Josef Novák

Konstrukce prosotoru s předepsanými O-oddělenými a $\overline{O}$-oddělenými body

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 1, 49--57

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123145`

Konstrukce prostoru s předepsanými O-oddělenými a $\overline{\overline{O}}$-oddělenými body.

Jos. Novák, Brno.

(Došlo 10. listopadu 1947.)

Hausdorffovy topologické prostory, jež jsou definovány čtyřmi známými Hausdorffovými axiomy okolí,[1]) byly předmětem intensivního studia a je jim věnována rozsáhlá literatura. Méně pozornosti soustředily na sebe prostory Rieszovy, které vyhovují jenom prvým třem Hausdorffovým axiomům okolí a jejichž body jsou uzavřené. Takové prostory mohou obsahovati body, jež nejsou O-oddělené; to jsou body, jež se nedají odděliti otevřenými okolími. Prof. Čech položil zajímavou otázku, kdy lze sestrojiti Rieszův prostor, jsou-li předem dány množiny vzájemně O-neoddělených — nebo, což je tentýž problém — O-oddělených bodů. Přesné znění Čechova problému je toto:

Nechť každému prvku $x \in M$ abstraktní množiny M je přiřazena podmnožina $\varphi(x) \subset M$, jež obsahuje prvek $x \in \varphi(x)$. Kdy existuje v M topologie τ taková, že množina $\varphi(x)$ je průnikem uzávěrů všech okolí bodu x?

V tomto pojednání je dokázáno, že topologie τ může existovati jen tehdy, když je splněna podmínka (1):

Je-li $y \sim x$, pak také $x \sim y$ pro každou dvojici bodů x, y; přitom $y \sim x$ značí totéž, co $y \in \varphi(x)$. Na příkladě (prostor P_1) je ukázáno, že tato vlastnost (1) není podmínkou postačující pro existenci topologie τ. Ve větě 1 jsou uvedeny postačující podmínky: Existuje-li nekonečná podmnožina $N \subset M$ stejně mohutná jako M a taková, že není $x \sim y$ pro žádnou dvojici $x \neq y$, $x \in N$, $y \in N$ a že každý průnik $N \cap \varphi(x)$ má mohutnost menší než je mohutnost množiny M, a je-li přitom splněna podmínka (1), pak existuje v M Rieszova topologie τ. Zejména tedy existuje taková topologie, jestliže mohutnost každé množiny $\varphi(x)$ je menší než nekonečná

[1]) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, str. 213.

regulární mohutnost množiny M a je-li přitom splněna podmínka (1). (Korolár 1.).

Stačí dokonce vedle (1) předpokládat, že množiny $\varphi(x)$ stejně mohutné jako množina M nepokryjí skoro celou množinu M. Není-li mohutnost $\mathfrak{m}$ množiny M regulární, pak korolár 1 platí za předpokladu, že všecky množiny $\varphi(x) \subset M$ mají mohutnost menší než $\mathfrak{m}'$, kde $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$. Nakonec je uveden příklad (prostor P_2), že tyto postačující podmínky nejsou nutné. Nutné a současně postačující podmínky pro existenci topologie τ se mi, bohužel, nepodařilo nalézti.

Druhá část pojednává o prostorech s $\bar{\bar{O}}$-oddělenými body. Jsou to takové body, jež se dají odděliti uzávěry okolí. Je nasnadě otázka, kdy lze sestrojiti Hausdorffův prostor, jsou-li předem dány dvojice vzájemně $\bar{\bar{O}}$-oddělených bodů. Přesné znění problému je toto:

Nechť je každému prvku x abstraktní množiny M přiřazena podmnožina $\varphi(x) \subset M$, jež obsahuje prvek x. Kdy existuje v M Hausdorffova topologie taková, že body x, y jsou $\bar{\bar{O}}$-oddělené, když a jen když y non $\in \varphi(x)$?

