Vladimír Kořínek

Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1938-1948

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 3, D9--D18

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123123`

Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1938-1948.

Napsal **Vladimír Kořínek.**

K šedesátinám prof. Karla Petra vyšel v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky stručný nástin jeho života z pera prof. Fr. Nušla a stručný přehled jeho prací z pera prof. M. Kösslera.[1]) Tento přehled byl doplněn při sedmdesátinách prof. Petra autorem za desítiletí 1928—1938.[2]) Účelem tohoto článku jest doplnit u příležitosti osmdesátin prof. Petra tyto přehledy stručným vylíčením jeho vědecké činnosti za desítiletí 1938—1948.

I v osmé desítce svého věku neustává prof. Petr ve své intensivní činnosti. Jen v roce 1946 publikuje na příklad 5 vědeckých prací. V tomto období věnuje hlavní svou pozornost algebře, která i předtím byla spolu s teorií čísel hlavním předmětem jeho zájmu. Je to pravděpodobně způsobeno tím, že odchodem na odpočinek z universitní činnosti v roce 1938 nemusí se z důvodů svých universitních přednášek tak mnoho zabývat analysou a může se cele věnovat oboru, v němž spočívá hlavní těžisko jeho práce.

Analysy týká se v tomto období toliko práce **100** **(101)**[3]) o polynomech Bernoulliových. Prof. Petr definuje Bernoulliovy polynomy diferenční rovnicí[4])

$$\varphi_k(x + 1) - \varphi_k(x) = x^k$$

[1]) Karel Petr, Stručný nástin jeho života a stručný přehled jeho prací. Napsali k jeho šedesátinám Fr. Nušl a M. Kössler. ČMF 57 (1928), 169—182. Tento článek je v dalším citován jako I.

[2]) Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1928—1938. U příležitosti jeho sedmdesátin napsal Vladimír Kořínek, ČMF 67 (1938), D245—D254. Tento článek je v dalším citován jako II.

[3]) Čísla se vztahují na seznam připojený k tomuto přehledu. Prof. Petr zabýval se čísly a polynomy Bernoulliovými již ve dvou starších pracích 4 a 6 z I. Mimo to odvodil ve svém Počtu integrálním, 2. vyd., odst. 109, str. 231- 232 a cvičení 2 až 14, str. 272—274, všechny hlavní vlastnosti těchto polynomů a čísel metodami počtu integrálního.

[4]) Tuto diferenční rovnici pro polynomy Bernoulliovy uvádí již J. L. Raabe v knize Die Jacob-Bernoullische Funktion. Zürich 1848, str. 16. Rozvoje (1) jsem v literatuře nikde nenalezl.

a podmínkou $\varphi_k(0) = 0$. Tím jsou Bernoulliovy polynomy $\varphi_k(x)$ pro přirozené číslo k úplně určeny a snadno z této definice plyne, že $\varphi_k(x)$ je pro liché k polynom stupně $\frac{1}{2}(k + 1)$ v $(2x - 1)^2$ a pro sudé k polynom stupně $\frac{1}{2}k$ v $(2x - 1)^2$ násobený $(2x - 1)$. Z této vlastnosti polynomů Bernoulliových plyne, že platí rozvoje

$$\begin{aligned} \varphi_{2r-1}(x) &= c_0^r \mathfrak{A}_r(x) + c_1^r \mathfrak{A}_{r-1}(x) + \ldots + c_{r-1}^r \mathfrak{A}_1(x), \\ \varphi_{2r}(x) &= d_0^r \mathfrak{B}_r(x) + d_1^r \mathfrak{B}_{r-1}(x) + \ldots + d_{r-1}^r \mathfrak{B}_1(x), \end{aligned} \tag{1}$$

kdež $\mathfrak{A}_k(x)$ a $\mathfrak{B}_k(x)$ jsou tyto součiny:

$$\mathfrak{A}_k(x) = \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{2k}$$

$$\mathfrak{B}_k(x) = \frac{(2x-1)\,x(x+1)\ldots(x+k-1)(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{2\,(2k+1)}.$$

