Karel Čupr

O některých důsledcích plynoucích z Lagrangeovy interpolační formule

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 1, 1--17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123138`

O některých důsledcích plynoucích z Lagrangeovy interpolační formule.

Napsal *K. Čupr.*

1. Budiž $f(z) \equiv a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ polynom stupně n, $F(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{n+1})$ polynom stupně $(n+1)$ mající nulová místa vesměs různá; pak z rozkladu racionální funkce $f(z) : F(z)$ v částečné zlomky

$$\frac{f(z)}{F(z)} = \sum_{1}^{n+1} \frac{f(z_k)}{F'(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k},$$

plyne ihned interpolační formule Lagrangeova

$$f(z) = \sum_{1}^{n+1} \frac{f(z_k)}{F'(z_k)} \cdot \frac{F(z)}{z - z_k}.$$

Pro funkci $f(z + \zeta)$ platí obdobně

$$f(z + \zeta) = \sum_{1}^{n+1} \frac{f(z_k + \zeta)}{F'(z_k)} \cdot \frac{F(z)}{z - z_k}.$$

p-tá derivace $(p \leqq n)$ dle Leibnicovy věty jest:

$$D^{(p)} f(z+\zeta) = f^{(p)}(z + \zeta) = F(z) \cdot D^{(p)} \left[\sum_{1}^{n+1} \frac{f(z_k + \zeta)}{F'(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} \right] +$$

$$+ \binom{p}{1} F'(z) D^{(p-1)} \left[\sum_{1}^{n+1} \frac{f(z_k + \zeta)}{F'(z_k)} \cdot \frac{l}{z - z^k} \right] +$$

$$+ \binom{p}{2} F''(z) D^{(p-2)} \left[\sum_{1}^{n+1} \frac{f(z_k + \zeta)}{F'(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} \right] + \ldots$$

$$\ldots + F^{(p)}(z) D \left[\sum_{1}^{n+1} \frac{f(z_k + \zeta)}{F'(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} \right].$$

Volme $F(z) \equiv z^{n+1} \pm m^{n+1}$, pak

$$F'(z) = (n+1) z^n, \quad z_k^{p+1} F'(z_k) = (n+1) z_k^{n+1+p} = \mp (n+1) z_k^p$$

$$D^{(p)} \left(\frac{1}{z - z_k} \right) = \frac{(-1)^p p!}{(z - z_k)^{p+1}};$$

položme ještě $\qquad z = 0,$

$$f^{(p)}(\zeta) = \frac{(-1)^{p+1} p!}{n+1} \sum_{1}^{n+1} \frac{f(z_k + \zeta)}{z_k^p}.$$

Body $z_1 + \zeta$, $z_2 + \zeta, \ldots z_k + \zeta \ldots$ leží na kružnici o středu ζ a poloměru $|z_k| = m$; platí-li pro $k = 1, 2, \ldots n+1$

$$|f(z_k + \zeta)| \leqq m,$$

jest $\quad |f^{(p)}(\zeta)| \leqq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1) \cdot p! \, M}{m^p} = \frac{p! \, M}{m^p}.$

Vztah tento zůstává ovšem v platnosti, když na obvodě zmíněného kruhu jest vesměs

$$|f(\zeta)| \leqq M.$$

Je-li $\zeta = 0$, jest $|f^{(p)}(0)| = p! \, |a_p|$, takže

$$|a_p| \leqq \frac{M}{m^p},$$

$$M \geqq m^p. \, |a^p|; \text{ t. j.}$$

„Maximum absolutní hodnoty polynomu na kružnici $(0, 0; m)$ jest větší nebo rovno největšímu z čísel

$$|a_0|, \; m \, |a_1|, \; m^2 \, |a_2|, \ldots \; m^n \, |a_n|.“$$

2. Zajímavější výsledky než tyto, jež ostatně jest možno odvoditi z Cauchyova integrálu, obdržíme, klademe-li

$$F(z) \equiv T_{n+1} \equiv \cos [(n+1) \arc \cos z] : 2^n,$$

$$F(o) = 1 : 2^n$$

o kořenech $z_1 = \cos \dfrac{\pi}{2n+2}$, $z_2 = \cos \dfrac{3\pi}{2n+2}, \ldots$

T_n jsou známé Čebyševovy polynomy, jež lze psát též ve tvaru

$$T_n(z) = \frac{1}{2^n}\left[(z+\sqrt{z^2-1})^n + (z-\sqrt{z^2-1})^n\right] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^\nu . n}{2^n (n-\nu)} \binom{n-\nu}{\nu} (2z)^{n-2\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^\nu n}{2^{2\nu}(n-\nu)} \binom{n-\nu}{\nu} z^{n-2\nu}.$$

Budiž především n liché, tudíž $(n+1)$ sudé a omezme se na interval $-1 \ldots . +1$. Jest především

$$F'(z) = \frac{(n+1)}{2^n} \frac{\sin[(n+1)\arccos z]}{\sqrt{1-z^2}}, \quad F'(o) = 0,$$

$$F'(z_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^n \sin\frac{2k-1}{2n+2}\pi},$$

takže

$$f'(\zeta) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{f(\zeta+z_k)}{n+1} \cdot \frac{\sin\frac{2k-1}{2n+2}\pi}{\cos^2\frac{2k-1}{2n+2}\pi}.$$

