Václav Alda

Poznámka ke dvěma cvičením z "Bodových množin"

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 1, D1--D3

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123146

Poznámka ke dvěma cvičením z „Bodových množin".

Václav Alda, Praha.

Poznámka redakce. Aby tento článek byl srozumitelný i těm, kteří nemají po ruce Čechovu knihu, vysvětlíme napřed užitá označení. Budiž P nějaká neprázdná množina; budiž $\mathfrak{A}$ nějaký systém částí množiny P (t. j. $\mathfrak{A}$ je množina, jejíž prvky jsou nějaké množiny, které jsou částmi neboli podmnožinami množiny P). Systém $\mathfrak{A}$ nazýváme množinovým tělesem, platí-li: (1) $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. (2) Je-li $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, je $A_1 + A_2 \in \mathfrak{A}$. (3) Je-li $A_1 \in \mathfrak{A}$ $A_2 \in \mathfrak{A}$, je $A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$. Je-li místo podmínky (2) splněna ostřejší podmínka: (2′) Je-li $A_i \in \mathfrak{A}$ pro $i = 1, 2, 3, \dots$, je $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in A$, nazýváme $\mathfrak{A}$ množinovým σ-tělesem. Je-li $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ nějaký systém částí množiny P, existuje jedno a jen jedno nejmenší množinové těleso, obsahující systém $\mathfrak{A}$; označme je $t(\mathfrak{A})$; obdobná věta platí pro σ-těleso, znak $\tau(\mathfrak{A})$.

Jsou-li A, B dvě množiny, značí $A \times B$ množinu všech dvojic $[a, b]$, kde $a \in A$, $b \in B$. Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dva systémy množin, značí $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ systém všech množin tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Nejmenší množinové těleso (resp. σ-těleso), obsahující systém $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, značíme $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, resp. $\tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

*

V knize „Bodové množiny", část první, od prof. Čecha jsou na straně 134 cvičení 18.21 a 18.22. Znějí ($\mathfrak{A}$ je systém podmnožin množiny P a $\mathfrak{B}$ systém podmnožin množiny Q):

18.21. Nechť $\emptyset \neq \mathfrak{A}$. Nechť $M \in \mathfrak{A}$. Nechť $\mathfrak{A}^* = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M, X \in \mathfrak{A}]$.

Pak jest

$$t(\mathfrak{A}^*) = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M, X \in t(\mathfrak{A})], \quad \tau(\mathfrak{A}^*) = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M, X \in \tau(\mathfrak{A})].$$

18.22. Nechť $M_1 \in \mathfrak{A}$, $M_2 \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^* = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M_1, X \in \mathfrak{A}]$, $\mathfrak{B}^* = \underset{Y}{\mathrm{E}}[Y \subset M_2, Y \in \mathfrak{B}]$.

Pak jest

$$t(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*) = \underset{Z}{\mathrm{E}}[Z \subset M_1 \times M_2, Z \in t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})],$$
$$\tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*) = \underset{Z}{\mathrm{E}}[Z \subset M_1 \times M_2, Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})].$$

Tato tvrzení nejsou bez dalšího předpokladu o systémech $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ správná, jak plyne z následujících příkladů. Ve cvič. 18.21 volme za P množinu reálných čísel, $\mathfrak{A} = \{\emptyset, (0, 1), (\frac{1}{2}, 2)\}$, $M = (0, 1)$. Pak jest $\mathfrak{A}^* = \{\emptyset, (0, 1)\}$ a zřejmě platí $\mathfrak{A}^* = t(\mathfrak{A}^*) = \tau(\mathfrak{A}^*)$. $t(\mathfrak{A})$ i $\tau(\mathfrak{A})$ mají za prvek interval $(\frac{1}{2}, 1) \subset (0, 1)$ a tento není ani v $t(\mathfrak{A}^*)$ ani v $\tau(\mathfrak{A}^*)$. Ve cvičení 18.22 volme pak $Q = P$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, $M_2 = M_1 = M$, kde P, $\mathfrak{A}$, M mají týž význam jako prve. Dostaneme tak opět spor.

Nutnou a postačující podmínkou, aby tvrzení cvič. 18.21 bylo správné, jest: Když $A \in \mathfrak{A}$, pak $MA \in t(\mathfrak{A}^*)$ resp. $MA \in \tau(\mathfrak{A}^*)$.

Dokažme to pro $\tau(\mathfrak{A}^*)$.

Podmínka je nutná, neboť když $A \in \mathfrak{A}$, pak $MA \in \tau(\mathfrak{A})$ a je $MA \subset \tau\, M$, tedy $MA \in \tau(\mathfrak{A}^*)$.

Podmínka je postačující. I. Nechť $\mathfrak{A}_0 = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \tau(\mathfrak{A}), MX \in \tau(\mathfrak{A}^*)]$. Podle předpokladu o $\mathfrak{A}$ platí $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_0 \subset \tau(\mathfrak{A})$. Lehce se dokáže, že $\mathfrak{A}_0$ je množinové σ-těleso a tedy $\mathfrak{A}_0 = \tau(\mathfrak{A})$.