Prof. Petr nejdříve odvozuje velmi prostě vlastnosti koeficientů c_j^i, d_j^i těchto rozvojů. Tyto vlastnosti jsou překvapivě jednoduché:

1. c_j^i, d_j^i jsou přirozená čísla.
2. $c_j^i = d_j^i$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$; $j = 0, 1, 2, \ldots, i - 1$.
3. Platí pro $i > j > 0$ rekurentní vztah

$$c_j^i = c_j^{i-1} + (i - j)^2 c_{j-1}^{i-1}$$

a dále

$$c_0^i = d_0^i = 1.$$

Vlastnost 3 dovoluje velmi lehko rekurentně počítat koeficienty c_j^i, d_j^i. Prof. Petr se domnívá, že pro tyto jednoduché vlastnosti svých koeficientů mohou mít rozvoje (1) velkou důležitost pro teorii funkcí a čísel Bernoulliových. Proto studuje podrobně vlastnosti těchto koeficientů a ukazuje, jakým způsobem se dají tyto koeficienty lehko počítat. Správnost své domněnky pak ozřejmuje tím, že odvozuje pomocí těchto rozvojů velmi jednoduchým způsobem řadu vlastností polynomů a čísel Bernoulliových a čísel příbuzných. Dokazuje řadu číselně teoretických vlastností koeficientů c_j^i a d_j^i a podává velmi jednoduchý důkaz věty Staudt-Clausenovy, která říká toto: Jest pro r-té Bernoulliovo číslo:

$$(-1)^r B_r = \tfrac{1}{2} + \sum_p \frac{1}{p} + \text{celé číslo},$$

kdež se sčítá pro všechna lichá prvočísla p taková, že $p - 1$ dělí $2r$. Na konec odvozuje vzorce pro snadný výpočet koeficientů.

Práce 104 patří do teorie čísel a týká se Gaussových součtů. Jedná se o součet

$$\sum_{k=1}^{P} \left(\frac{k}{P}\right) \alpha^k, \tag{2}$$

kde P je liché číslo bez čtvercových dělitelů, α P-tá odmocnina z jedné. Jedna z prvních metod pro stanovení hodnoty tohoto součtu, pocházející od Gausse,[5]) spočívá v tom, že se ukáže, že součet (2) se rovná součinu

$$\psi_P(\alpha) = (\alpha - \alpha^{-1})(\alpha^3 - \alpha^{-3}) \ldots (\alpha^{P-2} - \alpha^{-P+2}).$$

Gauss to ukázal algebraickou cestou. Není však jasno, jakým způsobem přišel na výrazy, kterých při důkaze používá. Později podal Cauchy[6]) jiný, rovněž algebraický, důkaz této věty, ale jen pro případ, že P je liché prvočíslo. Záhy se však obrátila pozornost matematiků při stanovení součtu (2) k metodám jiným. Prof. Petr upozorňuje, že se věnovala uvedené Cauchyově práci velmi malá pozornost snad proto, že Cauchy podal důkaz poněkud povrchně, a ukazuje, že se důkaz dá snadno upravit tak, aby platil i pro případ, že P je liché číslo bez čtvercových dělitelů. Jako aplikaci podává autor důkaz zákona reciprocity pro Jacobiho symboly $\left(\frac{P}{Q}\right)$. Dále ukazuje, že platí vztah

$$\psi_{P_1}(\alpha_1)\, \psi_{P_2}(\alpha_2) = \psi_P(\alpha),$$

jsou-li P_1, P_2 dvě čísla nesoudělná a bez čtvercových dělitelů, $P = P_1P_2$, α_1 a α_2 P_1-tá a P_2-tá primitivní odmocnina z jedné, $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ (což je P-tá primitivní odmocnina z jedné).

Všechny ostatní práce prof. Petra z tohoto období patří do algebry.

