Josef Metelka

Algebraická křivka v prostoru jako průsek ploch

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 1, D6--D8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123151

Příklad. U řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1} \left(= \frac{\operatorname{arc\,tg} z}{z} \text{ pro } 0 < |z| < 1\right)$ je $K = 2$, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = -1$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z^{K(n+1)} - a_n z^{Kn}|$ může být pro $|z| = 1$ konvergentní jen pro $\pm i$. Tam však konverguje. Platí tedy $\operatorname{arc\,tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ i pro $|z| = 1$ mimo body $\pm i$.

Algebraická křivka v prostoru jako průsek ploch.

Dr. Josef Metelka, Jablonec nad Nisou.

Algebraická křivka v prostoru není vždy úplným průsekem dvou algebraických ploch. Jako příklad nám může sloužit prostorová kubika, jež je dokonale určena teprve třemi kvadratickými plochami. Vznikla tudíž otázka, kolika ploch jest obecně potřeba k určení alg. křivky v prostoru. Hoření hranici stanovili ryze algebraickou cestou Kronecker[1]), Molk[2]) a König[3]) pro r-rozměrný prostor: Algebraická křivka v r-rozměrném prostoru jest určena nejvýše $r + 1$ nadplochou. Tato věta se proto nazývá (zejména v německé literatuře) větou Kroneckerovou.

O deset let později po Kroneckerovi podal K. T. Vahlen[4]) příklad křivky v obyčejném prostoru, k jejímuž určení jest skutečně třeba čtyř ploch. Je to racionální křivka pátého stupně s jedinou kvadrisekantou. Tento příklad jest od té doby citován a přijímán všemi geometry (viz na př. J. Vojtěch[5]), E. Bertini[6]) a j.) a křivka se nazývá Vahlenova.

Otázka se zdála být rozřešena, až v r. 1942 upozornil O. Perron (přesný název článku nemohu bohužel udat), že Vahlenův příklad je chybný. Jeho křivka je prý úplným průsekem již tří ploch. Otvírají se tedy nové problémy: Buď nalézti nový a skutečně správný příklad křivky, k jejímuž určení nestačí tři plochy, anebo dokázati obecně, že stačí již tři plochy k určení každé křivky v prostoru.

Pokusím se naznačit, jakých cest je možno použít. Dokážeme si dvě věty:

a) *Křivka c^n stupně n, která má aspoň jednu $(n-1)$-sekantu, jest určena třemi plochami.*

$(n-1)$-sekanta budiž p, na ni zvolíme mimo křivku dva body A, B. Z každého z těchto bodů se křivka c^n promítá racionálním kuželem stupně n, který má přímku p za $(n - 1)$-násobnou. Oba kužele se protínají v křivce c^n a v přímce p, kterou nutno počítat $n(n - 1)$-krát, neboť oba kužele mají podél této přímky všech $n - 1$ tečných rovin společných. Nezbývá tedy již žádná další průsečná křivka. Zvolme na křivce c^n mimo přímku p další bod C. Z tohoto bodu se křivka promítá kuželem stupně $n - 1$, který protíná přímku p jen v $n - 1$ jejich průsečících s křivkou. Tři kužele o vrcholech A, B, C mají tedy společnou jen křivku c^n.

b) *Křivka c^n stupně $n > 4$, která má nekonečně mnoho $(n - 2)$-sekant a žádnou $(n - 1)$-sekantu, jest určena třemi plochami.*

Důkazu této věty předešleme větu:

c) *Křivkou stupně $n > 4$ v prostoru lze položit aspoň dvě různé plochy stupně $n - 2$.*

Cayley a Nöther uvádějí vzorec, že křivka stupně n rodu p v prostoru předpisuje ploše stupně m, která ji má obsahovat, nejvýše $n \cdot m + 1 - p$ lineárních podmínek. Plocha stupně $n - 2$ je určena $\frac{1}{6}(n + 1)\, n(n - 1) - 1$ podmínkami. Utvořme tedy rozdíl

$$\tfrac{1}{6}(n + 1)\, n(n - 1) - 1 - [n(n - 2) + 1 - p] = \\ = \tfrac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 11n - 12) + p.$$

Tento výraz je i v nejnepříznivějším případě $(p = 0)$ pro $n > 4$ větší než jedna a věta c) je dokázána.

Vraťme se k větě b). Všecky $(n - 2)$-sekanty tvoří přímkovou plochu F_1, která má křivku c^n obecně za několikanásobnou (plocha může být i kužel). Křivkou c^n položíme plochu F_2 stupně $n - 2$, jež protne plochu F_1 v několikanásobné křivce c^n a vedle toho jen v konečném počtu $(n - 2)$-sekant. Další plocha F_3 stupně $n - 2$, různá od F_2, podle věty c) existuje a protíná $(n - 2)$-sekanty jen v bodech křivky c^n a věta b) je dokázána. Kdyby existovala $(n - 1)$-sekanta, byla by společná všem třem plochám. V tom případě by ovšem nastoupila věta a).

Z vět a) a b) plyne, že křivky stupně 3, 4 a 5 v prostoru jsou určeny již třemi plochami.

Kubická křivka má totiž bisekanty a lze na ni tudíž užít věty a).

Prostorové kvartiky jsou prvního a druhého druhu. Kvartika prvního druhu je průsekem již dvou kvadrik, kvartika druhého druhu má trisekantu a použijeme proto věty a). Snadno se nahlédne, že dvojnásobný bod jakéhokoliv druhu nic nemění na výsledku.

Prostorové kvintiky jsou rodu 0, 1 nebo 2. (Viz pozn. na konci článku.) V každém případě mají buď kvadrisekanty nebo nekonečně mnoho trisekant. Obě věty a) a b) se tu tedy uplatní. Opět lze snadno nahlédnout, že se na výsledku nic nemění, má-li křivka jeden nebo dva dvojnásobné body jakéhokoliv druhu.

Vahlenův příklad je tedy skutečně chybný, ačkoliv nemohu tvrdit, že Perron nalezl právě ty tři kužele, které jsme udali my. Bylo by skutečně velmi záslužné, kdyby byl nalezen nový, tentokráte správný příklad křivky, kterou nelze určit třemi plochami. S rostoucím stupněm se ovšem úloha stává nesnadnou.

Pozn. Jako velmi užitečnou pomůcku bych chtěl ještě uvést vzorec udaný Castelnuovem pro rod prostorové křivky stupně n:

$$p \leqq X(n - X - 2)$$

$$\tfrac{1}{2}(n - 1) - 1 \leqq X < \tfrac{1}{2}(n - 1) \qquad X \text{ celé.}$$

Při tom jest nejvyšší hodnoty pro p, udané vzorcem, vždy dosaženo.

Literatura:

1. L. Kronecker: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der alg. Grössen, Journ. f. Math. 92, 1881, str. 30.
2. Molk: Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité.... Acta Mathem. 6, 1885, str. 163.
3. König: Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen, Lipsko Teubner, 1903, str. 234.
4. K. T. Vahlen: Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischen Raumkurven, Journal r. a. Math., 108, 1891.
5. J. Vojtěch: Geometrie projektivní, Praha 1932, str. 675.
6. E. Bertini: Geometria proiettiva degli iperspazi, něm. překlad z r. 1924, str. 218.