Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Srb

(n + 4)-úhelník vepsaný racionální normální křivce n-rozměrného prostoru

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 3, 93--98,99

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123125`

($n + 4$)-úhelník vepsaný racionální normální křivce n-rozměrného prostoru.

Jan Srb, Jihlava.

(Došlo dne 11. června 1947.)

Pascalovu větu o šestiúhelníku vepsaném kuželosečce rozšířil pro racionální normální křivku čtyrrozměrného prostoru *G. Veronese*, pro racionální normální křivku n-rozměrného prostoru *F. Deruyts.*[1])

V tomto článku dokazuji jinou závislost mezi $n + 4$ body racionální normální křivky n-rozměrného prostoru a popisuji užití této závislosti při konstrukci dalších bodů a oskulačních prostorů křivky, dané $n + 3$ obecnými body.

Nazveme-li protějšími stranu, určenou dvěma po sobě následujícími vrcholy ($n + 4$)-úhelníku, vepsaného racionální normální křivce n-rozměrného prostoru, a nadrovinu, určenou n po sobě následujícími vrcholy tohoto ($n + 4$)-úhelníka, které obdržíme, když z vrcholů zbývajících po určení strany vynecháme vrchol prvý a poslední, platí věta:

(1) *V ($n + 4$)-úhelníku, vepsaném racionální normální křivce n-rozměrného prostoru, protínají každé tři po sobě následující strany své protější nadroviny ve třech bodech, které leží s $n - 2$ vrcholy, společnými těmto třem nadrovinám, v téže nadrovině. A obráceně. Mají-li prostory, určené $n + 4$ body n-rozměrného prostoru určitě uspořádanými a takovými, že žádných $n + 1$ z nich neleží v téže nadrovině, polohu popsanou v první části věty, mají tuto polohu při libovolném uspořádání bodů a $n + 4$ body tyto prostory určující leží na racionální normální křivce n-rozměrného prostoru, určené kterýmikoliv $n + 3$ z nich.*

D ů k a z prvé části. Na racionální normální křivce n-rozměrného prostoru C^n buď dáno $n + 4$ bodů $1, 2, \ldots, n + 3, n + 4$ v tomto, jinak libovolném pořádku určujících ($n + 4$)-úhelník křivce C^n ve-

[1]) Encyklopädie der mat. Wissenschaften, III, C, 7, C. Segre, Mehrdimensionale Räume, str. 896, pozn. 373.

psaný. Cyklickou záměnou pojmenování vrcholů můžeme vždy dosáhnout toho, že tři po sobě následující strany $(n + 4)$-úhelníku jsou $a_1 \equiv (1, 2)$, $a_2 \equiv (2, 3)$, $a_3 \equiv (3, 4)$. Potom jsou $S^1_{n-1} \equiv \equiv (4, 5, \ldots, n + 3)$, $S^2_{n-1} \equiv (5, 6, \ldots, n + 4)$, $S^3_{n-1} \equiv (6, \ldots, n + 4, 1)$ protější nadroviny těchto stran, mající společný $(n - 3)$-rozměrný prostor S_{n-3}, určený vrcholy $6, 7, \ldots, n + 3$. Protože žádných $n + 1$ bodů křivky C^n neleží v téže nadrovině, protínají strany a_i nadroviny S^i_{n-1} v bodech A_i, $(i = 1, 2, 3)$. Z S_{n-3}, který má tedy s C^n $n - 2$ společné body $6, 7, \ldots, n + 3$, promítněme do libovolné nezávislé roviny S_2 body $1, \ldots, 5, n + 4$ do bodů $1', \ldots, 5'$, $(n + 4)'$ a body A_i do bodů A'_i, $(i = 1, 2, 3)$. Racionální normální křivka C^n se promítá z S_{n-3} do roviny S_2 do kuželosečky C^2, na níž leží body $1', \ldots, 5', (n + 4)'$. Protože je $S^1_{n-1} \equiv (4, 5, \ldots, n + 3) \equiv (4, 5, S_{n-3})$, $S^2_{n-1} \equiv (5, 6, \ldots, n + 3, n + 4) \equiv (5, S_{n-3}, n + 4)$, a $S^3_{n-1} \equiv \equiv (6, \ldots, n + 3, n + 4, 1) \equiv (S_{n-3}, n + 4, 1)$, jsou body $A'_1 \equiv \equiv [(1', 2') \times (4', 5')]$, $A'_2 \equiv [(2', 3') \times (5', n + 4')]$ a $A'_3 \equiv [(3', 4') \,.\, (n + 4', 1')]$. Podle Pascalovy věty o šestiúhelníku vepsaném kuželosečce leží body A'_i $(i = 1, 2, 3)$ na přímce p roviny S_2. Přímka p a prostor S_{n-3} jsou nezávislé. Určují proto nadrovinu, ve které tedy leží $n + 1$ bodů $6, \ldots, n + 3, A_1, A_2, A_3$. Tím je prvá část věty (1) dokázána.