Je-li v celém intervalu (incl. meze)

$$-1-\cos\frac{\pi}{2n+2} \ldots \qquad \ldots 1+\cos\frac{\pi}{2n+2}$$

vesměs $|f(\zeta)| \leq M$, jest v intervalu $-1 \ldots +1$ incl. meze

$$|f'(\zeta)| < \frac{M}{n+1} \sum_{1}^{n+1} \frac{1}{\cos^2\frac{2k-1}{2n+2}\pi}.$$

Součet v pravo stanovíme snadno, jest to vlastně

$$\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \ldots \frac{1}{z^2_{n+1}} = \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_{n+1}}\right)^2 -$$

$$-2\left(\frac{1}{z_1 z_3} + \frac{1}{z_1 z_3} + \ldots + \frac{1}{z_n z_{n+1}}\right) =$$

$$= \left(\frac{T'_{n+1}(0)}{T_{n+1}(0)}\right)^2 - \left(\frac{T''_{n+1}(0)}{T_{n+1}(0)}\right) = (n+1)^2;$$

lze tedy vysloviti větu:

„Platí-li o polynomu $f(\zeta)$ stupně lichého n $|f(\zeta)| \leqq M$ v intervalu $-1-\cos\frac{\pi}{2n+2} \leqq \zeta \leqq 1+\cos\frac{\pi}{2n+2}$, jest v intervalu $-1 \leqq \zeta \leqq 1$

$$|f'(\zeta)| < (n+1)\, M.\text{“}$$

3. Odvodíme podobnou větu i pro sudá n. Applikujme Lagrangeovu interpolační formuli na polynom $f(z) - a_n z^n$, při čemž

$$F(z) \equiv T_n(z);$$

pak jest

$$f(z) - a_n z^n = \sum_1^n (f(z_k) - a_n z_k^n)\, \frac{T_n(z)}{T'_n(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} =$$

$$= \sum_1^n f(z_k)\, \frac{T_n(z)}{T'(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} - a_n T_n(z) \sum_1^n \frac{z_k^n}{T'(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k};$$

platí však

$$\frac{z^n}{T_n(z)} = 1 + \frac{z^n - T_n(z)}{T_n(z)} = 1 + \sum_1^n \frac{z_k^n - T_n(z_k)}{T'_n(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} =$$

$$= 1 + \sum_1^n \frac{z_k^n}{T'_n(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k},$$

poněvadž $z^n - T_n(z)$ jest stupně $(n-1)$-ho, $T_n(z)$ n-tého, $T_n(z_k) = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots n$; jest tedy

$$a_n T_n(z) \sum_1^n \frac{z_k^n}{T'_n(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} = a_n T_n(z) \left(\frac{z^n}{T_n(z)} - 1\right) =$$

$$= a_n z^n - a_n T_n(z),$$

a dále

$$f(z) = \sum_1^n f(z_k)\, \frac{T_n(z)}{T'_n(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} + a_n T_n(z),$$

a podobně

$$f(z+\zeta) = \sum_1^n f(\zeta + z_k)\, \frac{T_n(z)}{T'_n(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} + a_n T_n(z).$$

Derivujme dle z a položme $z = 0$; máme

$$f'(\zeta) = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (-1)^{n+k+1} f(\zeta + z_k) \frac{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi}{\cos^2 \frac{2k-1}{2n} \pi},$$

odsud týmiž obraty jako prve:

„Je-li $f(\zeta)$ polynom stupně sudého n a platí-li v intervalu

$$-1 - \cos \frac{\pi}{2n} \leqq \zeta \leqq 1 + \cos \frac{\pi}{2n}$$

$|f(\zeta)| < M$, jest v intervalu

$$-1 \leqq \zeta \leqq 1$$

$|f'(\zeta)| < nM$".

4. Kdybychom místo intervalu $-1 \ldots +1$ uvažovali interval $a \ldots b$, užijeme jako polynomu $F(z)$ polynomu

$$\frac{\cos\left[(n+1) \arccos \frac{2z - a - b}{b - a}\right]}{2^n},$$

$$\text{resp. } \frac{\cos\left[n \arccos \frac{2z - a - b}{b - a}\right]}{2^{n-1}}$$

obdržíme týmiž obraty jako v odst. 2. a 3.:

1. „Když o polynomu stupně lichého n v intervalu

$$a - \frac{|a+b|}{2} - \frac{|a-b|}{2} \cos \frac{\pi}{2n+2} \leqq \zeta \leqq b + \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} \cos \frac{\pi}{2n+2}$$

platí $|f(\zeta)| \leqq M$, jest v intervalu $a \leqq \zeta \leqq b$

$$\left| f'\left(\zeta + \frac{a+b}{2}\right) \right| < (n+1) \cdot \frac{4M}{(a-b)^2}."$$

