$w_2 = \frac{R}{2} \cos \frac{U}{2n} \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2} + \tfrac{1}{2} \Delta x_2 \Delta y_2,$$

. . . .

$$w_n = \frac{R}{2} \cos \frac{U}{2n} \sqrt{\Delta x_n^2 + \Delta y_n^2} + \tfrac{1}{2} \Delta x_n \Delta y_n.$$

Jelikož veškery tětivy jsou sobě rovny, patrno, že každou z nich jednodušším symbolem $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ označiti smíme.

Znamená-li $\Sigma\ (w)$ součet všech n *opsaných* čtyrúhelníků a $\Sigma\ (\frac{1}{2} \Delta x \Delta y)$ součet všech příslušných *pravoúhlých* trojúhelníků, obdržíme sečtením všech n rovnic

$$\Sigma(w) = \frac{R}{2} \cos \frac{U}{2n} . n \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \Sigma\ (\tfrac{1}{2} \Delta x \Delta y),$$

kdež při rostoucím n a stálém poloměru R proměnné veličiny $\Sigma\ (w)$, $\cos \frac{U}{2n}$, $n \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\Sigma\ (\frac{1}{2} \Delta x \Delta y)$ ustavičně se přibližují ku svým stálým mezím (limitám): $V = lim\ \Sigma\ (w)$, $1 = lim \cos \frac{U}{2n}$, $R\ arc\ U \equiv R\ arc \sin \frac{x}{R} \equiv B = lim\ n \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $0 = lim\ \Sigma\ (\frac{1}{2} \Delta x \Delta y)$. Pročež dostaneme *hromadným* (pro každou hodnotu čísla $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ dovoleným) *přechodem k mezním hodnotám*

$$lim\ \Sigma(w) = \frac{R}{2}\ lim \cos \frac{U}{2n}\ lim\ n \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + lim\ \Sigma\ (\tfrac{1}{2} \Delta x \Delta y),$$

t. j. $$V = \frac{R}{2} . 1 . B + 0 = \frac{R}{2} . B.$$

VIII. Důkaz. Zvětšíme-li kruhový výkrojek $V \equiv ACM$ (obr. 1.) točením poloměru $CM \equiv R$ o differenci $\frac{V}{n} \equiv MCM' = ACM' - ACM = \Delta V$, *při čemž je zcela lhostejno, znamená-li číslo* $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ *jednotky aneb asi milliony, billiony, trilliony*, ..., zvětší se tím též příslušný oblouk $B \equiv AM$ o differenci $\frac{B}{n} \equiv MM' = AM' - AM = \Delta B$ a úsečka $x \equiv CP$ jeho konečného bodu o differenci $PP' = CP' - CP = \Delta x$; naproti tomu se zmenší příslušná pořadnice $y \equiv MP$ o differenci $NM' = MP - M'P' = \Delta y$. Pak jest tětiva

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

a *rovnoramenný* trojúhelník

$$CMM' = \frac{R}{2} \cos \frac{U}{2n} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

konečně *pravoúhlý* trojúhelník

$$MNM' = \tfrac{1}{2} \Delta x \Delta y.$$

Značí-li w ploský obsah čtyrúhelníku $CMNM'$, o výkrojek MCM' *opsaného*, jenž se skládá z trojúhelníků CMM' a MNM', tož patrně jest

$$w = \frac{R}{2} \cos \frac{U}{2n} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \tfrac{1}{2} \Delta x \Delta y,$$

kdež při rostoucím n a stálém poloměru R proměnné veličiny w, $\cos \frac{U}{2n}$, $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\Delta x \Delta y$ ustavičně se přibližují ku svým mezím (limitám): $\frac{V}{n} \equiv \Delta V = \lim w$, $1 = \lim \cos \frac{U}{2n}$, $R \operatorname{arc} \frac{U}{n} \equiv \frac{B}{n} \equiv \Delta B = \lim \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $0 = \lim \Delta x \Delta y$. Pročež nabudeme *hromadným* (pro každou hodnotu čísla $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ dovoleným) *přechodem k mezním hodnotám* (limitám)

$$\lim w = \frac{R}{2} \lim \cos \frac{U}{2n} \lim \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \tfrac{1}{2} \lim \Delta x \Delta y, \quad (1)$$

t. j. $$\Delta V = \frac{R}{2} . 1 . \Delta B + 0,$$

tudíž jest
$$n\,\Delta V = \frac{R}{2} \cdot n\,\Delta B,$$
t. j.
$$V = \frac{R}{2} \cdot B \equiv \frac{R}{2} \cdot R\, arc\, U \equiv \frac{R}{2} \cdot R\, arc\, sin\, \frac{x}{R}.$$

Poznamenání. Vzhledem k symbolice počtu differencialného jest
$$lim\, w \equiv dV,$$
$$lim \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \equiv \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$
$$lim\, \Delta x\, \Delta y \equiv dx\, dy.$$

Aby se totiž slabika „*lim*" nemusila ustavičně opakovati, zavedeno jest v počtu differencialném ono kratší označení. Pročež by se měla rovnice (1) takto psáti:
$$dV = \frac{R}{2} \cdot 1 \cdot dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \tfrac{1}{2}\, dx\, dy.$$

Poněvadž ale $\frac{1}{2}\, dx\, dy = 0$, píše se vším právem:
$$dV = \frac{R}{2}\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$
odkudž plyne integrováním
$$V = \frac{R}{2} \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{R}{2} \cdot R\, arc\, sin\, \frac{x}{R} \equiv \frac{R}{2} \cdot B. \quad \text{(I)}$$