V tomto pojednání je problém řešen pro případ, že $\varphi(x) = M$ pro každý prvek x. To je také řešením Alexandroff-Urysohnova problému položeného v r. 1929, jenž zní:

„On trouvera ailleurs l'exemple d'un espace dénombrable dont tous les points sont inséparables l'un de l'autre; cet espace est de plus connexe. Nous n'avons pas réussi à construire un espace non dénombrable jouissant de la même propriété; l'existence de pareils espaces nous semble d'ailleurs assez probable."[2])

Problémem tímto zabýval se také B. Pospíšil; sestrojil Hausdorffův prostor o regulární mohutnosti bez $\bar{\bar{O}}$-oddělených bodů.[3])

V tomto článku uvádím konstrukci takového prostoru o libovolné nekonečné mohutnosti.

I.

Symbolem $\cup$ budeme označovati sjednocení, symbolem $\cap$ průnik množin. uA značí uzávěr množiny A při topologii u. Nechť jest dána libovolná topologie u. Je jasné, že dva body x a y jsou při této topologii O-neoddělené, když a jen když každé okolí $O(x)$ bodu x má s každým okolím $O(y)$ bodu y společné body, to jest, když a jen když $y \in \cap\, u\, O(x)$ čili $x \in \cap\, u\, O(y)$.

[2]) P. Alexandroff et P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amsterdam 1929, str. 24.

[3]) B. Pospíšil, Trois notes sur les espaces abstraits, Spisy vydávané Přírodovědeckou fakultou Masarykovy university **249** (1937).

Nechť je dána nekonečná abstraktní množina M. Nechť každému bodu $x \in M$ jest jednoznačně přiřazena podmnožina $\varphi(x) \subset M$, jež obsahuje bod x. Písmenem τ označíme každou *Rieszovu* topologii v M, při níž $\varphi(x)$ je průnik uzávěrů všech okolí bodu x. Dva body x a y jsou při topologii τ O-oddělené resp. O-neoddělené, když a jen když y non $\in \varphi(x)$ a x non $\in \varphi(y)$ resp. $y \in \varphi(x)$ a $x \in \varphi(y)$.

Odtud vyplývá věta:

Existuje-li topologie τ, je splněna podmínka (1):

$$\textit{Jestliže } y \in \varphi(x), \textit{ pak } x \in \varphi(y) \tag{1}$$

pro každou dvojici bodů x, y množiny M.

Podmínka (1) je nutná pro existenci topologie τ, nikoli však postačující. To ukážeme na příkladě.

Nechť P_1 je nekonečná množina bodů. Zvolme pevně dva její různé body $a \in P_1$, $b \in P_1$. Definujme

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= a \cup b, \\ \varphi(b) &= P_1, \\ \varphi(x) &= P_1 - a \text{ pro } a \neq x \neq b. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že je splněna vlastnost (1). Topologie τ však neexistuje. Kdyby totiž taková topologie existovala, byla by množina $P_1 - a$ uzavřená jakožto průnik uzavřených okolí bodu x, kde $x \neq a$, $x \neq b$. Komplement její, totiž bod a, byl by otevřený; jelikož $a = \tau a$, je $\bigcap \tau\, O(a) = a$, což je ve sporu s předpokladem, že $\varphi(a) = a \cup b$.

Nechť je dána nekonečná abstraktní množina M. Nechť každému bodu $x \in M$ je přiřazena jednoznačně podmnožina $\varphi(x) \subset$ $\subset M$ obsahující bod x. Nechť je splněna podmínka (1). Body x, y množiny M nazveme sdružené, když $x \in \varphi(y)$ čili — což je vzhledem k podmínce (1) totéž — když $y \in \varphi(x)$. Sdružené body označíme symbolicky $x \sim y$. Sdruženost je vlastnost reflexivní (neboť $x \in \varphi(x)$), symetrická (neboť platí předpokládaná vlastnost (1)), není však obecně transitivní.

