

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jaroslav Pantoflíček

Nový přístroj nivellační

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 1, 63--68

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123134>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1925

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Nový přístroj nivellační.

Dr. Jar. Pantoflíček.

Kpyž evropská asociace geodetická po rozsáhlých nivellacích Bourdalouého v Egyptě a Francii přijala r. 1864 resoluci, aby analogicky provedla se nivellace ve všech státech evropských, nevědělo se, k jakému rozvoji a k jakému stupni přesnosti dojde se v nejbližší době. Roku 1867 na druhé generální konferenci geodetické asociace usneseno, že pod pojmem přesné nivellace (nivellements de précision) rozumí se „nivellace, u nichž pravděpodobná chyba rozdílu horizontů dvou bodů vzdálených od sebe 1 km nepřesahuje v celé síti 3 mm a nikde 5 mm“, čili, že je menší také, než na př. 30 mm na 100 km, neboť chyby nahodilé tratě nivellační přibývá s druhou odmocninou délky.

V závodech za nejbližším desetinným místem zdokonaleny brzo stroje i metody, zavedeny do výpočtů nutné opravy orthometrické, takže nyní pravděpodobná chyba 3—5 mm na 1 km, čili průměrná chyba 4,5—7,5 mm na 1 km, není překročena ani u běžných, generelních nivellací technických.

Roku 1895 podrobil *M. Ch. Lallemand* analýze a srovnávací studii nivellace na hlavních tratích evropských.*) Chyby dají se počítati buď z odchylek tratí dvojnásobně měřených anebo z odchylek při uzavření nivellační sítě. Dle povahy chyby nahodilé měly by výsledky výpočtu býti stejné, ať užije se kterékoliv metody početní. Avšak oba výpočty daly různé výsledky; v měření není jen chyba nahodilá, ale i systematická.

Systematické chyby nivellační sítě jsou velmi malé a bezvýznamé u tratí krátkých, avšak velkého významu u sítí rozsáhlých. V přesné nivellaci chyba systematická může dosáhnouti až $\pm 0,3$ mm na 1 km. Protože chyby nahodilé přibývá s druhou odmocninou délky a chyby systematické přímo s měřenou délkou, může, zvláště u dlouhých tratí, systematická chyba celková býti větší, než celková chyba nahodilá. Proto také zdají se nivellační sítě velkých polygonů, tedy sítě jen řídce na území položené, méně přesné, než nivellační sítě husté, krátkých tratí mezi uzlovými body.

Po novém rozboru problému přijala mezinárodní asociace geodetická roku 1912**) návrh resoluce, vypracované opět *M. Ch. Lallemandem*, dle níž utvořena nová kategorie nivellací, přesnější než t. zv. „přesná nivellace“ (nivellements de précision), s užší tolerencí chyb, nazvaná „velmi přesná nivellace“ (nivellements

*) Comptes Rendus de l'Association géodésique Internationale. Conférence de Berlin 1895.

**) Comptes Rendus de la 17. Conférence générale de l'Association géodésique internationale à Hambourg 1912.

de haute précision), jež je charakterisována tím, že 1. každá trať je dvakrát měřena, 2. pokaždé jiným směrem, 3. pokud možno v jiných dnech a 4. v níž chyby nahodilé a systematické počítané z formulí mezinárodně přijatých, jsou menší než $\pm 1 \text{ mm}$ na 1 km u pravděpodobné chyby nahodilé, $\pm 1,5 \text{ mm}$ na 1 km u průměrné chyby nahodilé, $\pm 0,2 \text{ mm}$ na 1 km u pravděpodobné chyby systematické a $\pm 0,3 \text{ mm}$ na 1 km u průměrné chyby systematické.