Důkaz části druhé. Buď dáno $n + 4$ bodů n-rozměrného prostoru, z nichž žádných $n + 1$ neleží v téže nadrovině, v uspořádání $1, 2, \ldots, n + 4$ takových, že prostory jimi určené mají vzájemnou polohu popsanou v prvé části věty (1). Tedy přímky $a_1 \equiv \equiv (1, 2)$, $a_2 \equiv (2, 3)$, $a_3 \equiv (3, 4)$ protínají protější nadroviny $S^1_{n-1} \equiv \equiv (4, 5, \ldots, n + 3)$, $S^2_{n-1} \equiv (5, 6, \ldots, n + 4)$, $S^3_{n-1} \equiv (6, \ldots, n + 4, 1)$ v bodech A_i $(i = 1, 2, 3)$, které s dalšími body $6, \ldots, n + 3$ leží v téže nadrovině S_{n-1}. Z $(n - 3)$-rozměrného průsečného prostoru nadrovin S^i_{n-1} $(i = 1, 2, 3)$, t. j. z prostoru $S_{n-3} \equiv (6, \ldots, n + 3)$, promítněme zbývající body $1, \ldots, 5; n + 4$ do nezávislé roviny S_2, do bodů $1', \ldots, 5', (n + 4)'$, body A_i do bodů A'_i $(i = 1, 2, 3)$. Nadroviny $S^1_{n-1} \equiv (4, 5, S_{n-3})$, $S^2_{n-1} \equiv (5, S_{n-3}, n + 4)$ a $S^3_{n-1} \equiv \equiv (S_{n-3}, n + 4, 1)$ protínají rovinu S_2 v přímkách $p_1 \equiv (4', 5')$, $p_2 \equiv (5', n + 4')$ a $p_3 \equiv (n + 4', 1')$, které se s přímkami $a'_1 \equiv \equiv (1', 2')$, $a'_2 \equiv (2', 3')$ a $a'_3 \equiv (3', 4')$ protínají v bodech A'_1, A'_2, A'_3, ležících podle předpokladu na přímce p roviny S_2, v níž nadrovina S_{n-1} rovinu S_2 protíná. Žádné tři z bodů $1', 2', \ldots, 5', (n + 4)'$ neleží na téže přímce roviny S_2. V opačném případě by tři dané body, které se do těchto bodů promítají, a $n - 2$ body, určující S_{n-3}, tedy celkem $n + 1$ z daných bodů $1, \ldots, n + 4$, leželo proti předpokladu v nadrovině určené touto přímkou a nezávislým S_{n-3}. Podle Pascalovy věty o šestiúhelníku vepsaném kuželosečce leží tedy 6 bodů $1', 2', \ldots, 5', (n+4)'$ na jednoduché kuželosečce C^2 roviny S_2. Tato kuželosečka se promítá z prostoru S_{n-3} kvadratickým kuželem $(n-2)$-ho druhu $S_{n-3} - V^2_{n-1} \equiv K$, na němž leží všechny dané body $1, \ldots, n+4$. Pro lineární nezávislost každých $n+1$ z daných bodů mohou v prostoru dvojných bodů S_{n-3} tohoto kužele ležet pouze $n-2$ dané body $6, \ldots, n+3$, tento prostor určující. Cyklickými záměnami pojmenování vrcholů $(n+4)$-úhelníka $1, \ldots, n+4$ můžeme vždy docílit toho, že kterýkoliv vrchol bude označen 1. Existují tedy $n+4$ různé kvadratické kužely $(n-2)$-ho druhu K_i, $(i = 1, \ldots, n+4)$ takové, že na každém z nich leží všechny dané body $1, \ldots, n+4$ a v dvojném prostoru každého z nich leží právě $n-2$ těchto bodů. Kužely jsou různé, protože mají různé prostory singulární. Prostory dvojných bodů kuželů K_i jsou totiž určeny vždy $n-2$ (cyklicky) po sobě následujícími body řady $1, \ldots, n+4$ tak, že vždy druhý bod skupiny $n-2$ bodů, určujících singulární prostor některého kužele, je prvým bodem skupiny $n-2$ bodů, určujících singulární prostor kužele následujícího. Dva totožné prostory by však musely být určeny skupinami $n-2$ bodů se společným prvým bodem.