Věta 1. *Nechť M je nekonečná abstraktní množina o mohutnosti $\mathfrak{m}$. Nechť existuje stejně mohutná podmnožina $N \subset M$, jejíž žádné dva různé body nejsou sdružené; nechť je dále mohutnost průniku $N \cap \varphi(x)$ pro každé $x \in M$ menší než $\mathfrak{m}$. Nechť je splněna vlastnost* (1). *Pak existuje v M topologie τ.*

Důkaz. Buď

$$P_1, P_2, \ldots, P_\lambda, \ldots \quad (\lambda < \mu), \tag{2}$$

kde μ je prvé ordinální číslo mohutnosti $\mathfrak{m}$, disjunktní systém podmnožin $P_\lambda \subset N$ o mohutnostech vesměs $\mathfrak{m}$. Označme jej (2). Buď dále $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda, \ldots$ systém všech dvojic bodů $\alpha = (x, y) = (y, x)$

množiny M, jež jsou sdružené: $x \sim y$. Označme jej $\mathfrak{C}$. Jelikož $x \sim x$, jest $(x, x) \in \mathfrak{C}$, takže mohutnost systému $\mathfrak{C}$ je $\mathfrak{m}$. Můžeme tudíž předpokládati, že indexy λ, jimiž jsou označeny dvojice bodů α_λ, probíhají všecka ordinální čísla menší než μ tak, jak je tomu s podmnožinami P_λ. Je-li $\alpha_\lambda = (x, y)$, řekneme, že podmnožina P_λ *přísluší* bodu x i bodu y. Poznamenejme, že každému bodu $x \in M$ přísluší aspoň jedna množina ze systému (2).

Do množiny M zavedeme topologii u. Okolím bodu $x \in M$ rozumíme bod x a všecky množiny $Q_\lambda \subset P_\lambda$ takové, že $P_\lambda - Q_\lambda$ má mohutnost menší než $\mathfrak{m}$, při čemž množiny P_λ příslušejí k bodu x. Dá se snadno dokázati, že jsou splněny prvé dva Hausdorffovy axiomy okolí (A), (B), kdežto třetí (C) obecně nikoliv. Aby i tento třetí byl splněn, musíme provésti určitou modifikaci okolí.

Za tím účelem nazveme okolím prvého řádu u-okolí $U(x)$ bodu x. Označíme je $U^1(x)$. Jsou-li už definována okolí $U^n(x)$ bodu x řádu n, definujme okolí $U^{n+1}(x)$ bodu x řádu $n + 1$ takto:

$$U^{n+1}(x) = U^n(x) \cup \bigcup_{y \in D_n} U(y),$$

kde $D_n = U^n(x) - U^{n-1}(x)$ (pro $n = 1$ položíme $U^0(x) = x$). Novým okolím $V(x)$ bodu x buďiž pak množina

$$V(x) = \bigcup_{1}^{\infty} U^n(x).$$

Okolí tohoto tvaru nazveme definujícím okolím a novou topologii označíme v. Dá se snadno dokázati,[4]) že v-okolí $V(x)$ jsou otevřená v topologii v a že jsou splněny prvé tři axiomy okolí (A), (B), (C).

Lema 1. *Je-li mohutnost průniku $L \cap N$ menší než $\mathfrak{m}$, pak je podmnožina $L \subset M$ uzavřená v topologii v.*

Vskutku, je-li $L \subset M$ takovou podmnožinou a je-li $U(x)$ definujícím u-okolím bodu $x \in M - L$, pak jest $U(x) - L = U(x) - N \cap L$ rovněž u-okolím bodu x. Je-li tudíž $V(x)$ definující v-okolí bodu x, pak jest také $V(x) - L = V(x) - N \cap L$ v-okolím (ne nutně definujícím) bodu x; množina $M - L$ je tudíž otevřená v topologii v.

Z lema 1 vychází, že každá množina $\varphi(x)$ a zejména každá množina o mohutnosti menší než $\mathfrak{m}$ jest uzavřená. Proto jsou jednobodové množiny uzavřené a topologie v je Rieszova.