Jestiť tedy *pro každou hodnotu čísla n* differencial $dV \equiv \Delta V$ a $dB \equiv \Delta B$, z čehož patrno, že *differencialy*
$$dV \text{ a } dB \equiv dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
od differencí ΔV a ΔB *ničím se neliší. Differencial* tudíž v tomto a v podobných případech *nic jiného není než difference konvergující k nulle.* *)

1. *Výsledek.* Vzroste-li točením poloměru $CM \equiv R$ (obr. 1.) středový úhel $U \equiv \sphericalangle ACM$ na 360°, vzroste výkrojek V na celý kruh K a oblouk B na kružnici (peripherii) P. Tudíž jest

---

*) Srovn. *Dr. Oskar Schlömilch*: „*Compendium der höheren Analysis*" 3. Aufl. pag. 20. — *Václav Šimerka*: „*Počátky počtu differencialného a integralného*" pag. 1. a 2. — *Dr. Gutberlet*: „*Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet*" §§. 4—7, pag. 68—129.

$$K = \frac{R}{2} \cdot P = \frac{R}{2} \cdot 2\pi R = \pi R^2,$$

t. j. *Ploský obsah kruhu* (K) *rovná se čtverci poloměru* (R) *znásobenému Ludolfským číslem* (π).

2. *Výsledek.* Značí-li $\mathfrak{K}$ kruhovou plochu $ACPMA$ mezi pořadnicemi AC a MP, mezi úsečkou CP a obloukem AM, sestávající z *pravoúhlého* trojúhelníku

$$CPM = \frac{1}{2}\,xy = \frac{1}{2}\,x\sqrt{R^2 - x^2}$$

a z výkrojku

$$ACM \equiv V = \frac{R}{2} \cdot B = \frac{R}{2} \cdot R \arcsin \frac{x}{R},$$

tož bude

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2}\,x\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R}{2} \cdot R \arcsin \frac{x}{R}, \qquad \text{(II)}$$

z čehož pro $x = R$ plyne rovnice

$$\mathfrak{K} \equiv \frac{K}{4} = 0 + \frac{R}{2} \cdot R\,\frac{\pi}{2} = \frac{R^2\pi}{4},$$

z nížto zase obdržíme $K = \pi R^2$.

Dodatek 1. *Opíšeme-li* o kruhovou plochu $\mathfrak{K} \equiv ACPMA$ obdélníky $k_1, k_2, \ldots, k_n$ podobným způsobem, jakým o kruhovou plochu $MPP'M'M$ *opsán* jest obdélník

$$k \equiv MPP'N = y\Delta x, \qquad (2)$$

pak bude

$$k_1 = y_0 \Delta x_1,$$
$$k_2 = y_1 \Delta x_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$k_n = y_{n-1} \Delta x_n,$$

a následovně $\Sigma(k) = \Sigma(y\Delta x)$,

z čehož dostaneme *hromadným přechodem k mezným hodnotám* (limitám)

$$\lim \Sigma(k) = \lim \Sigma(y\Delta x),$$

t. j.

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2}\,x\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R}{2} \cdot R \arcsin \frac{x}{R}. \qquad \text{(II)}$$

Dodatek 2. Z rovnice (2), v níž pořadnice $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ je veličina *stálá**), nabudeme *hromadným přechodem k mezním hodnotám* (limitám)

*) Pokud totiž plochu $ACPMA$ považujeme za veličinu *danou* a následovně *stálou*, musíme i každou přímku a křivku, jež tuto stálou plochu omezuje, za *stálou* veličinu považovati.

$$lim\, k = y\, lim\, \Delta x,$$

t. j.

$$d\mathfrak{K} = y dx \equiv dx \sqrt{R^2 - x^2}, \tag{3}$$

z čehož obdržíme integrováním

$$\mathfrak{K} = \int dx \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R}{2} . R\, arc\, sin\, \frac{x}{R}. \tag{II}$$

Srov. *Václav Šimerka* l. c. §. 39. pag. 55.

Poněvadž v rovnici (3) differencial $d\mathfrak{K} \equiv lim\, k$ značí kruhovou plochu $MPP'M'M = ACP'M'A - ACPMA$, kterážto jest o mnoho větší než polovina *opsaného* obdélníku $k \equiv MPP'N$, proto musí i differencial $dx \equiv lim\, \Delta x$ jakousi větší část přímky $PP' \equiv \Delta x$ znamenati tak, že *pro každou hodnotu čísla* $n = 1$, 2, 3, 4,.... nezbytně platí následující nerovnost:

$$\tfrac{1}{2}\, k < d\mathfrak{K} < k,$$

$$\tfrac{1}{2}\, \Delta x < dx < \Delta x.$$

Nic však nevadí, aby ve zvláštních případech differencial dx rovnal se nulle. Tak jsou na př. v differencialném poměru

$$\frac{dy}{dx} \equiv lim\, \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

differencialy $dy = 0$ i $dx = 0$, značí-li differenčný poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ trigonometrickou tangentu úhlu, jejž s osou úseček svírá *sečna* jakési křivky rovnicí $y = f(x)$ vyjádřené. Uvedeme-li tuto sečnu točením o jeden pevný průsek do polohy příslušné *tečny*, pak splyne pohyblivý průsek s tímto pevným průsekem a přejde differenčný poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ v differencialný poměr

$$\frac{dy}{dx} \equiv lim\, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{o}{o},$$

kdež $\frac{dy}{dx}$ znamená trigonometrickou tangentu úhlu, jejž s osou úseček uzavírá *tečna* oním pevným průsekem ku křivce vedená.

Viz *Dr. Fr. J. Studnička*: „*O počtu differencialním*“ 2. vydání §. 6. pag. 13.