Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Kaucký

# Příspěvek k diferenčnímu počtu

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 54 (1925), No. 1, 27--29

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123140`

# Příspěvek k diferenčnímu počtu.

Napsal *Jos. Kaucký.*

V tomto článku podávám krátký důkaz rovnice (8), která tvoří východisko úvah H. L. Smitha v práci „On the Ampère-Cauchy derived functions“ (Annals of Mathematics, Vol. 25, N° 2, 1924; p. 124).

1. Uvažujme funkci o jedné proměnné $f(x)$, o níž předpokládáme, že má derivaci $n$-ho řádu $f^{(n)}(x)$; $x_0, x_1, \ldots x_n$ buďtež čísla navzájem různá. Utvořme následující řadu diferenčních kvocientů

$$[x_0] = f(x_0),\ [x_1] = f(x_1), \ldots$$

$$[x_0 x_1] = \frac{[x_0] - [x_1]}{x_0 - x_1},\ [x_1 x_2] = \frac{[x_1] - [x_2]}{x_1 - x_2}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[x_0 x_1 x_2 \cdots x_n] = \frac{[x_0 x_1 \cdots x_{n-1}] - [x_1 x_2 \cdots x_n]}{x_0 - x_n}, \ldots \tag{1}$$

Výraz $[x_0 x_1 \ldots x_n]$ lze psáti ve tvaru integrálu. Je totiž předně patrno, že

$$[x_0 x_1] = \int_0^1 dt_1 f'[(1 - t_1) x_0 + t_1 x_1);$$

úplnou indukcí snadno získáme obecný vztah

$$\begin{aligned}[x_0 x_1 \ldots x_n] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)}[(1 - t_1) x_0 + \cdots + \\ + (t_{n-1} - t_n) x_{n-1} + t_n x_n].\end{aligned} \tag{2}$$

2. Budiž dáno $n$ čísel $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. Utvořme pro funkce $f(x)$ následující diference

$$\mathop{\Delta}_{\omega_1} f(x) = \frac{f(x + \omega_1) - f(x)}{\omega_1} \qquad (\omega_1 \neq 0);$$

obecně budiž

$$\mathop{\Delta}_{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n}^{n} f(x) = \mathop{\Delta}_{\omega_n} \left( \mathop{\Delta}_{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_{n-1}}^{n-1} f(x) \right). \tag{3}$$

Z definice je předně patrna rovnice

$$\underset{\omega_1}{\Delta} f(x) = \int_0^1 dt_1 f'(x+\omega_1 t_1);$$

úplnou indukcí získáváme obecný vztah

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n}{\Delta}} f(x) = \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \ldots \int_0^1 dt_n f^{(n)}(x+\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_n t_n) \quad (4)$$

3. Volme

$$\begin{aligned} x_0 &= x,\ x_1 = x+\omega_{i_1},\ x_2 = x+\omega_{i_1}+\omega_{i_2},\ldots \\ x_n &= x+\omega_{i_1}+\cdots+\omega_{i_n}, \end{aligned} \quad (5)$$

kde $i_1, i_2, \ldots i_n$ je permutace z čísel 1, 2,...$n$. Tu

$$\begin{aligned} (1-t_1)\,x_0 + (t_1-t_2)\,x_1 + \cdots + (t_{n-1}-t_n)\,x_{n-1} + t_n\,x_n = \\ = x + \omega_{i_1} t_1 + \omega_{i_2} t_2 + \cdots + \omega_{i_n} t_n. \end{aligned}$$

Ukážeme nyní, že součet

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)}(x+\omega_{i_1} t_1+\omega_{i_2} t_2+\cdots+\omega_{i_n} t_n), \quad (6)$$

kde symbol součtový znamená, že nutno za $i_1, i_2 \ldots i_n$ postupně klásti všechny permutace z čísel 1, 2,... $n$, dá se snadno vyčísliti. Vidíme zprvu, že uspořádáním argumentu funkce za integračním znamením součet (3) přejde v součet

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)}(x+\omega_1 t_{i_1}+\omega_1 t_{i_2}+\cdots+\omega_n t_{i_n}),$$

z něhož substitucí

$$t_{i_1} = t'_1,\ t_{i_2} = t'_2, \ldots t_{i_n} = t_n'$$

obdržíme výraz

$$\underbrace{\int dt_1 \int dt_2 \ldots \int^n dt_n}_{\Omega} f^{(n)}(x+\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_n t_n), \quad (7)$$

kde $\qquad \Omega \equiv \sum\limits_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ obor $(0 \leq t_{i_1} \leq t_{i_2} \ldots \leq t_{i_n} \leq 1)$.

Je tedy $\Omega$ $n$-dimensionální jednotková krychle a výraz (7) rovná se

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \ldots \int_0^1 dt_n f^{(n)}(x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_n t_n).$$

Dospěli jsme tudíž ke vztahu

$$\overset{n}{\underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\Delta}} f(x) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} [x_0\, x_1 \ldots x_n], \tag{8}$$

kde $x_0, x_1, \ldots x_n$ je dáno vzorci (5).[1]

## Contribution au calcul aux différences finies.

(Extrait de l'article précédent)

Dans son travail „On the Ampère-Cauchy derived functions“ (Annals of mathematics, vol. 25. No. 2., 1924; p. 124) M. H. L. Smith a démontré la formule suivante

$$\overset{n}{\underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\Delta}} f(x) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} [x_0\, x_1 \ldots x_n]$$

$$x_0 = x,\ x_1 = x + \omega_{i_1},\ x_2 = x + \omega_{i_1} + \omega_{i_2}, \ldots,\ x_n = \\ = x + \omega_{i_1} + \omega_{i_2} \ldots + \omega_{i_n},$$

où les expressions $\overset{n}{\Delta}$ et $[x_0 \ldots x_n]$ sont définies par les formules (1) et (3); $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont des nombres donnés et la sommation est étendue à toutes les permutations $i_1\, i_2 \ldots i_n$ des nombres 1, 2, . . ., $n$.

En employant des expressions intégrales de $\overset{n}{\Delta}$ et $[x_0, \ldots, x_n]$, (2) et (4), j'ai donné, dans l'article précédent, une autre démonstration, qui est plus courte.

---

[1]) Zde dlužno uvésti, že prof. Hostinský podobným způsobem odvodil vztah $[\int_\xi^x f(z)\, dz]^n = n!\, \int_\xi^x f(z_1) \int_\xi^{z_1} f(z_2)\, dz_2 \ldots \int_\xi^{z_{n-1}} f(z_n)\, dz_n$. (Časopis XLVII., str. 292. pozn.)