Nejdůležitější částí důkazu věty 1 je rovnost

$$\varphi(x) = \bigcap v\, V(x) \tag{3}$$

pro každý bod $x \in M$. Dokažme nejprve inklusi $\varphi(x) \subset \bigcap v\, V(x)$. Jestliže $y \in \varphi(x)$, pak $x \sim y$. Existuje tudíž $\alpha_\lambda = (x, y)$ a množina P_λ

[4]) Důkaz viz v pojednání: J. Novák, Regulární prostor, na němž každá spojitá funkce je konstantní, Časopis 73 (1948).

přísluší jak bodu x tak i bodu y. Jsou-li $U(x)$ a $U(y)$ libovolná u-okolí bodu x a bodu y, pak obsahují tato až na podmnožinu mohutnosti menší než m celou množinu P_λ. Tím spíše to platí o každém v-okolí $V(x)$ bodu x a každém v-okolí $V(y)$ bodu y, takže jest $V(x) \cap V(y) \neq 0$. Tedy $y \in v\, V(x)$ pro každé okolí $V(x)$ bodu x, to jest $y \in \bigcap v\, V(x)$.

Opačnou inklusi dokážeme nepřímo. Předpokládejme existenci bodu $z \in \bigcap v\, V(x) - \varphi(x)$. Naším úkolem bude konstrukce dvou disjunktních v-okolí $V(x)$ a $V(z)$, čímž dostaneme spor s předpokladem $z \in \bigcap v\, V(x)$.

Jelikož bod z není ve $\varphi(x)$, nejsou body x a z sdružené. Žádná množina P_λ, jež je přiřazena bodu x, není současně přiřazena bodu z. Proto existují dvě disjunktní okolí $U^1(x)$ a $U^1(z)$ těchto bodů. Podle lema 1 jsou množiny $M - \varphi(z)$ a $M - \varphi(x)$ otevřené; bez újmy obecnosti můžeme tudíž předpokládati, že $\varphi(z) \cap U^1(x) = 0 = \varphi(x) \cap U^1(z)$. Máme-li už sestrojena okolí řádu $i = 1, 2, \ldots, n$ taková, že

$$U^i(x) \cap U^i(z) = 0,$$

$$\varphi(z) \cap U^i(x) = 0 = \varphi(x) \cap U^i(z), \tag{4}$$

zvolme okolí řádu $n + 1$: $U^{n+1}(x)$ a $U^{n+1}(z)$ taková, že (4) platí také pro $i = n + 1$.

Okolí $U^{n+1}(x)$ a $U^{n+1}(z)$ jsou disjunktní. Pro nepřímý důkaz tohoto tvrzení předpokládejme, že existuje společný bod $t \in U^{n_1}(x) \cap U^{n_2}(z)$, kde n_1 a n_2 jsou nejmenší možná celá čísla. (Jelikož $x \in \varphi(x)$, $z \in \varphi(z)$, $U^0(x) = x$, $U^0(z) = z$, nemůže býti vzhledem k (4) ani $n_1 = 0$ ani $n_2 = 0$, takže $1 \leq n_1, n_2 \leq n + 1$). Jelikož $U^{n_1}(x) \subset x \cup \bigcup P_\xi$, dále $U^{n_2}(z) \subset z \cup \bigcup P_\eta$, a jelikož $x \neq t \neq z$, existují indexy ξ, η tak, že $t \in P_\xi \cap P_\eta$. Poněvadž $P_\xi \cap P_\eta = 0$ pro $\xi \neq \eta$, musí býti $\xi = \eta$. Množina P_ξ je tudíž přiřazena jednak určitému bodu $a \in U^{n_1-1}(x)$, jednak určitému bodu $b \in U^{n_2-1}(z)$. Zřejmě $a \neq b$, neboť jinak by n_1, n_2 nebyla nejmenší čísla s žádanou vlastností. Dále jest $a \sim b$, neboť $\alpha_\xi = (a, b)$. Z tohoto důvodu nemohou býti oba body a, b současně v množině N. Avšak

$$U^{n_1-1}(x) - x \subset N, \quad U^{n_2-1}(z) - z \subset N.$$

Odtud vyplývá, že buďto $a = x$ nebo $b = z$. Tedy buďto $b \in \varphi(x)$ nebo $b \in \varphi(x)$ nebo $a \in \varphi(z)$. To je ve sporu s (4) pro $i = n_2 - 1$ resp. $i = n_1 - 1$, doplníme-li platnost (4) také pro $i = 0$.