2. „Když o polynomu stupně sudého n v intervalu

$$a - \frac{|a+b|}{2} - \frac{|a-b|}{2} \cos \frac{\pi}{2n} \leqq \zeta \leqq b + \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} \cos \frac{\pi}{2n}$$

platí $|f(\zeta)| \leqq M$, jest v intervalu $a \leqq \zeta \leqq b$

$$\left| f'\left(\zeta + \frac{a+b}{2}\right) \right| < n \cdot \frac{4M}{(a-b)^2}."$$

Jednodušší výsledky nastanou, když $a+b=0$, t. j. když interval jest položen symetricky vzhledem k bodu (0, 0). Výsledky odvozené v 2., 3., 4. odst. nejsou v rozporu s větou, kterou odvodil A. Markov (Publ. Petrohrad. Akadem. sv. 62; viz též Riesz: Jahrb. d. d. M. Ver. 1914; XXIII. p. 359, podrobněji Schur: Math. Zeitschrift 1919; IV. p. 271); dle jeho věty, je-li v itntervalu $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ $|f(\zeta)| \leqq M$, jest v tém ž intervalu $|f'(\zeta)| \leqq n^2 M$; znaménko rovnosti platí jest v případě $f(z) \equiv T_n(z)$.

I větu obdobnou větě V. Markova (předčasně zesnulého bratra předešlého matematika) a uveřejněnou v něm. překladě (Math. Annalen 1916; 77 p. 213, zejm. 247—258) lze z našich úvah snadno odvoditi; a jest:

„Když v intervalu $-1-\cos\frac{\pi}{2n+2} \leqq \zeta \leqq 1+\cos\frac{\pi}{2n+2}$ pro lichá n a v intervalu $-1-\cos\frac{\pi}{2n} \leqq \zeta \leqq 1+\cos\frac{\pi}{2n+2}$ pro sudá n jest

$$|f(\zeta)| \leqq M,$$

jest v intervalu $-1 \leqq \zeta \leqq 1$

$$|f^{(m)}(\zeta) < \varrho_{n,m} \cdot M.$$

Kdež

$$\begin{aligned}
&\varrho_{n,m} = n^2 (n-2)^2 \ldots (n-2k+2)^2 (n-2k), && n \text{ sudé}, m = 2k,\\
&\varrho_{n,m} = n^2 (n-2)^2 \ldots (n-2k+2)^2 (n-2k)^2, && n \quad „ \quad, m = 2k+1\\
&\varrho_{n,m} = (n+1)(n-1)^2 \ldots (n-2k+1)^2, && n \text{ liché}, m = 2k,\\
&\varrho_{n,m} = (n+1)(n-1)^2 \ldots (n-2k-2)(n-2k-1), && n \quad „ \quad, m = 2k+1,
\end{aligned}$$

Věta Bernsteinova a z ní odvozené dvě věty Rieszovy striktnějšího znění (Acta math. 40; 196 p. 337) nám umožňují odhadnouti horní mez první derivace polynomu ve zcela libovolném bodu roviny z; a sice jest pro z ležící mimo úsečku $-1 \ldots +1$ (za našich podmínek)

pro liché n $\quad |f'(\zeta)| < (n+1)\, M\, (A+B)^n,$

pro sudé n $\quad |f'(z)| < n\, M\, (A+B)^n,$

kdež A, B jsou poloosy elipsy jdoucí bodem z a mající ohniska v bodech $-1 \ldots +1$. Pro reálná z ležící mimo úsečku $-1 \ldots +1$ jest

$$|f'(z)| < (n+1)\, |\cos n \arccos z|\, M \qquad \text{pro liché } n,$$

$$|f'(z)| < n\, |\cos n \arccos z|\, M \qquad \text{pro sudé } n.$$

Bylo by možno vysloviti podobné věty i o polynomech dvou proměnných i více: tak na př. pro polynom $f(x, y)$ dle x stupně

$2k$, dle y stupně $2l+1$ platí pro všechna x a y obsažená ve čtverci o vrcholech (1, 1), $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ $(1, -1)$ incl. obvod

$$\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \, \partial y}\right| < (2l+2) \, . \, 2k \, . \, M,$$

když v obdélníku určeném vrcholy $\left(1+\cos\frac{\pi}{4l+4}, 1+\cos\frac{\pi}{4k}\right)$, $\left(-1+\cos\frac{\pi}{4l+4}, 1+\cos\frac{\pi}{4k}\right)$, $\left(-1-\cos\frac{\pi}{4l+4}, -1-\cos\frac{\pi}{4k}\right)$, $\left(1+\cos\frac{\pi}{4l+4}, -1-\cos\frac{\pi}{4k}\right)$ incl. obvod platí

$$|f(x, y)| \leq M.$$

5. Proveďme nyní podobné úvahy v oboru polynomů trigonometrických. K výsledkům podobným z východisek jiných dospěli již jiní; chceme ukázat, že i tyto výsledky lze odvoditi z Lagrangeovy interpolační formule vhodně modifikované.