Práce **102** (**103**), ačkoliv se zabývá problémem geometrickým, je v podstatě algebraická. Jedná se o tento problém: Jsou dány strany $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n-úhelníku vepsaného do kružnice. Jest vypočísti poloměr kružnice R a plochu n-úhelníku P.[7]) Prof. Petr stanoví nejdříve nutné a postačující podmínky, které musí strany $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňovat, aby to byly strany n-úhelníka vepsaného do kružnice a pak vykládá metody, jimiž lze sestrojit algebraické rovnice pro P a R. Koeficienty těchto rovnic jsou polynomy v $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pro $n = 3, 4, 5, 6$ pak skutečně tyto rovnice vypočítává. Přitom se ukazuje, že rovnice pro P mají pro $n = 2k - 1$ a $n = 2k$ stejný stupeň a že jejich koeficienty spolu jednoduše souvisí.

---

[5]) K. Fr. Gauss: Summatio quarumdam serierum singularium. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. 1, 1811. Werke II, str. 9—45.

[6]) Aug. Cauchy: Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes. Journal de mathématiques pures et appliquées **5**, **1840**, **154** až **168**. Viz str. **161**. Oeuvres complètes. 1-ère série, tome **5**, nr. **82**, **152**—**166**. Viz str. **159**.

[7]) Prof. Petr se zabýval různými vlastnostmi mnohoúhelníků již v dřívějších pracích. Viz práce 7 (9), 19, 34, 38 z I.

První Petrova práce z tohoto období je **94** a zabývá se kvadratickou formou s reálnými koeficienty $\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$, $a_{ik} = a_{ki}$. Jak známo, lze regulární lineární substitucí o reálných koeficientech převésti tuto formu na tvar $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^2$, $c_i \neq 0$, je-li ovšem diskriminant formy $D_n = |a_{ik}|$ různý od nuly. Přitom počet z záporných koeficientů mezi koeficienty c_i nezávisí na lineární substituci, nýbrž jen na kvadratické formě, a je roven počtu změn znaménkových v posloupnosti

$$D_n, D_{n-1}, \ldots, D_1, D_0 = 1, \tag{3}$$

kdež D_i jsou hlavní subdeterminanty diskriminantu formy tak zvolené, že subdeterminant D_i stupně i-tého je subdeterminant z determinantu D_{i+1}. Abychom mohli změny znaménkové v (3) spočítat, musíme předpokládat, že žádné dva sousední subdeterminanty v (3) nejsou rovny nule. Posloupnost (3) lze sice vždy tak zvolit, aby to bylo splněno, pro praktický výpočet bude však výhodné, budeme-li umět určit číslo z i z posloupnosti (3), která tuto podmínku nesplňuje. Tímto problémem se zabýval prof. Petr již dříve v práci 21 z I.[8]) Tam ukázal, že posloupnost (3) udává přesně počet záporných členů z, přiřadíme-li každému členu D_i, který se rovná nule, znaménko jeho hlavního subdeterminantu nejvyššího stupně, který je od nuly různý. V práci **94** vykládá prof. Petr jinou jednodušší metodu, jak určit z. K tomu cíli nechť v posloupnosti (3) existuje úsek

$$D_r \neq 0,\ D_{r+1} = 0,\ \ldots,\ D_{r+s-1} = 0,\ D_{r+s} \neq 0. \tag{4}$$

Je-li $s = 2$, pak nutně D_r a D_{r+2} mají opačná znaménka a počet změn znaménkových v (4) nutno položit rovný jedné. Pro $s = 3$ ukazuje prof. Petr, že počet změn znaménkových v úseku (4) nutno položit rovný dvěma, jsou-li D_r a D_{r+3} stejného znaménka, a rovný jedné, jsou-li tato čísla opačných znamének. Pro $s > 3$ již neurčují znaménka krajních členů D_r a D_{r+s} samy o sobě, za kolik změn znaménkových nutno úsek (4) počítat. Prof. Petr vyšetřuje však ještě případy $s = 4, 5, 6$. Jeho metoda vede k tomu, že posloupnost (4) se v těchto případech nahradí posloupnostmi jednoduššími, obsahujícími toliko D_r, D_{r+s} a pak ještě jisté hlavní subdeterminanty stupně nejvýše $(s - 2)$-ho. Metody lze však použít i při $s > 6$, kteréžto případy však prof. Petr nevyšetřuje.