Vyhověti podmínkám velmi přesné nivellace novými měřicími stroji není nesnadno. Když mi bylo r. 1919 svěřeno řízení měřičských prací pro plán Velké Prahy s okolím, měli jsme společně s p. kapit. L. Benešem z voj. zeměp. ústavu příležitost, provésti prvou přesnou nivellaci v Čs. republice ve větším rozsahu na ploše as 40.000 ha .*) Ač vojenský zeměpisný ústav neměl vyvíčeného personálu, ač denní výkon nebyl malý — jedna sekce změřila průměrně za den as 3 km — přece pravděpodobná chyba nahodilá byla jen $\pm 0,59 \text{ mm}$ místo přípustných $\pm 1,0 \text{ mm}$ na 1 km a pravděpodobná chyba systematická jen $\pm 0,15 \text{ mm}$ místo dovolených $\pm 0,2 \text{ mm}$ na 1 km . Stejnou as přesnost vykazují nivellace provedené v letech 1920 a 1921 vojenským zeměpisným ústavem a ministerstvem veřejných prací v Čechách, na Moravě a na Slovensku.**)

Příčiny chyby systematické dosud dobře neznáme. Nevíme vlastně o ní nic víc, než že existuje a jak je velká. A přece bylo by záhodno, aby se blíže prozkoumaly všechny zjevy, které mohou mít na ni vliv, neboť chyba systematická dotýká se velmi rozsáhlé práce mezinárodního měření země. Dle poslední uveřejněné statistiky mezinárodní bylo v 26 státech sdružených v geodetické asociaci do 1. ledna 1912 zaměřeno 241.090 pevných bodů nivellačních, rozložených po celé zeměkouli na tratích délky 323.539 km , tedy na trati delší 8-násobného obvodu zeměkoule.

Příčiny systematické chyby jsou buď ve stroji nebo v pozorovateli anebo mimo stroj, jako na př. v ovzduší. Oceniti theoreticky ve vzorci všechny poměry tak, jak při měření v poli se vyskytují, je velmi nesnadné. Vzorce byly by stejně složité, jak nepotřebné. Tak na př. vliv anomálií refrakčních na přesnost výsledků vede i za velmi jednoduchých předpokladů ke komplikovaným vzorcům. Aby mohl posouditi vliv refrakce na přesnost výsledků jedné přestavy, předpokládá M. Ch. Lallemand, že měřená trať je v terrainu jednotného spádu a že vrstvy vzduchu stejné teploty jsou rovnoběžné s půdou.***) Po zjednodušení dospívá pro chybu ϵ_1 v jednom zaměření ke vzorci

$$\epsilon_1 = \frac{0 \cdot 108 \cdot 10^{-5} \cdot \mu b B}{p^2 \cdot 0 \cdot 76 (1 + \alpha \theta)^2} \int_{p_1}^H \frac{h - h_1}{h + c} dh,$$

*) L. Beneš: Přesná nivellace území Velké Prahy s okolím 1922.

**) Union géodésique et géophysique internationale. I. Assemblée générale à Rome 1922. Rapport de la Commission géodésique tchécoslovaque.

***) Ch. Lallemand: Nivellement de haute précision. Béranger 1912.

kde h je výška visury nad půdou, p jednotný spád terrainu, $\mu = \log e$ logaritmický modul, B barometrický tlak, Θ průměrná teplota vzduchu, α koeficient roztaživosti vzduchu, b a c druhý a třetí koeficient refrakční, H výška dalekohledu nad terrainem a h_1 čtení na lati. Je-li rozdíl mezi čtením na lati při zaměření v zad a v před D , odvodí se z právě uvedeného vzorce konečná oprava jedné přestavy vyjádřená v mm

$$\varepsilon = -\frac{0.00108}{p^2} \cdot \frac{\mu b B}{0.76 (1 + \alpha \Theta)^2} \left\{ D - (h_3 + c) \log_n \frac{h_3 + c}{H + c} + (h_1 + c) \log_n \frac{h_1 + c}{H + c} \right\}.$$

Vzorec je složitý i pro jednoduchý, idealisovaný případ a je vyloučeno, že by se ho mohlo použít při praktické nivellaci pro redukci každé přestavy, jež jsou délky jen as 100—150 m . Také Lallemant jej odvodil jen proto, aby mohl podrobněji posoudit vliv všech složek na anomálie refrakční. Vloží-li se do vzorce čísla pro nepřilíš extrémní případ, obdrží se chyba způsobená refrakcí, i když délka visury v před a zpět je přesně stejná, až i 4 mm na 1 km , kdežto chyby nahodilé jsou menší než $\pm 1 mm$ na 1 km . Někdy je při nivellaci třeba překročit velké toky vodní, šířky větší než 1 km , jako se to stalo v poslední době na př. v Holandsku a Americe a tu mohou refrakční anomálie mít na přesnost výsledku velký vliv.