Budiž $f(z) \, . \, z^n$ polynom stupně $2n$, $F(z)$ jako dříve polynom stupně o 1 vyššího; pak jest

$$f(z) \, . \, z^n = \sum_{1}^{2n+1} f(z_k) \, z_k^n \frac{F(z)}{F'(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k}$$

čili

$$f(z) = \sum_{1}^{2n+1} f(z_k) \frac{F(z) : z^n}{F'(z_k) : z_k^n} \cdot \frac{1}{z - z_k}.$$

Položme $z = e^{i\varphi}$, pak $f(e^{i\varphi}) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi + A_{n-1} \cos \overline{n-1}\,\varphi + B_{n-1} \sin \overline{n-1}\,\varphi \ldots + A_0 \equiv f^{\cdot}(\varphi)$, $F'(z) = F'(e^{i\varphi}) : i e^{i\varphi}$; zde a v dalším bude nám $F'(e^{i\varphi})$ značiti derivaci $F(e^{i\varphi})$ dle $e^{i\varphi}$. Jest potom

$$f^{\cdot}(\varphi) = \sum_{1}^{2n+1} f^{\cdot}(\varphi_k) \frac{F(e^{i\varphi}) : e^{ni\varphi}}{F'(e^{i\varphi_k}) : e^{ni\varphi_k}} \cdot \frac{i e^{i\varphi_k}}{e^{i\varphi} - e^{i\varphi_k}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1}^{2n+1} f^{\cdot}(\varphi_k) \frac{F(e^{i\varphi}) : e^{ni\varphi}}{F'(e^{i\varphi_k}) : e^{ni\varphi_k}} \left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \varphi_k}{2} - i\right).$$

Položme

$$F(e^{i\varphi}) \equiv e^{(2n+1)i\varphi} + 1, \; \varphi_k = \frac{2k+1}{2n+1}\pi, \; k = 1, 2, \ldots (2n+1)$$

$$F'(e^{i\varphi_k}) : e^{ni\varphi_k}) = (2n+1) e^{ni\varphi_k} = (2n+1) e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_k} : e^{\frac{i\varphi_k}{2}} =$$

$$= (-1)^{k+1} (2n+1) : e^{\frac{i\varphi_k}{2}},$$

takže

$$f^{\cdot}(\varphi)=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1}f^{\cdot}(\varphi_k)\,(-1)^{k+1}\frac{1}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}}$$

a obdobně

$$f^{\cdot}(\varphi+\psi)=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1}(-1)^{k+1}f^{\cdot}(\varphi_k+\psi)\,.\,\frac{1}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}}.$$

Derivujme dle φ a položme $\varphi=0$, pak jest

$$f^{\cdot\prime}(\psi)=\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{1}^{2n+1}(-1)^k f^{\cdot}(\psi+\varphi_k)\frac{\cos\frac{\varphi_k}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_k}{2}}.$$

Je-li $|f^{\cdot}(\varphi_k+\psi)|\leqq M$, pro $k=1,2,\ldots 2n+1$, jest

$$|f^{\cdot\prime}(\psi)|<\frac{M}{2(2n+1)}\sum_{1}^{2n+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi_k}{2}}.$$

Poslední součet stanovíme takto: Do rovnice

$$\frac{d\,(l\,F\,e^{i\varphi})}{d\varphi}=\sum_{1}^{2n+1}\frac{i\,e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{i\varphi_k}}$$

dosaďme $F(e^{i\varphi})\equiv e^{(2n+1)\,i\varphi}+1$ a jest na straně levé

$$\frac{d\,l\,(e^{(2n+1)\,i\varphi}+1)}{d\varphi}=\frac{d\,l\,[1+\cos(2n+1)\,\varphi+i\sin(2n+1)\,\varphi]}{d\varphi}=$$

$$=-(2n+1)\frac{\sin(2n+1)\,\varphi-i\cos(2n+1)\,\varphi}{1+\cos(2n+1)\,\varphi+i\sin(2n+1)\,\varphi}=$$

$$=-\frac{2n+1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{2n+1}{2}\,\varphi-i\right);$$

pravou stranu lze psáti $\sum_{1}^{2n+1}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_k}{2}-i\right)$.

Derivujeme-li rovnici vzniklou porovnáním reálných částí dle φ a položíme-li $\varphi=0$, jest

$$-\frac{(2n+1)^2}{4}=-\frac{1}{4}\sum_{1}^{2n+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi_K}{2}},$$

takže
$$|f'(\psi)|<\frac{M}{2(2n+1)}\cdot(2n+1)^2=\left(n+\frac{1}{2}\right)M.$$

Vztah tento dává lepší výsledky než původní vzorec Bernsteinův (Sur l'ordre de la meilleure approximation.. Mém. publ. par la Classe des Sc de l'Acad. de Belg. t. 4. 1912, p. 19/20), jenž dává
$$|f'(\psi)|<2nM,$$
resp.
$$|f'(\psi)|\leqq nM$$
pro polynomy obsahující jen kosinusy resp. sinusy.