První tři kužely K_i $(i = 1, 2, 3)$ mají prostory dvojných bodů: $S^1_{n-3} \equiv (6, 7, \ldots, n+3)$, $S^2_{n-3} \equiv (7, 8, \ldots, n+4)$, $S^3_{n-3} \equiv (8, \ldots, \ldots, n+4, 1)$. Je tedy $S^1_{n-2} \equiv (6, 7, \ldots, n+3, n+4)$, t. j. spojující prostor obou prostorů S^1_{n-3} a S^2_{n-3}, $(n-2)$-rozměrným prostorem ležícím na kuželi K_1 i K_2 a $S^2_{n-2} \equiv (7, 8, \ldots, n+4, 1)$, t. j. spojující prostor obou prostorů S^2_{n-3} a S^3_{n-3}, $(n-2)$-rozměrným prostorem ležícím na kuželi K_2 i K_3. Svazek nadrovin Σ_1 s basí S^1_{n-2} protíná kužely K_1 a K_2 v řadách $(n-2)$-rozměrných prostorů s ním perspektivních. Svazek nadrovin Σ_2 s basí S^2_{n-1} přiřaďme svazku Σ_1 tak, aby se korespondující si nadroviny obou svazků protínaly v $(n-2)$-rozměrných prostorech kužele K_2. Oba svazky jsou pak projektivní a takové, že každým z daných bodů $1, \ldots, n+4$, ležících na kuželi K_2, procházejí nadroviny korespondující si v projektivnosti obou svazků. Svazek nadrovin Σ_3 s basí S^3_{n-2} přiřaďme svazku nadrovin Σ_2 tak, aby se korespondující si nadroviny protínaly v $(n-2)$-rozměrných prostorech kužele K_3. Oba svazky Σ_2 a Σ_3 jsou pak projektivní a takové, že každým z daných bodů $1, \ldots, n+4$, ležících na kuželi K_3, procházejí v projektivnosti obou svazků si korespondující nadroviny. Je tedy $\Sigma_1 \overline{\wedge} \Sigma_2 \overline{\wedge} \Sigma_3$ a každým bodem $1, \ldots, \ldots, n+4$ procházejí nadroviny, které si v těchto projektivnostech korespondují. Pokračujeme-li takto dále, obdržíme pomocí n kuželů K_i $(i = 1, \ldots, n)$ celkem n projektivních svazků nadrovin $\Sigma_1 \overline{\wedge} \overline{\wedge} \Sigma_2 \overline{\wedge} \ldots \overline{\wedge} \Sigma_n$ takových, že každým z daných bodů $1, \ldots, n+4$ procházejí nadroviny, které si v projektivnostech těchto svazků korespondují. n projektivních svazků Σ_i ($i = 1, \ldots, n$) má obecnou vzájemnou polohu, protože každých n korespondujících si nadrovin se protíná v jednom bodě. Abychom to ukázali, zvolme ve svazku Σ_1 $n - 1$ nadrovin, které korespondují: ve svazku Σ_2 nadrovině