Tak jsme sestrojili úplnou indukcí dvě disjunktní v-okolí $V(x) = \bigcup_1^\infty U^i(x)$ bodu x a $V(z) = \bigcup_1^\infty U^i(z)$ bodu z. Tím je dokázána rovnost (3). Z věty 1 vyplývá

Korolár 1. *Nechť M je nekonečná abstraktní množina o regulární mohutnosti $\mathfrak{m}$. Nechť každá množina $\varphi(x)$ má mohutnost menší než $\mathfrak{m}$. Nechť je splněna vlastnost* (1). *Pak existuje v M topologie τ.*

Důkaz. Zvolme bod $x_1 \in M$. Máme-li už zvoleny body $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots$ $(\lambda < \beta)$, zvolme v množině

$$M - \bigcup_{\lambda<\beta} \varphi(x_\lambda) \tag{5}$$

bod x_β. To je možné pro každé ordinální číslo $\beta < \mu$, kde μ je prvé ordinální číslo mohutnosti $\mathfrak{m}$, neboť sjednocení méně než $\mathfrak{m}$ množin $\varphi(x_\lambda)$ s mohutnostmi menšími než $\mathfrak{m}$ má mohutnost opět menší než regulární $\mathfrak{m}$, takže množina (5) není prázdná. Takto jest methodou transfinitní indukce sestrojena množina N prvků x_λ o mohutnosti $\mathfrak{m}$.

Žádné dva různé body množiny N nejsou sdružené. Vskutku, jsou-li x_α, x_β $(\alpha < \beta)$ dva body z N, pak podle (5) nenáleží bod x_β do množiny $\bigcup_{\lambda<\beta} \varphi(x_\lambda)$, zejména nenáleží do $\varphi(x_\alpha)$, takže tyto body nejsou sdružené.

Jsou splněny předpoklady věty 1. Platí tudíž i korolár 1.

Korolár 2. *Nechť je M nekonečná abstraktní množina o regulární mohutnosti $\mathfrak{m}$. Nechť množiny $\varphi(x)$ s mohutnostmi $\mathfrak{m}$ pokryjí M až na podmnožinu M^* o mohutnosti $\mathfrak{m}$. Nechť je splněna vlastnost* (1). *Pak existuje v M topologie τ.*

Důkaz. Pro každý bod $x \in M^*$ je $\varphi(x)$ množinou o mohutnosti menší než $\mathfrak{m}$. Proto existuje podmnožina $N \subset M^*$ bodů o mohutnosti $\mathfrak{m}$, jejíž žádné dva různé body nejsou sdružené. Zřejmě je také mohutnost průniku $N \cap \varphi(x)$ pro každou $\varphi(x) \subset M$ menší než $\mathfrak{m}$. Podle věty 1 platí tedy korolár 2.

Není-li mohutnost $\mathfrak{m}$ množiny M regulární, pak platí korolár 1 za předpokladu, že všecky množiny $\varphi(x)$ mají mohutnost menší než $\mathfrak{m}'$, kde $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$. Neboť pak existuje množina N o mohutnosti $\mathfrak{m}$, jejíž žádné dva různé body nejsou sdružené a každý průnik $N \cap \varphi(x)$ má mohutnost menší než $\mathfrak{m}$.

Nejsou-li splněny podmínky věty 1, může přesto existovati topologie τ. Jako příklad uveďme prostor P_2, jehož body jsou celá čísla. Okolím čísla 0 je číslo 0 a skoro celá množina P_2, okolím kladného (záporného) čísla je to číslo a skoro celá množina kladných (záporných) celých čísel. P_2 je Rieszův prostor s vlastností:

$\bigcap u\, O(n) = \varphi(n)$ je množina všech nezáporných celých čísel pro $n = 1, 2, \ldots$

$\bigcap u\, O(-n) = \varphi(-n)$ je množina všech nekladných celých čísel pro $n = 1, 2, \ldots$

$\bigcap u\, O(0) = \varphi(0) = P_2$.