Ještě lepší výsledky než úvaha právě provedená podávají úvahy Fekete-ovy (Crelle 1916, 146, pag. 88), opřené o studium koeficientů Fourierrových řad a Rieszovy (Jahresb. d. d. M. Ver. 1914, XXIII. p. 354), vycházející ze zvláštní interpolační trigonometrické formule, o níž chceme ukázati, že i ta se dá odvoditi z Lagrangeova vzorce.

6. Pišme opět
$$f(z)\,.\,z^n=a_{2n}z^{2n}+\ldots+a_0$$
a budiž $F(z)$ polynom stupně $2n$; pak jest
$$(f(z)-a_{2n}z^n)\,.\,z^n-\sum_{1}^{2n}(f(z_k)-a_{2n}z_k^n)\,z_k^n\,\frac{F(z)}{F'(z_k)}\cdot\frac{1}{z-z_k}.$$
a odsud týmiž obraty jako v odst. 3 máme
$$f(z)=\sum_{1}^{2n}f(z_k)\frac{F(z):z^n}{F(z_k):z_k^n}\cdot\frac{1}{z-z_k}+a_{2n}F(z):z^n.$$
Dosaďme $z=e^{i\varphi}$ a máme po snadné úpravě
$$f(\varphi)=(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+\ldots+A_0=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{2n}f(\varphi_k)\frac{F(\varphi):e^{ni\varphi}}{F'(\varphi_k):e^{ni\varphi_k}}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_k}{2}-i\right)+a_{2n}F(\varphi):e^{ni\varphi}.$$
Volme $F(\varphi)\equiv e^{2ni\varphi}+1$, pak jest
$$f(\varphi)=2a_n\cos n\varphi+\frac{\cos n\varphi}{2n}\sum_{1}^{2n}(-1)^k f(\varphi_k)\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_k}{2}-i\right)4)$$

a obdobně

$$f^{\cdot}(\varphi+\psi)=2a_n\cos n\varphi+$$

$$+\frac{\cos n\varphi}{2n}\sum_1^{2n}(-1)^k f^{\cdot}(\psi+\varphi_k)\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_k}{2}-i\right). \qquad 4^*)$$

Poněvadž $A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi=a_n e^{ni\varphi}+a_0 e^{-ni\varphi}$, jest

$$2a_n=A_n-iB_n.$$

Budiž nyní $\bar{f}^{\cdot}(\varphi)$ trigonometrický polynom mající koeficienty komplexně sdružené k $f^{\cdot}(\varphi)$; pak jest

$$(f^{\cdot}(\varphi)+\bar{f}^{\cdot}(\varphi))=[A_n+\bar{A}_n-i(B_n+\bar{B}_n)]\cos n\varphi+$$

$$+\frac{\cos n\varphi}{2n}\sum_1^{2n}(-1)^k(f^{\cdot}(\varphi_k)+\bar{f}^{\cdot}(\varphi_k))\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_k}{2}-i\right),$$

odkudž porovnáním reálných a imaginárných částí vyplývá

$$\frac{1}{2n}\sum_1^{2n}(-1)^k[f^{\cdot}(\varphi_k)+\bar{f}^{\cdot}(\varphi_k)]=-(B_n+\bar{B}_n),$$

$$f^{\cdot}(\varphi)+\bar{f}^{\cdot}(\varphi)=(A_n+\bar{A}_n)\cos n\varphi+$$

$$+\frac{\cos n\varphi}{2n}\sum_1^{2n}(-1)^k[f^{\cdot}(\varphi_k)+\bar{f}^{\cdot}(\varphi_k)]\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_k}{2}.$$

To jest Rieszova interpolační formule pro polynomy o reálných koeficientech; nyní Riesz napíše formuli pro $f^{\cdot}(\varphi+\psi)$, derivuje dle φ, položí $\varphi=0$ a obdrží pro polynomy s reálnými koeficienty známými již obraty

$$|f^{\cdot\prime}(\psi)|\leqq nM,$$

když $|f^{\cdot}(x)|\leqq M$. Že tatáž věta platí i pro polynomy trigonometrické s komplexními koeficienty, dokážeme vycházejíce ze vzorce 4* a užívajíce úplně téhož postupu jako dříve.

7. Větu Bernsteinovu lze rozšířiti i na polynomy trigonometrické tvaru

$$(a_n\cos\alpha_n\varphi+b_n\sin\beta\varphi)+\ldots$$

kdež α_n, β_n jsou čísla lomená a α_n největší z nich.