určené bodem *6*, který jistě neleží v jeho basi určené skupinou $n - 2$ po sobě následujících bodů $n + 4$-úhelníka počínající bodem *7*, ve svazku Σ_3 nadrovině určené bodem *7*, který jistě neleží v jeho basi počínající bodem *8* atd. až ve svazku Σ_n nadrovině určené bodem $n + 4$, který jistě neleží v jeho basi určené skupinou bodů počínající bodem *1*. Ve svazku Σ_1 zvolme nyní libovolnou nadrovinu S^1_{n-1}, která není jednou z těchto $n - 1$ nadrovin a která neprochází žádným z bodů *1*, ..., *5*, které neleží v jeho basi. Ve svazcích Σ_i ($i = 2, \ldots, n$) sestrojme nadroviny S^i_{n-1} ($i = 2, \ldots, n$) korespondující nadrovině S^1_{n-1} svazku Σ_1. Prostor S_x, ve kterém se těchto n korespondujících si nadrovin protíná, leží v $(n - 2)$-rozměrném prostoru S_{n-2}, ve kterém se protínají nadroviny S^1_{n-1} a S^2_{n-1}. Tento S_{n-2} prochází prostorem (*7*, ..., $n + 4$) společným basím svazků Σ_1 a Σ_2, neprochází body *1*, ..., *5*, kterými neprochází S'_{n-1} a neprochází bodem *6*, protože nadrovině svazku Σ_2, která prochází bodem *6*, koresponduje ve svazku Σ_1 nadrovina jiná než S'_{n-1}. S_x leží v prostoru S_{n-2} a v nadrovině S^3_{n-1}, které mají společný prostor (*8*, ..., $n + 4$). Bod *7* leží v S_{n-2}, neleží však v nadrovině S^3_{n-1}, protože nadrovině svazku Σ_3, která prochází bodem *7*, koresponduje ve svazku Σ_1 jiná nadrovina než S^1_{n-1}. Nenáleží tedy celý S_{n-2} nadrovině S^3_{n-1} a protíná ji v $(n - 3)$-rozměrném prostoru S_{n-3}, v němž tedy leží S_x. Prostor S_{n-3} neprochází body *1*, ..., *6*, protože leží v S_{n-2} a neprochází bodem *7*, protože leží v S^3_{n-1}. Pokračujeme-li tak dále, obdržíme, že prostor S_x leží v přímce S_1, v níž se protíná $n - 1$ korespondujících si nadrovin S^i_{n-1} ($i = 1, \ldots, n - 1$), která prochází bodem $n + 4$ a neprochází žádným z ostatních daných bodů *1*, ..., $n + 3$. Nadrovina S^n_{n-1} neprochází bodem $n + 4$, protože nadrovině svazku Σ_n, procházející bodem $n + 4$, koresponduje v Σ_1 jiná nadrovina než S^1_{n-1}. Proto protíná S^n_{n-1} přímku S_1 v bodě a $S_x \equiv S_0$, j. b. d.