II. Nechť $\mathfrak{A}' = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \tau(\mathfrak{A}), X \subset M \Rightarrow X \in \tau(\mathfrak{A}^*)]$. Platí $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}' \subset \tau(\mathfrak{A})$. Je-li $A_n \in \mathfrak{A}'$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \subset M$, pak $A_n \subset M$ pro každé n a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}'$. Je-li $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}'$ a $A_1 - A_2 \subset M$, pak $A_1 - A_2 = MA_1 - MA_2$ a $MA_1, MA \in \tau(\mathfrak{A}^*)$ podle I a tudíž $A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}'$. $\mathfrak{A}'$ je množinové σ-těleso a tedy $\mathfrak{A}' = \tau(\mathfrak{A})$. Platí tedy $\underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M, X \in \tau(\mathfrak{A})] \subset \tau(\mathfrak{A}^*)$.

III. Obráceně jest $\underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M, X \in \tau(\mathfrak{A})]$ množinové σ-těleso nad $\mathfrak{A}^*$, což s II dává tvrzení.

Podmínku lze nahraditi postačující: $\mathfrak{A}$ je množinové těleso.

Ve cvič. 18.22 je nutnou a postačující podmínkou pro správnost tvrzení: Když $A \times B \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, pak $(M_1 \times M_2) . (A \times B) \in t(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$, resp. $\in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$.

Dokažme to opět pro $\tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$.

Podmínka je nutná, neboť když $A \times B \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, pak $(A \times B) . (M_1 \times M_2) \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ a zároveň $\subset M_1 \times M_2$ a tedy $\in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$.

Podmínka je postačující. I. Budiž $\mathfrak{T}_0 = \mathop{\mathrm{E}}_{Z}[Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),$ $Z(M_1 \times M_2) \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)]$. Z vlastnosti systému $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ plyne $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{T}_0$, dále je $\mathfrak{T}_0 \subset \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ a lehce se dokáže, že $\mathfrak{T}_0$ je množinové σ-těleso. Je tedy $\mathfrak{T}_0 = \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

II. Nechť $\mathfrak{T}' = \mathop{\mathrm{E}}_{Z}[Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), Z \subset M_1 \times M_2 \Rightarrow Z \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)]$. Platí $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{T}' \subset \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Když $Z_i \in \mathfrak{T}'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ a $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \subset M_1 \times M_2$, pak $Z_i \subset M_1 \times M_2$ pro každé i a tedy $Z_i \in$ $\in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ a proto $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \in \mathfrak{T}'$. Nechť $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{T}'$. Jestliže $Z_1 -$ $- Z_2 \subset M_1 \times M_2$, pak $Z_1 . (M_1 \times M_2) - Z_2(M_1 \times M_2) = Z_1 - Z_2$ a $Z_i(M_1 \times M_2) \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ $(i = 1, 2)$ podle I. Je tedy také $Z_1 -$ $- Z_2 \in \mathfrak{T}'$. $\mathfrak{T}'$ je proto množinové σ-těleso, tedy $\mathfrak{T}' = \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Je proto $\mathfrak{T} = \mathop{\mathrm{E}}_{Z}[Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), Z \subset M_1 \times M_2] \subset \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$.

III. $\mathfrak{T}$ je ale množinové σ-těleso, jak se lehce ukáže a to nad $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$. Musí tedy být $\mathfrak{T} = \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ j. b. d.

Podmínku lze nahradit postačující: Když $A \times B \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, pak $AM_1 \in t(\mathfrak{A}^*)$ a $BM_2 \in t(\mathfrak{B}^*)$, resp. když $A \times B \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ pak $AM_1 \in \tau(\mathfrak{A}^*)$ a $BM_2 \in \tau(\mathfrak{B}^*)$. Neboť $(A \times B) . (M_1 \times M_2) =$ $= M_1A \times M_2B$ a $(t(\mathfrak{A}^*), t(\mathfrak{B}^*)) \subset t(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$, resp. $(\tau(\mathfrak{A}^*), \tau(\mathfrak{B}^*)) \subset$ $\subset \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$. Tato podmínka je splněna, když $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou množinová tělesa.

Mocninné řady na obvodě konvergenčního kruhu.

Jan Mařík, Praha.

Věta 1. Mějme posloupnosti komplexních čísel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ Označme $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$. Nechť existuje A tak, že platí $|\sigma_n| \leqq A$ pro každé n. Budiž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n|$ konvergentní; budiž $\lim_{n \to \infty} \beta_n = 0$. Pak je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ konvergentní.

Důkaz: $\sum_{n=0}^{m} \alpha_n \beta_n = \sigma_0 \beta_0 + \sum_{n=1}^{m} (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \beta_n = \sigma_0 \beta_0 + \sum_{n=1}^{m} \sigma_n \beta_n -$ $- \sum_{n=1}^{m} \sigma_{n-1} \beta_n = \sigma_0 \beta_0 + \sum_{n=1}^{m} \sigma_n \beta_n - \sum_{n'=0}^{m-1} \sigma_{n'} \beta_{n'+1} = \sigma_0 \beta_0 + \sigma_m \beta_m + \sum_{n=1}^{m-1} \sigma_n \beta_n -$