Je-li pro všechna φ

$$|f^{\cdot}(\varphi)|\leqq M,$$

pak jest i pro každé reálné N

$$|f^{\cdot}(N\varphi)|\leqq M.$$

Volme nyní za N nejmenší společný násobek jmenovatelů zlomků α_n, β_n, α_{n-1}, β_{n-1} ... a položme $\varphi = N\tau$;

i jest $\quad f'(N\tau) = (a_n \cos N\alpha_n \tau + b_n \sin N\beta_n \tau) + \ldots,$

$$Nf'(N\tau) = -Na_n \alpha_n \sin N\alpha_n \tau + Nb_n \beta_n \cos N\beta_n \tau + \ldots,$$

takže
$$|Nf'(N\tau)| \leqq N\alpha_n M$$

a posléze
$$|f'(\varphi)| \leqq \alpha_n M.$$

8. Dosaďme ještě ve vzorci na počátku 6. odstavce $z = e^{\varphi}$; pak

$$f(e^{\varphi}) = (A_n \operatorname{Cos} n\varphi + B_n \operatorname{Sin} n\varphi) + \ldots + A_0$$

$$= \sum_1^{2n} \frac{F(\varphi) : e^{n\varphi}}{F'(\varphi_k) : n^{n\varphi_k}} \cdot \frac{e^{\varphi_k}}{e^{\varphi} - e^{\varphi_k}} + a_{2n} F(\varphi) : e^{n\varphi};$$

jest tedy $f(e^{\varphi})$ polynom postupujících dle hyperbolických kosinusů a sinusů, $F(\varphi)$ jest polynom stupně $2n$ v e^{φ}. Poněkud obtížné jest určení vhodného polynomu $F(\varphi)$, musí totiž — jak z předešlého patrno — býti

$$\frac{d(F(\varphi) : e^{n\varphi})}{d\varphi} = 0 \quad \text{pro } \varphi = 0.$$

Podmínce této hoví polynom

$$\cos 4n \arccos a e^{\frac{\varphi}{2}}$$

při vhodně voleném a; pak jest

$$a e^{\frac{\varphi_k}{2}} = \cos \frac{2k-1}{8n}\pi, \quad k = 1, 2, \ldots 2n$$

$$e^{\varphi_k} = \frac{\cos^2 \frac{2k-1}{8n}\pi}{a^2},$$

$$\frac{d(F(e^{\varphi}) : e^{n\varphi})}{d\varphi} = \frac{2ane^{\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{1-a^2e^{\varphi}}} \sin(\varphi n \arccos ae^{\frac{\varphi}{2}}) -$$
$$- n(\cos 4n \arccos a e^{\frac{\varphi}{2}});$$

nutno tedy řešiti rovnici

$$\frac{2an}{\sqrt{1-a^2}} \sin 4n \arccos a - n \cos 4n \arccos a = 0,$$

která substitucí $a = \cos \alpha$ přejde v rovnici

$$\Phi(\alpha) \equiv 2 \operatorname{ctg} \alpha \sin 4n\alpha - \cos 4n\alpha = 0.$$

Poněvadž $\quad \Phi\left(\frac{\pi}{4n}\right) = 1, \quad \Phi\left(\frac{\pi}{4n-1}\right) = -\cos\frac{\pi}{4n-1},$

jest kořen této rovnice (a sice nejmenší) obsažen mezi

$$\frac{\pi}{4n} \quad \text{a} \quad \frac{\pi}{4n-1}.$$

Na př. když $n = 4$, jest $\alpha = 11^\circ 37'$, $\quad \Phi(\alpha) = +0{\cdot}00033$,
když $n = 5$, jest $\alpha = 9^\circ 13' 56''$, $\Phi(\alpha) = +0{\cdot}00039$.

Ještě nutno určiti $F'(\varphi_k)$; jest

$$F'(\varphi_k) = \frac{2ane^{\frac{\varphi_k}{2}}}{\sqrt{1-a^2e^{\varphi_k}}} \cdot \sin 4n \arccos a e^{\frac{\varphi_k}{2}} =$$

$$= 2n \cdot \frac{\cos\frac{2k-1}{8n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{8n}\pi} \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi = 2n \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{8n}\pi \cdot (-1)^{k+1}.$$

Derivujme rovnici

$$f\cdot(\varphi+\psi) = \sum_1^{2n} f\cdot(\psi+\varphi_k)\frac{F(\varphi):e^{n\varphi}}{F'(\varphi_k):e^{n\varphi_k}} \cdot \frac{e^{\varphi_k}}{e^{\varphi}-e^{\varphi_k}} + a_{2n}F(\varphi):e^{n\varphi}$$

dle φ a položme pak $\varphi = 0$; pak jest

$$f'(\psi) = \frac{F(0)}{4}\sum_1^{2n} f(\psi+\varphi_k)\frac{1}{F'(\varphi_k):e^{n\varphi_k}} \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{\operatorname{Sin}^2\frac{\varphi_k}{2}} =$$

$$= \frac{\cos 4n\alpha}{8n}\sum_1^{2n}(-1)^k f(\psi+\varphi_k)\, e^{n\varphi_k} \operatorname{tg}\frac{2k-1}{8n}\pi \cdot \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\frac{\varphi_k}{2}}.$$

Určíme především $\sum_1^{2n}\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi_k}{2}}$ a to tak, že v derivaci logaritmické derivace $\cos 4n \arccos a e^{\frac{\varphi}{2}}$ položíme $\varphi = 0$, $a = \cos \alpha$;

i jest

$$\frac{1}{4}\sum_{1}^{2n}\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi_k}{2}}=\frac{4n^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos^2 4n\alpha}-\frac{n\operatorname{tg} n\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Vyšetřme dále horní mez výrazů

$$e^{n\varphi_k}\operatorname{tg}\varphi_k\equiv\frac{\cos^{2n}\frac{2k-1}{8n}\pi}{\cos^{2n}\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{2k-1}{8n}\pi,\quad k=1,2,\dots 2n;$$

ta bude rovna nebo menší než maximum funkce $\frac{\cos^{2n}\varphi\operatorname{tg}\varphi}{\cos^{2n}\alpha}$ v intervalu $\frac{\pi}{8n}\dots\frac{4n-1}{8n}\pi$.