L. E. Dickson[9]) podal krátký důkaz této věty: Budiž A čtver-

---

[8]) Viz I, str. 179.

[9]) L. E. Dickson: Modern Algebraic Theories, 1926, str. 89 a násl. — L. E. Dickson: Höhere Algebra. Autorisierte deutsche Ausgabe von „Modern Algebraic Theories", herausgegeben von Ewald Bodwig, 1929, str. 80 a násl. — K celému problému srovnej: C. C. Mac Duffee: The Theory of Matrices, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2 Band, 5, 1933, str. 70 až 72. Viz zvláště Corollary 39,12 na str. 70 a citaci Dicksona na str. 72.

cová matice o n řádcích s prvky v tělese T. Pak existuje čtvercová matice S o n řádcích s prvky v tělese T a s nenulovým determinantem taková, že platí

$$S^{-1}AS = B,$$

kdež B je matice speciálního tvaru, která se dá psát takto:

$$B = \begin{pmatrix} C_{r_1}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & C_{r_2}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & C_{r_3}, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & C_{r_k} \end{pmatrix}.$$

Zde jest $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$, C_{r_i} je čtvercová matice r_i-řádková tvaru

$$C_{r_i} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \\ C_{i1}, & C_{i2}, & C_{i3}, & \dots, & C_{ir_i-1} & C_{ir_i} \end{pmatrix}$$

a 0 jsou matice nulové. Ve speciálním případě, když T je těleso komplexních čísel, zavedl tuto kanonickou formu Frobenius.[10]) První úplný důkaz pro obecné těleso T podal S. Lattès[11]) pro případ, že A není singulární matice. Dicksonův důkaz nepředpokládá nic o determinantu matice A. Prof. Petr namítá úplně oprávněně, že jednotlivé kroky tohoto důkazu jsou pouze v knize naznačeny, čímž vznikají potíže při porozumění. Aby tyto potíže odstranil, podává v práci **95** svou vlastní úpravu důkazu Dicksonova. Prof. Petr vyslovuje stejně jako Dickson tuto větu nikoliv pro matici $A = (a_{ik})$, nýbrž pro lineární substituci

$$y_i = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Důkaz pak provádí pomocí lineárního operátoru Δ definovaného vztahem

$$\Delta x_i = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} x_k.$$

Práce **96** (**97**) a **98** (**99**) týkají se symetrických funkcí. Prof. Petr odvozuje v nich některé věty, kterých se dá výhodně použíti,

[10]) G. Frobenius: Journal für die r. und angew. Math. **86**, 1879, 146 až 208.

[11]) S. Lattès: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, **28**, 1914, 1—84.

chceme-li vyjádřit monotypickou (jednoduchou)[12]) symetrickou funkci pomocí elementárních symetrických funkcí.[13])

Obsah hlavní věty z pojednání 96 (97) dá se stručně popsat takto: Budiž $F_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vyjádření monotypické (jednoduché) symetrické funkce $\Sigma x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pomocí elementárních symetrických funkcí. Prof. Petr přiřaďuje funkci $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jisté monotypické (jednoduché) funkce $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ menší váhy.[14]) Buďtež

$$F_1(a_1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, F_s(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

příslušná vyjádření těchto funkcí elementárními symetrickými funkcemi. Téměř každému členu z $F_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dají se přiřadit jisté členy z $F_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $i = 1, 2, \ldots, s$ jednoduchým způsobem tak, že pro koeficienty takto sobě přiřaděných členů platí jistá velmi jednoduchá lineární relace. Dá se tedy koeficient takového členu z F_0 lehko vypočítati, známe-li vyjádření F_i všech monotypických (jednoduchých) funkcí f_i. Koeficienty těch výjimečných členů z F_0, které podmínkám nevyhovují, dají se snadno určit z vyjádření F_s. Vyjádření dané monotypické (jednoduché) symetrické funkce elementárními symetrickými funkcemi se tudíž snadno vypočte, známe-li vyjádření některých monotypických (jednoduchých) funkcí váhy nižší. Tento způsob výpočtu je zvláště výhodný, máme-li k disposici tabulky pro koeficienty vyjádření monotypických (jednoduchých) funkcí elementárními symetrickými funkcemi až do jisté váhy a chceme-li počítat vyjádření monotypické (jednoduché) funkce váhy větší. Prof. Petr počítá jako příklad vyjádření symetrické funkce $\Sigma x_1^5 x_2^4 x_3^3 x_2^2$ váhy 14, užívaje přitom Řehořovského tabulek pro koeficienty takovýchto vyjádření, které jdou až do váhy 12.[15]) Věta Petrem nalezená bude zvláště výhodná, půjde-li o roz-