(Vlastnost (1) je sice splněna, avšak podmnožina N je nejvýš dvoubodová.)

II.

Dva body topologického prostoru slují $\bar{\bar{O}}$-oddělené,[5]) když existují dva disjunktní uzávěry jejich okolí. Provedeme nyní konstrukci Hausdorffova prostoru o libovolné nekonečné mohutnosti a bez bodů $\bar{\bar{O}}$-oddělených (problém Alexandroff-Urysohnův). Sestrojíme napřed L-prostor s touto vlastností, pak zavedeme určitou modifikaci topologie a dostaneme prostor, jenž vyhovuje požadavkům Alexandroff-Urysohnova problému.

Nechť T je abstraktní nekonečná množina o libovolné mohutnosti. Nechť $T = \bigcup_1^\infty T_i$ je rozklad množiny T na disjunktní nekonečné sčítance T_i. Zvolme určité body $t_i \in T_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Nechť $T \times T$ značí kartézský součin množiny T s T. Identifikujme body $(t_i, y) = (t_i, y')$ pro všechna $y \in T$, $y' \in T$ a pro $i = 1, 2, \ldots$ Množinu identifikovaných bodů označme $J = \bigcup_1^\infty (t_i, y)$. Množinu $T \times T$ s identifikovanými body (t_i, y) označme R.

Nechť f značí prosté zobrazení množiny R na množinu T. Zaveďme do množiny R L-topologii u pomocí à priori konvergentních posloupností:

(1) Posloupnost, obsahující jediný bod, konverguje k tomuto bodu.

(2) K bodu $(x, y) \in R$ konverguje každá prostá (a z ní vybraná) posloupnost $\{x_n, f(x, y)\}_1^\infty$, kde $x_n \in T_n - t_n$, a je-li $x = t_i$, pak ještě každá prostá posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$, kde $x_n \in T_i$.

Takto definovaný L-prostor R splňuje Hausdorffův axiom okolí (D). Abychom to dokázali, jest třeba si všimnouti, jak vypadají okolí prostoru R. Snadno se nahlédne, že p-tým okolím bodu $(x, y) \in R$ je množina $O_p(x, y) = (x, y) \cup \bigcup_p^\infty (T_i \times f(x, y)) - J$, a je-li $x = t_i$, pak ještě skoro všecky body množiny $T_i \times T$. Jsou-li nyní (x, y), (x', y') dva různé body prostoru R, pak jest $f(x, y) \neq f(x', y')$, takže

$$(T \times f(x, y)) \cap (T \times f(x', y')) = 0.$$

Je-li tedy $x \in T_l$, $x' \in T_{l'}$, pak existují okolí $O_m(x, y) \cap O_n(x', y') = 0$ pro $m, n > \max(l, l')$, j. b. d.

Je-li $O(x, y)$ libovolné okolí bodu (x, y), pak skoro všecky body (t_i, y) náležejí do uzávěru tohoto okolí, neboť $(t_i, y) \in u\, O_p(x, y)$ pro $i \geq p$. Odtud vyplývá, že žádné dva body prostoru R nejsou $\bar{\bar{O}}$-oddělené.

[5]) P. Urysohn, Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. 94 (1925), 268.

Prostor R nesplňuje Hausdorffův axiom (C). Musíme tedy provésti modifikaci topologie u. Postupujeme podobně jako v části I. Definujeme okolí $O^n(x, y)$ řádu n a za definující v-okolí bodu (x, y) prohlásíme množinu

$$V(x) = \bigcup_1^\infty O^n(x, y).$$

Tato topologie je Hausdorffova. Nechť jsou dány dva různé body $(a, b) \neq (c, d)$. Dokažme, že jsou O-oddělené.