První derivace této funkce jest $\cos 2n-2\varphi\,(1-2\sin^2\varphi)$; extrém v daném intervalu jest pro $\sin\varphi=\sqrt{\frac{1}{2n}}$; jest to maximum, poněvadž o druhé derivaci platí $-4n\sin\varphi\cos^{2n-1}\varphi<0$.

Je tedy $e^{n\varphi_k}\operatorname{tg}\varphi_k$ vesměs menší než

$$\frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}{\cos^{2n}\alpha}.$$

Je-li tedy $|f(\psi+\varphi_k)|\leq M$ pro $k=1,2,\dots 2n$, jest

$$|f'(\psi)|<\frac{|\cos 4n\alpha|}{2n}\,\frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}{\sqrt{2n-1}}\cdot\frac{1}{\cos^{2n}\alpha}\left(\frac{4n^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos^2 4n\alpha}-\frac{n\operatorname{tg} n\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right)M.$$

Výraz v oblé závorce vzhledem k rovnici $\Phi(\alpha)=0$ lze nahraditi výrazem

$$\frac{n^2}{\sin^2 4n\alpha}-\frac{n\operatorname{tg} n\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha}=\frac{n^2}{\sin^2 4n\alpha}-\frac{n}{2\sin^2\alpha},$$

takže

$$|f'(\psi)|\leq\frac{|\cos 4n\alpha|}{2}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}{\sqrt{2n-1}}\cdot\frac{1}{\cos^{2n}\alpha}\left(\frac{n}{\sin^2 4n\alpha}-\frac{1}{2\sin^2\alpha}\right)M.$$

Je-li n dosti velké, jest

$$\sqrt{2n-1} \sim \sqrt{2n},$$

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$\alpha \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{4n-1}\right) \sim \frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{32n^2},$$

$$\cos 4n\alpha \sim -1,$$

$$\sin 4n\alpha \sim -\frac{\pi}{8n},$$

$$\sin\alpha \sim \frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{32n^2},$$

$$\cos^{2n}\alpha \sim 1,$$

$$\Phi(\alpha) \sim \frac{1}{8n},$$

takže pro velká n jest:

$$|f'(\psi)| < q_n M,$$

kdež $q_n \sim \dfrac{32}{\pi^2\sqrt{2e}}\, n^{\frac{5}{2}} = 1{\cdot}3905 \ldots n^{\frac{5}{2}}$.

Když $n = 4$, podává tento vzorec $q_n = 45$, přímý výpočet 51, když $n = 5$, dává tento vzorec $q_n = 78$, přímý výpočet 83. — Bylo by as možno vhodnou volbou polynomu $F(\varphi)$ mocnitel při n i koeficient q_n snížiti.

9. Budiž $f(\varphi)$ funkce všude spojitá s periodou 2π; vyšetřme limitu

$$\lim \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1}(-1)^{k+1} f(\varphi_k)\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}},$$

$$\varphi_k = \frac{2k+1}{2n+1}\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots 2n+1, \qquad \lim n = \infty.$$

Především jest

$$\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi-\varphi_k}{2}\right)} = (-1)^{k+1}\,\frac{\sin\frac{2k+1}{2}(\varphi-\varphi_k)}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}} =$$

$$= \cos n(\varphi-\varphi_k)+\cos(n-1)(\varphi-\varphi_k)+\ldots+\cos(\varphi-\varphi_k)+1 =$$
$$= \cos n\varphi\cos n\varphi_k+\sin n\varphi\sin n\varphi_k+\cos(n-1)\varphi\cos(n-1)\varphi_k+$$
$$+\sin(n-1)\varphi\sin(n-1)\varphi_k+\ldots\ \cos\varphi\cos\varphi_1+\sin\varphi_1+1,$$

taktéž výraz

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}} \cdot (-1)^{k+1} \cdot f(\varphi_k)$$

lze nahraditi trigonometrickým polynomem

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Avšak konvergence interpolace prováděné pomocí trigonometrických polynomů v případě aequidistantního dělení (jen velmi málo různého od našeho) byla vyšetřena Faberem (Mathem. Annalen 1910, LXIX, pag. 417 a n.); výsledky jím odvozené platí i zde: stačí jen dokázati, že výraz

$$g_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{1}^{2n+1} \left| \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\varphi-\varphi_k)}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}} \right|$$

s rostoucím n pro hodnotu φ ležící mezi φ_1 a φ_2 nevzrůstá rychleji než $\log n$.