Svazky Σ_i ($i = 1, \ldots, n$) vytvoří tedy průsečnými prostory korespondujících si nadrovin racionální normální křivku n-rozměrného prostoru, na které leží všechny dané body *1*, ..., $n + 4$. Protože tedy tyto body leží na racionální normální křivce n-rozměrného prostoru, platí pro ně první část věty (1) při libovolném uspořádání. Tím je dokázána i druhá část věty (1).

II.

V této části článku ukážeme užití právě dokázané věty na dvou základních úlohách.

1. Racionální normální křivka n-rozměrného prostoru C^n buď dána svými $n+3$ reálnými body $1, \ldots, n+3$. Jest sestrojiti bod $n+4$, v němž C^n protíná nadrovinu S_{n-1} proloženou $n-1$ body křivky $5, \ldots, n+3$ a neprocházející žádným ze zbývajících bodů $1, \ldots, 4$.

Řešení. Podle věty (1) jsou:

(a) $(1, 2)$; $(4, 5, 6, \ldots, n+3)$,
(b) $(2, 3)$; $(5, 6, \ldots, n+3, n+4)$,
(c) $(3, 4)$; $(6, \ldots, n+3, n+4, 1)$

tři páry protějších prostorů. Prostory (a) se protínají v bodě I_1, který neleží v $(n-3)$-rozměrném prostoru $(6, \ldots, n+3)$. V opačném případě by n bodů $1, 2, 6, \ldots, n+3$ leželo v $(n-2)$-rozměrném prostoru proti předpokladu, že tyto body leží na racionální normální křivce C^n. Nadrovina $(5, \ldots, n+4) \equiv S_{n-1}$ je proťata přímkou $(2, 3)$ v bodě II_1, který z uvedeného důvodu neleží v $(6, \ldots, n+3)$. Přímka (I_1, II_1) neprotíná prostor $(6, \ldots, n+3)$, protože tento prostor neprotíná rovina $(1, 2, 3)$, jak plyne z vlastnosti bodů křivky C^n, a body $I_1 \not\equiv II_1 \not\equiv 2$ leží na přímkách $(1, 2)$ a $(2, 3)$. Určují tedy body $I_1, II_1, 6, \ldots, n+3$ nadrovinu, ve které leží bod $III_1 \equiv$ $\equiv [(3, 4) \times (6, \ldots, n+3, n+4, 1)]$ na přímce $(3, 4)$. Podle věty (1) je potom $(6, 7, \ldots, n+3, III_1, 1) \equiv (6, 7, \ldots, n+3, n+4, 1) \equiv$ $\equiv S^1_{n-1}$. Nadroviny S_{n-1} a S^1_{n-1} se protínají v $(n-2)$-rozměrném prostoru $(6, \ldots, n+3, n+4) \equiv S_{n-2}$, v němž tedy leží bod $n+4$. Kdyby se obě nadroviny ztotožňovaly, leželo by v S_{n-1} $n+1$ bodů $6, 7, \ldots, n+3, n+4, 1$ křivky C^n.[1])

Druhou trojici protějších prostorů volme takto:

(a) $(2, 3)$; $(5, 6, 7, \ldots, n+3, 1)$,
(b) $(3, 4)$; $(6, 7, \ldots, n+3, 1, n+4)$,
(c) $(4, 5)$; $(7, \ldots, n+3, 1, n+4, 2)$.

Prostory (a) se protínají v bodě I_2. Nadrovina prostorů (b) je určena prostorem $S_{n-2} \equiv S_{n-1} \times S^1_{n-1}$ a bodem 1, tedy prostory (b) se protínají v bodě II_2. Podle věty (1) leží bod III_2, který je průsečíkem prostorů (c), na přímce $(4, 5)$ v nadrovině $(7, \ldots, n+3, I_2 II_2, 1)$. Potom je $(7, \ldots, n+3, 1, III_2, 2) \equiv (7, \ldots, n+3, 1, n+4, 2)$ a tato nadrovina protíná prostor $S_{n-2} \equiv (6, \ldots, n+3, n+4)$ v $(n-3)$-rozměrném prostoru $S_{n-3} \equiv (7, \ldots, n+3, n+4)$, obsahujícím bod $n+4$.

m-tou trojici protějších prostorů volme takto:

(a) $(m, m+1)$; $(m+3, m+4, m+5, \ldots, n+3, 1, \ldots, m-1)$
(b) $(m+1, m+2)$; $(m+4, m+5, \ldots, n+3, 1, \ldots, m-1, n+4)$
(c) $(m+2, m+3)$; $(m+5, \ldots, n+3, 1, \ldots, m-1, n+4, m)$

[1]) Pro stručnost nebudu v dalším provádět zcela evidentní důkazy nezávislosti a existence příslušných prostorů.