Existují indexy k, l tak, že $a \in T_k$, $c \in T_l$. Nechť $p > l$. Nechť $V(a, b) = \bigcup_1^\infty O^n(a, b)$ je definující v-okolí bodu (a, b), při čemž nechť okolí $O^1(a, b)$ je p-té okolí bodu (a, b) a dále nechť

$$O^{n+1}(a, b) = O^n(a, b) \cup \bigcup_{(x,y)\in D_n} O_p(x, y),$$

kde $D_n = O^n(a, b) - O^{n-1}(a, b)$ pro $n = 1, 2, \ldots$, neobsahuje bod (c, d). Množina

$$A = V(a, b) \cup \bigcup_p^\infty (t_i, y)$$

je uzavřená v topologii v. Stačí dokázati, že je $uA \subset A$, neboť modifikovaná topologie v zřejmě zachovává u-uzavřené množiny v-uzavřenými.

Nechť tedy prostá bodová posloupnost konverguje v množině A. Podle definice konvergence má buďto nekonečně mnoho bodů posloupnosti prvou souřadnici $x \in T_q$ při pevném indexu q; pak posloupnost konverguje k bodu (t_q, y), jenž je roven bodu (a, b) nebo je $q \geq p$; v obou případech limita $(t_q, y) \in A$. Nebo skoro všechny body posloupnosti mají druhou souřadnici $f(x, y)$ stejnou a náležejí do okolí $O_p(x, y) \subset O^{n+1}(a, b) \subset A$; její limitou je bod $(x, y) \in O_p(x, y)$, jenž náleží do množiny A.

Bod (c, d) náleží do otevřené množiny $R - A$. Vskutku, ani okolí $V(a, b)$ neobsahuje bod (c, d) ani množina $\bigcup_p^\infty (t_i, y)$, neboť $p > l$. Body (a, b), (c, d) jsou odděleny otevřenými množinami $V(a, b) \cap (R - A) = 0$.

Žádné dva body prostoru R nejsou v topologii v $\bar{\bar{O}}$-oddělené, neboť do uzávěru každého okolí u $O(x, y)$ a tím spíše do uzávěru každého okolí v $V(x, y)$ náležejí skoro všecky body množiny J. Přitom má prostor R libovolnou nekonečnou mohutnost rovnou mohutnosti abstraktní množiny T.

Jelikož v R neexistuje dvojice $\bar{\bar{O}}$-oddělených bodů, je každá spojitá reálná funkce definovaná na prostoru R konstantní.[6]) Odtud vyplývá, že prostor R je souvislý.

[6]) Viz P. Urysohn, loc. cit., str. 291, 292.

Construction d'espaces dont les points O-resp. $\overline{\overline{O}}$-séparables sont donnés d'avance.

(Extrait de l'article précédent.)

I. Dans le présent article je me propose de construire des espaces T_1, dont les couples de points O-séparables c. à. d. points avec les entourages disjoints sont donnés d'avance (problème de M. Čech). Soit donné un ensemble abstrait M de la puissance $\mathfrak{m}$. A tout point x associons un sousensemble $\varphi(x)$ contenant le point x. Désignons par τ une topologie telle que l'ensemble $\varphi(x)$ est égal à la partie commune de la fermeture de tous les entourages de x. La condition

$$\text{si } x \in \varphi(y), \text{ alors } y \in \varphi(x) \tag{1}$$

est nécessaire mais pas suffisante pour l'existence de la topologie τ. Par contre, la topologie τ existe, si la condition (1) est valable et s'il existe un sousensemble infini N de la puissance $\mathfrak{m}$ tel que x non $\in \varphi(y)$ pour $x \in N$, $y \in N$, $x \neq y$ et que la puissance de la partie commune $N \cap \varphi(x)$ est $< \mathfrak{m}$ pour tout point x.

Il en résulte: La topologie τ existe, si la condition (1) est valable et si la puissance de tout ensemble $\varphi(x)$ est $< \mathfrak{m}$ ou $< \mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ étant régulier dans le premier cas et irrégulier dans le second.

II. Dans cet article on donne la construction d'un espace T_2 de puissance arbitraire indénombrable, dans lequel il n'y a pas d'ensembles ouverts avec fermetures disjointes (deux points $\overline{\overline{O}}$-séparables). C'est la solution du problème d'Alexandroff et Urysohn.