I jest

$$g_n \leqq \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sin\frac{|(\varphi-\varphi_1)|}{2}} + \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\sin\frac{|\varphi-\varphi_2|}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2n+1} \sum_{3}^{2n+1} \frac{1}{\sin\frac{|\varphi-\varphi_k|}{2}}$$

$$\leqq \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2}{|\varphi-\varphi_1|} + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2}{|\varphi-\varphi_2|} + \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{3}^{2n+1} \frac{1}{|\varphi-\varphi_k|};$$

avšak

$$|\varphi-\varphi_1| \leqq |\varphi_2-\varphi_1| = \frac{2\pi}{2n+1}$$

$$|\varphi-\varphi_2| \leqq |\varphi_2-\varphi_1| = \frac{2\pi}{2n+1}$$

$$|\varphi-\varphi_k| \leqq |\varphi_2-\varphi_k| = \frac{2k+1}{2n+1}\pi - \frac{5\pi}{2n+1}, \; k=3,4,\ldots 2n+1,$$

takže

$$g_n \leqq \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2}{\frac{2\pi}{2n+1}}\cdot 2 + \frac{2}{2n+1}\sum_{3}^{2n+1}\frac{1}{\left(\frac{2k+1}{2n+1}-\frac{5}{2n+1}\right)\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} + 2\sum_{3}^{2n+1}\frac{\pi}{2k+4} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{2n+1}\frac{1}{k},$$

odkudž patrno, že g_n nevzrůstá s rostoucím n rychleji než $\log n$.

I lze říci (Faber l. c. 422): „Aby

$$\lim \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1}(-1)^{k+1} f(\varphi_k)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}} = f(\varphi) \ldots 5)$$

postačí, aby všude spojitá funkce $f(\varphi)$ v periodě 2π byla schopna Fourierrova rozvoje ve smyslu podmínek Lipschitz-Diniových."

I důkaz, jejž uvádí Faber l. c. 423 a 424, lze snadno modifikovati pro naše aequidistantní dělení a pak jiná postačující podmínka pro existenci limity .. 5) zní: „Limita .. 5) existuje, když všude spojitá funkce o periodě 2π definuje křivku $y=f(\varphi)$ v intervalu $0\ldots 2\pi$ ve smyslu Jordanově rektifikace schopnou."

*

Sur quelques conséquences de la formule d'interpolation de Lagrange.

(Extrait de l'article précédent.)

Soit $f(z)$ un polynome de l'ordre n, $F(z)$ un polynome de l'ordre $n+1$ et dont les zéros sont différents. Si l'on choisit, dans la formule d'interpolation de Lagrange, ce polynome d'une manière convenable, il est facile de démontrer:

1) si n est impair et $|f(\zeta)| \leqq M$ dans l'intervalle

$$a - \frac{|a+b|}{2} - \frac{|a-b|}{2}\cos\frac{\pi}{2n+2} \leqq \zeta \leqq b +$$

$$+ \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2}\cos\frac{\pi}{2n+2},$$

on a, dans l'intervalle $a \leqq \zeta \leqq b$,

$$\left| f\left(\zeta + \frac{a+b}{2}\right) \right| < (n+1)\frac{4M}{(a-b)^2};$$

2) si n est pair et $|f(\zeta)| \leqq M$ dans l'intervalle

$$a - \frac{|a+b|}{2} - \frac{|a-b|}{2}\cos\frac{\pi}{2n} \leqq \zeta \leqq b +$$

$$+ \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2}\cos\frac{\pi}{2n},$$

on a, dans les mêmes conditions,

$$\left| f'\left(\zeta + \frac{a+b}{2}\right) \right| < n \cdot \frac{4M}{(a-b)^2}.$$

3) On peut démontrer, de plus, un théorème analogue à un théorème de V. Markov (Math. Ann. 77., p. 258).

4) On peut passer, par un simple procédé, à l'étude des polynomes trigonométriques et faire voir que même la formule d'interpolation de Riesz (Jahresbericht der deutsch. Math. Ver. XXIII, p. 354) se rattache à la formule de Lagrange; démontrer, de même, le théorème de Bernstein — sur la valeur absolue de la dérivée d'un polynome trigonométrique — aussi pour le cas où les coëfficients sont complexes.

5) Étant donné un polynome de fonctions hyperboliques

$$f(\varphi) = a_n \operatorname{Cos} n\varphi + b_n \operatorname{Sin} \varphi + \cdots + a_0,$$

on a, dans certaines conditions,

$$|f'(\varphi)| < 1{\cdot}3905\ldots n^{\frac{5}{2}}.$$

6) Enfin, l'auteur réduit la recherche de la validité de

$$\lim \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1}(-1)^{k+1} f(\varphi_k)\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}},$$

$$\varphi_k = \frac{2k+1}{2n+1}\pi,\quad k = 1, 2, \ldots, 2n+1,\quad n \backsim \infty$$

aux cas étudiés par Faber (Math. Ann. 49., p. 417).