Poměry refrakční v terrainu jsou tak složité, že nedají se formulí vystihnouti. Terrain nemá stejnoměrný spád, půda není stejně vlhká a teplota vzduchu je tak úzce spjata s teplotou půdy, že se stále mění, chvílemi se zvětšujíc vlivem paprsků slunečních a opět chvílemi zmenšujíc vlivem záření. Je-li půda za poledne teplejší vzduchu, nastává proudění vzduchu a tím vlnění obrazu v dalekohledu, tedy nesnadné čtení při celkem malé chybě refrakční. Je-li naopak po chladné noci anebo k večeru a na chladných lukách půda studenější než vzduch, nastává zvrstvení vzduchu, v dalekohledu je obraz latě klidný, avšak ve čtení může být velká chyba refrakční.

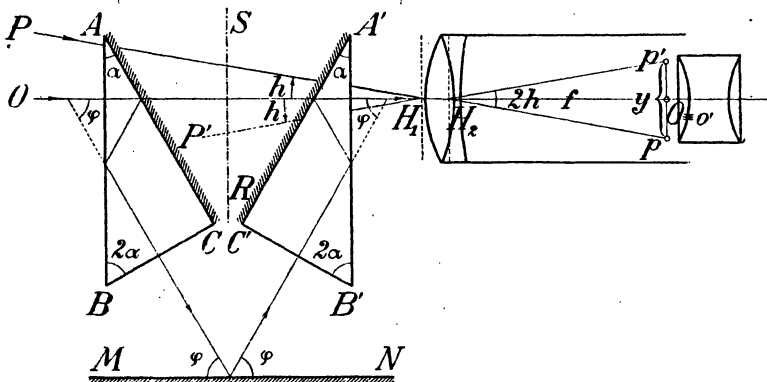
Abych mohl blíže sledovati vliv všech zjevů nalézajících se mimo pozorovatele a stroj, hlavně však vliv anomálií refrakčních na nivellační chybu,*) sestrojil jsem speciální hranolový přístroj nivellační, pro jehož konstrukci položil jsem tyto podmínky: 1. přístroj musí být sestrojen tak, aby se nemusel horizontovati, aby tedy na přesnost měření neměly žádného vlivu deformace způsobené teplotou nebo lokálním pohybem půdy, 2. přístroj musí být bez systematické chyby strojové a konečně 3. musí být přístroj i bez osobní chyby, tedy bez nitkového kříže a musí připustiti možnost fotografické registrace anomálií refrakčních.

*) Anomálie refrakční studovali: Laplace, Babinet, Loewy, Oppolzer Bessel, Jordan, Goulier, Durand-Claye, Nuši, Frič atd.

Poněvadž se přístroje nepoužije k běžné nivellaci, nekladl jsem žádnou váhu na snadnost přenášení z místa na místo.

Přístroj, jehož princip je znázorněn na obrázku, skládá se ze dvou identických skleněných hranolů, rtuového horizontu a dalekohledu nebo fotografického přístroje.