---

[12]) Prof. Petr říká monotypická symetrická funkce takové celistvé symetrické funkci, která vznikne z jednoho svého členu, když na tento člen provedeme všechny permutace neurčitých, a všechny členy od sebe různé, které takto dostaneme, sečteme. Sám užívám místo názvu monotypická funkce názvu jednoduchá funkce.

[13]) Prof. Petr věnoval vždy velkou pozornost způsobům, jakým lze co nejvýhodněji vyjádřit daný symetrický polynom jakožto polynom elementárních symetrických funkcí. Svědčí o tom na příklad výklady a cvičení z jeho proseminářů.

[14]) Váha monotypické (jednoduché) symetrické funkce $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je její stupeň $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ v neurčitých $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Je-li polynom $F_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ součet členů tvaru $c a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}$, pak váha jest výraz $m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ a ten je pro všechny členy polynomu F_0 stejný.

[15]) Ed. Weyr a V. Řehořovský: Základové vyšší algebry. Theorie souměrných funkcí kořenů. Praha 1885.

šíření již vypočítaných tabulek pro koeficienty vyjádření monotypických (jednoduchých) funkcí elementárními symetrickými funkcemi až do jisté váhy pro váhy větší. Takovéto rozšíření dá se pomocí této věty velmi snadno provésti.

V pojednání 98 (99) vyšetřuje prof. Petr jisté součty n řad N-árních neurčitých

$$X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \ldots, X_N^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

při čemž předpokládá $n \leqq N$. Tyto součty

$$\Sigma X_1^{(1)} X_2^{(2)} \ldots X_n^{(n)} \tag{5}$$

jsou tvořeny takto: Ve výraze $X_1^{(1)} X_2^{(2)} \ldots X_n^{(n)}$ permutujeme všemi způsoby dolní indexy $1, 2, \ldots, n$. Tím vznikne $n!$ členů. V každém takovém členu nahradíme ještě dolní indexy $1, 2, \ldots, n$ všemi kombinacemi n-té třídy z čísel $1, 2, \ldots, N$. Dostaneme celkem

$$\binom{N}{n} n!$$

členů, které sečteme. Tento součet označíme právě vzorcem (5). Mimo tyto součty zavedeme si ještě součty

$$\begin{aligned}
(X^{i}) &= X_1^{(i)} + X_2^{(i)} + \ldots + X_N^{(i)} \\
(X^{i_1} X^{i_2}) &= X_1^{(i_1)} X_1^{(i_2)} + X_2^{(i_1)} X_2^{(i_2)} + \ldots + X_N^{(i_1)} X_N^{(i_2)} \qquad (6) \\
(X^{i_1} X^{i_2} X^{i_3}) &= X_1^{(i_1)} X_1^{(i_2)} X_1^{(i_3)} + X_2^{(i_1)} X_2^{(i_2)} X_2^{(i_3)} + \ldots + X_N^{(i_1)} X_N^{(i_2)} X_N^{(i_3)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Prof. Petr nejdříve odvozuje identitu, která vyjadřuje součet (5) pomocí součtů (6) a stanovuje explicitně koeficienty této identity. V dalším pak ukazuje význam této identity pro teorii symetrických funkcí. Tak odvozuje explicitně vyjádření monotypické (jednoduché) symetrické funkce jakožto polynomu v součtech k-tých mocnin $s_k = X_1^k + X_2^k + \ldots + X_N^k$. Pomocí tohoto vyjádření počítá dále explicitně vyjádření monotypické (jednoduché) funkce jakožto polynomu v elementárních symetrických funkcích a dokazuje pro koeficienty tohoto vyjádření větu Cayleyovu.