Dvojice prostorů (a) se protíná v bodě I_m. Nadrovina $(m + 4, m + 5, \ldots, n + 3, 1, 2, \ldots, n - 1, n + 4)$ je určena prostorem $S_{n-m+1} \equiv (m + 4, m + 5, \ldots, n + 3, n + 4)$ a body $1, 2, \ldots, m - 1$ a je protata přímkou $(m + 1, m + 2)$ v bodě II_m. Podle věty (1) je bod III_m, který je průsečíkem prostorů (c), průsečík přímky $(m + 2, m + 3)$ s nadrovinou $(I_m, II_m, m + 5, \ldots, n + 3, 1, \ldots, m - 1)$. Pak se tedy nadrovina $(m + 5, \ldots, n + 3, 1, 2, \ldots, m - 1, III_m, m)$ protíná s prostorem S_{n-m+1} v $(n - m)$-rozměrném prostoru $S_{n-m} \equiv (m + 4, \ldots, n + 3, n + 4)$, obsahujícím bod $n + 4$. Pokračujeme-li tak dále, bude po n-tém kroku $S_{n-m} \equiv S_0 \equiv n + 4$.

2. Racionální normální křivka n-rozměrného prostoru C^n buď dána svými $n + 3$ reálnými body $2, \ldots, n + 4$. V bodě 2 jest sestrojiti všechny oskulační prostory křivky.

(2,1) *Konstrukce tečny.* Položme $1 \equiv 2$ a volme:

$$[(1, 2) \times (4, 5, 6, \ldots, n + 1, n + 2, n + 3)] \equiv I_1,$$
$$[(2, 3) \times (5, 6, \ldots, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4)] \equiv II_1,$$
$$[(3, 4) \times (6, \ldots, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, 1)] \equiv III_1.$$

Bod I_1 tečny sestrojené k C^n v bodě $1 \equiv 2$ leží podle věty (1) v nadrovině $(II_1, III_1, 6, \ldots, n + 3)$ a v nadrovině $(4, 5, 6, \ldots, n + 3)$, tedy v $(n - 2)$-rozměrném prostoru S_{n-2}, procházejícím $(n - 3)$-rozměrným prostorem $(6, \ldots, n + 3)$, v němž se obě nadroviny protínají.

Dále volme:

$$[(1, 2) \times (4, 6, 5, 7, \ldots, n + 3)] \equiv I_1,$$
$$[(2, 3) \times (6, 5, 7, \ldots, n + 3, n + 4)] \equiv II_1,$$
$$[(3, 4) \times (5, 7, \ldots, n + 3, n + 4, 1)] \equiv III_2.$$

Bod I_1 leží podle věty (1) v nadrovině $(II_1, III_2, 5, 7, \ldots, n + 3)$ a v S_{n-2}, tedy v $(n - 3)$-rozměrném prostoru S_{n-3}, v němž se oba prostory protínají a který prochází $(n - 4)$-rozměrným prostorem $(7, \ldots, n + 3)$. Dále volme:

$$[(1, 2) \times (4, 7, 6, 5, 8, \ldots, n + 3)] \equiv I_1,$$
$$[(2, 3) \times (7, 6, 5, 8, \ldots, n + 3, n + 4)] \equiv II_1,$$
$$[(3, 4) \times (6, 5, 8, \ldots, n + 3, n + 4, 1)] \equiv III_3.$$

Bod I_1 leží podle věty (1) v nadrovině $(II_1, III_3, 6, 5, 8, \ldots, n + 3)$ a v S_{n-3}, tedy v $(n - 4)$-rozměrném prostoru, v němž se oba prostory protínají a který prochází $(n - 5)$-rozměrným prostorem $(8, \ldots, n + 3)$.