Předpokládáme prozatím konstrukci zcela přesně provedenou; chyby způsobené nepřesným provedením součástí vyšetřím později. Skleněný hranol ABC má v jednom vrcholu A úhel α a v druhém



vrcholu B úhel dvojnásobný 2α . Světelný paprsek, dopadající na hranu AB , lomí se, odrazí od amalgamované plochy AC , na ploše AB nastane totální reflexe a po novém lomu plochou BC vychází paprsek z hranolu tak, že svírá se svým původním směrem úhel $\varphi = 2\alpha$. Nezáleží na tom, pod jakým úhlem dopadne paprsek na první lomnou plochu; odchylení paprsku hranolem děje se pod konstantním úhlem φ . Předpokládáme, že na první hranol dopadl z bodu O paprsek rovnoběžný s umělým horizontem MN , tedy paprsek vodorovný. Po lomu a dvojném odrazu dopadne na rtuový horizont tak, že s ním svírá úhel $\varphi = 2\alpha$, odrazí se od něj a po lomu a dvojném odrazu v identickém hranolu $A'B'C'$ odchýlí se znovu o úhel $\varphi = 2\alpha$ a vychází tedy z druhého hranolu opět směrem vodorovným. Paprsky rovnoběžné s plochou MN lomem a odrazem v hranolech se od svého původního směru neodchýlí.

Dopadne-li na první hranol paprsek z bodu P pod úhlem výšky h , odchýlí se hranolem opět o úhel $\varphi = 2\alpha$, s rovinou rtuového horizontu svírá nyní úhel $\varphi + h$, odrazí se a druhým hranolem odchýlí opět o úhel φ , takže vchází do objektivu pod úhlem výšky $-h$, jakoby vycházel z bodu P' , ležícího s bodem P symetricky proti bodu O .

Hranoly jsou montovány tak, že zabírají polovinu činného otvoru objektivu. Do jedné, hranoly nezakryté poloviny objektivu, vnikají tedy paprsky z bodu O a P přímo a vytvoří buď na filmu nebo před okulárem obrazy o a p . Do druhé poloviny objektivu vchází paprsky odchylené hranoly a umělým horizontem a vytvoří

obrazy o' a p' . Je-li záměrná přímka na bod O vodorovná, sto-
tožní se oba obrazy $o \equiv o'$ tohoto bodu. Má-li visura na bod P
úhel výšky h , objeví se dva obrazy p a p' téhož bodu ve vzdá-
lenosti y . Je-li vzdálenost bodu P od stroje D , vzdálenost filmu od
druhého Gaussova bodu f a zaměříme-li na př. stereokompara-
torem na filmu na odchylku y , plyne vzdálenost bodu P od bodu O
ze vzorce $\frac{y}{2f} D$. Vyšetří se tedy anomalie refrakční velmi snadno

z průběhu dvou křivek kreslených na filmu obrazem téhož bodu P .

Poněvadž je plocha činného otvoru objektivu dělena hranoly
na dvě poloviny svíslou přímkou, je stroj bez chyby parallaktické
a poněvadž je přístroj bez nitkového kříže a libell, netřeba ho
urovnávat. Za předpokladu přesného provedení konstrukce je při-
stroj bez systematické chyby osobní i strojové.

Avšak i když předpokládáme dosti hrubé chyby v provedení
stroje, jeví se tyto ve výsledku jen velmi malou hodnotou. Aby
se daly hranoly při výrobě snadno kontrolovati, zvolil jsem $\alpha = 30^\circ$,
tedy $2\alpha = 60^\circ$ a u bodu C úhel pravý. Identita obou hranolů docílí
se velmi snadno, když vybrousí se oba hranoly z téhož kusu skla
najednou, tedy jen jeden hranol dvojnásobně široký. Po vyleštění
a kontrole ploch na rovinnost a hranolu na chybu jehlancovou
rozřízne se hranol na 2 poloviny. Je-li tedy v jednom hranolu
v jistém úhlu jakási chyba, je táž chyba v témže úhlu i u hranolu
druhého. Za materiál zvolil jsem velmi průhledný Schottův hrano-
lový Crown O 3832 indexu lomu $n = 1,5163$ a $\nu = 64,0$.

Vyšetřme nyní, jaký má vliv nepřesné vybroušení hranolů
a nepřesné jejich montování na přesnost výsledku.