Přitom ukazuje, jak se dá těchto výsledků s výhodou použít při praktickém výpočtu vyjádření dané monotypické (jednoduché) funkce elementárními symetrickými funkcemi. Dokázaná identita umožňuje dále prof. Petrovi rozšířit platnost řady vět a vzorců z teorie symetrických funkcí na symetrické funkce n řad N-árních neurčitých. Tyto funkce jsou definovány jakožto polynomy v těchto řadách neurčitých, které se nezmění, když na každou řadu provedeme libovolnou, ale na každou řadu tutéž, permutaci N neurčitých.

Těžisko Petrovy vědecké práce v posledních letech spočívá v teorii invariantních útvarů algebraických forem. Této teorii věnoval prof. Petr po celou dobu, po kterou vědecky pracuje, velkou pozornost a značné úsilí a velkou a velmi podstatnou měrou přispěl k jejímu rozvoji.[16]) Z posledního desítiletí sem patří práce **105**, **106**, **107**, **108**. V nich se zabývá prof. Petr výpočtem vytvořujících funkcí pro počet invariantních útvarů algebraických binárních forem. Práce znamenají velký pokrok v sestrojování a výpočtu těchto funkcí.

Vytvořující funkce pro počet invariantních útvarů příslušných k jedné binární formě jest racionální funkce proměnných a, t, jež rozvinuta podle mocnin a, t, udává čísleným koeficientem A_{rs} ve členu $A_{rs}a^rt^s$ mocninného rozvoje, kolik jest invariantních útvarů stupně r v koeficientech základní formy a stupně $s - 1$ v neurčitých. Nejjednodušší taková funkce, kterou autor nazývá hrubá, je zlomek, jehož čitatel je výraz $(t - t^{-1})$ a jmenovatel jest součin $n + 1$ faktorů tvaru $(1 - at^k)$. n je zde stupeň základní formy. Tato vytvořující funkce je sice tvarem jednoduchá, ale hodí se velmi málo k výpočtu koeficientů A_{rs}. Proto se matematikové snažili nahradit tuto funkci jinou vytvořující funkcí, z níž by se její koeficienty daly snáze počítat. Výsledky, ke kterým dospěli, měly však opět jinou vadu. Jmenovatel obsahoval již i při poněkud vyšším n ($n > 4$) více faktorů tvaru $1 - a^kt^e$ než n. Dá se však očekávat, že budou existovat vytvořující funkce s nejvýše n faktory ve jmenovateli. Netřeba podotýkat, že větší počet faktorů prodlužuje značně výpočet koeficientů.

Prof. Petr ukázal — a to je hlavní teoretický výsledek jeho prací — že taková vytvořující funkce, kterou nazval normální, dá se vždy sestrojit tak, aby měla ve jmenovateli jen n faktorů. Tato funkce dá se pak rozložit v součet velmi jednoduchých částí, jejichž rozvoje dají se lehko počítat. Těchto částí je pro $n = 2m - 1$ a pro $n = 2m$ právě $m - 1$. To učinil v pojednání **106**. Prof. Petr vypracovává však v těchto pojednáních (**106** a **107**) také metody pro skutečný výpočet těchto vytvořujících funkcí, podává návod, jak postupovat, abychom se vyhnuli při výpočtu velkým číslům, a ukazuje, jak lze kontrolovat správnost početních výsledků.