Pokračujeme-li takto dále, dospějeme k přímce procházející bodem $n + 3$ a k nadrovině, která tímto bodem neprochází, které se protínají v bodě $I_1 \not\equiv 1 \equiv 2$ tečny křivky C^n v bodě $1 \equiv 2$.

(2,2) *Konstrukce oskulační roviny.* Podle (2,1) sestrojme v bodě 2 tečnu t a promítněme z tohoto bodu $n + 1$ daných bodů, na př. $3, \ldots, n + 3$ do nadroviny, která neprochází bodem 2, na př. $S_{n-1} \equiv$

$\equiv (3, \ldots, n+2)$ do bodů $3, \ldots, n+2, (n+3)'$. Je-li bod $2'$ průsečík tečny t s nadrovinou S_{n-1}, určují body $2', 3, \ldots, n+2$ $(n+3)'$ racionální normální křivku C^{n-1} nadroviny S_{n-1}. Sestrojíme-li k C^{n-1} podle (2,1) tečnu v bodě $2'$, neprochází tato jistě bodem 2 a určuje s ním rovinu obsahující dvě soumezné tečny křivky C^n.

(2,3) *Konstrukce oskulačního prostoru $(n-k)$-rozměrného.* Nechť je $k = n-1, \ldots, 1$. V bodě 2 křivky C^n buď sestrojen oskulační prostor S_{n-k-1} $(n-k-1)$-rozměrný. $(k+1)$-rozměrný prostor S_{k+1}, určený body $3, \ldots, k+4$, protíná S_{n-k-1} v bodě $2'$. Kdyby se oba prostory protínaly v prostoru rozměru většího než 0, obsahoval by jejich spojující prostor nejvýše $(n-1)$-rozměrný $n-k+k+2 = n+2$ body křivky C^n. Z $(n-k-2)$-rozměrného oskulačního prostoru křivky C^n v bodě 2, který již byl sestrojen a který nemá s S_{k+1} společného bodu, protože by v opačném případě nadrovina nebo nižší prostor obsahoval $n+1$ bodů křivky C^n, promítněme body $3, \ldots, k+5$ do prostoru S_{k+1} do bodů $3, \ldots, k+4, (k+5)'$. V S_{k+1} je potom $k+4$ body $2', 3, \ldots, k+4,$ $(k+5)'$ určena racionální normální křivka tohoto prostoru C^{k+1}. Tečna sestrojená podle (2,1) v bodě $2'$ ke křivce C^{k+1} má tedy s oskulačním prostorem S_{n-k-1} společný pouze bod $2'$ a určuje s ním $(n-k)$-rozměrný prostor S_{n-k}, který má s C^n $n-k+1$ společných soumezných bodů.

*

Sur les polygones de $n+4$ côtés inscrits à une courbe rationnelle normale de l'espace à n dimensions.

(Résumé de l'article précédent.)

Démonstration du théorème: Dans un polygone de $n+4$ côtés, inscrit à une courbe rationnelle normale de l'espace à n dimensions, soient 3 côtés consécutifs; pour chaque côté, les n sommets qui restent en supprimant les deux extrémités du côté et les deux sommets adjacents déterminent un hyperplan rencontrant le côté considéré dans un point; on a ainsi 3 points et 3 hyperplans; alors il existe un hyperplan contenant les 3 points ainsi que l'espace d'intersection des 3 hyperplans. Réciproquement, soient $n+4$ points dans l'espace à n dimensions tels qu'aucun hyperplan ne contienne $n+1$ de ces points; si les $n+4$ points, considérés dans un ordre déterminé, jouissent de la propriété précédente, ils en jouissent dans un ordre quelconque et la courbe rationnelle normale déterminée par $n+3$ points choisis arbitrairement parmi les $n+4$ points donnés contient aussi le point restant.

Dans la seconde partie le théorème est appliqué à la construction de points ultérieurs de la courbe rationnelle normale déterminée par $n+3$ points, ainsi qu'à la construction d'espaces osculateurs.