U hranolů nebude zachována podmínka úhlů 30° , 60° a 90° .
Při běžné výrobě tovární a při obvyklém zkoušení úhlů dvěma
dalekohledy, budou se úhly lišiti od předepsaných as o $10''$ — $30''$.
Pro výpočet chyby můžeme předpokládati celou chybu jen v jednom
úhlu, na př. u vrcholu B , kde místo úhlu 2α bude vybroušen úhel
 $2\alpha + \Delta$. Po lomu a dvojnásobném odrazu paprsku ve hranolu ne-
bude nyní již odchylka φ konstantní, nýbrž bude funkcí úhlu dopadu
na první lomnou plochu. Předpokládejme dále, že přepony obou
hranolů nejsou spolu rovnoběžné, že se sbíhají směrem k bodu S ,
svírajíce spolu malý úhel σ . A konečně předpokládejme, že hranoly
proti svíslici nejsou v poloze symetrické, že osa symetrie soustavy
obou hranolů svírá se svíslicí SR úhel k . Vliv těchto tří chyb
 Δ , σ a k na odchýlení paprsku lze dle známého zákona lomu
snadno vyjádřiti. Rozvede-li se vzorec v řady, je po úpravě celková
chyba stroje vyjádřena ve vteřinách

$$m = \frac{n^2 - 1}{\rho^2} \Delta k \left(\Delta + \frac{\sigma}{n} \right),$$

kde $\rho = 206.265$.

Je-li $\Delta = 0$ anebo $k = 0$, čili jsou-li hranoly bez chyby anebo mají-li symetrickou polohu k svislici, je $m = 0$.

Chyba stroje je malá veličina třetího řádu a tak malé hodnoty, že je prakticky bez vlivu na přesnost výsledku. Předpokládejme $\Delta = 60''$, tedy hranoly zcela běžné výroby, $\sigma = 3600''$ čili hranoly montovány jsou jen zhruba přibližně $a \cdot k = 3600''$ čili urovnání hranolů děje se jen zcela hrubou libellou krabicovou, tedy předpokládejme chyby velmi extrémní, tu je $m = 0''015$, menší než chyby objektivu i při $f = 1000 \text{ mm}$. Podobně dá se vyšetřiti, že chyby, způsobené změnou polohy objektivu oproti hranolům následkem roztažení konstrukce teplem, mají na výsledek jen velmi malý vliv.

Přístroj vyzkoušel jsem prozatím v provisorní úpravě a dle pokusů soudím, že dá se dobře použiti pro pozdější studie chyby systematické.

Řešení stroje tak, jak jsem ho naznačil v obrazci, není jediné. Možno použiti též po jednom hranolu v každé polovině objektivu dalekohledu. Také dá se problém řešiti čtyřmi zrcadly. Snadno lze stroj modifikovati pro zaměření pod libovolným úhlem výšky.

*

Resumé.

Pour pouvoir poursuivre l'influence des différents facteurs — indépendants de l'instrument et de l'observateur — sur les erreurs des opérations de nivellement géométrique et surtout l'influence des anomalies de réfraction, l'auteur a construit pour le nivellement un appareil spécial prismatique.

L'appareil est composé de deux prismes identiques (l'angle $\alpha = 30^\circ$, $2\alpha = 60^\circ$) d'un horizon de mercure et d'un appareil photographique. Les prismes occupent une moitié de la surface de l'objectif; l'autre moitié est libre pour la réception des rayons d'un point. Les deux images du point O sont identiques, tandis que les images du point P de hauteur h se trouvent aux points p et p' à la distance y . La ligne dessinée par l'image du point P sur une pellicule photographique permet de suivre les variations de la réfraction.

L'identité complète des deux prismes est atteinte par la fabrication d'un seul prisme qui est découpé ensuite en deux parties.

Si l'angle du prisme au point B est égal $2\alpha + \Delta$ (au lieu 2α), l'angle entre AB et $A'B'$ égal σ , et si enfin l'angle de l'axe de symétrie de deux prismes avec la verticale est égal k , on trouve pour l'erreur systématique des prismes

$$m = \frac{n^2 - 1}{q^2} \Delta k \left(\Delta + \frac{\sigma}{n} \right).$$

Si $\Delta = 60''$, $k = 3600''$, $\sigma = 3600''$, $q = 206265$ on a $m = 0''015$.