Tyto normální vytvořující funkce pak skutečně sestrojuje a to v pojednání **105** pro $n = 5, 6, 7, 8$ a v pojednání **107** pro $n = 12$. Na sestrojení vytvořující funkce pro formu 12. stupně byla kdysi vypsána cena společností British Association for the Advancement of Sciences. Funkce sestrojil Franklin. Franklinova metoda je však nesrovnatelně složitější, takže byly uveřejněny jen výsledky roku 1881 Sylvestrem v Am. Journal of Math. **4**, 1881, 41—61 a po-

[16]) Algebraických forem týkají se práce **4**, **5**, **22**, **23**, **36** a speciálně počtu invariantních útvarů a vytvořujících funkcí pro tento počet práce **30** (**31**), **32**, **37** (**43**), **65** (**66**) z I.

drobné výpočty byly uloženy v safu university v Baltimore. V pojednání 108 aplikuje prof. Petr tyto metody na sestrojení vytvořující funkce pro invariantní útvary dvou binárních forem stupně m-tého a stupně n-tého. Hrubá vytvořující funkce má v čitateli jeden faktor a ve jmenovateli $m + n + 2$ faktorů. Normální vytvořující funkce má ve jmenovateli nejvýše $m + n + 1$ faktorů. Prof. Petr sestrojil v tomto pojednání normální vytvořující funkce pro případy $m = 3$, $n = 3$; $m = 4$, $n = 4$; $m = 3$, $n = 4$.

Přehlédneme-li na závěr ještě jednou vědeckou práci prof. Petra v osmém desítiletí jeho věku, neubráníme se dojmu, že je mohutná. Ve věku, kdy jiní vědečtí pracovníci již odpočívají a jejich životní dílo bývá již uzavřeno, publikuje prof. Petr 11 vědeckých prací a z toho 5 v jediném roce a to přesto, že po větší část tohoto období žil náš národ pod německou okupací a za druhé světové války v podmínkách pro vědeckou práci velmi nepříznivých.

Seznam prací prof. Karla Petra v desítiletí 1938—1948.

Tento seznam je pokračováním seznamu, který sestavil k šedesátinám prof. Karla Petra prof. M. Kössler (tento Časopis 58, 1928, 180—182), a seznamu za desítiletí 1928—38, který sestavil autor (tento Časopis, 67, 1938, D252—D253). Číslování prací pokračuje z obou seznamů.

Bylo užito těchto zkratek:

ČMF: Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.

Rozpravy Č. A.: Rozpravy České akademie věd a umění. Třída II.

Bull. Int.: Bulletin International. Académie tchèque des sciences. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine.

94. Poznámka o kvadratických formách. ČMF 68, (1938/39), 162—173.
95. O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce. ČMF 69, (1939/40), 9—22.
96. O jedné větě pro koeficienty symetrických funkcí. Rozpravy Č. A. 52, (1942), č. 11, str. 10.
97. Ein Satz über die Koeffizienten symmetrischer Funktionen. Bull. Int. 43, (1942), 132—143.
98. O užití jedné identity v teorii symetrických funkcí. Rozpravy Č. A. 52, (1942), č. 12, str. 20.
99. Eine Identität aus der Theorie der symmetrischen Funktionen und ihre Anwendung. Bull. Int. 43, (1942), 144—162.

100. O polynomech Bernoulliských. Rozpravy Č. A. **53**, (1943). č. 40, str. 16.
101. Ueber die Bernoullischen Polynome. Bull. Int. **44**, (1943). 511—526.
102. O mnohoúhelnících vepsaných do kruhu, jichž strany jsou dány. Rozpravy Č. A. **54**, (1944), č. 25, str. 9.
103. Sur les polygones donnés par leurs côtés qui sont inscrits dans un cercle. Bull. Int. **45**, (1944), 325—335.
104. O alternujících funkcích v kruhovém tělese. Rozpravy Č. A. **56**, (1946), č. 3, str. 12.[17])
105. O vytvořujících funkcích pro počet invariantních útvarů příslušných k jedné základní binární formě. Rozpravy Č. A. **56**. (1946), č. 5, str. 23.[17])
106. Zevšeobecnění výsledků pro vytvořující funkce dávající počet invariantních útvarů při binární formě daného stupně. Rozpravy Č. A. **56**, (1946), č. 8, str. 22.[17])
107. O vytvořující funkci v normálním tvaru pro počet invariantních útvarů u formy binární 12. stupně. Rozpravy Č. A. **56**, (1946), č. 10, str. 16.[17])
108. O vytvořujících funkcích pro počet invariantních útvarů příslušných k systému dvou binárních forem. Rozpravy Č. A. **56**. (1946), č. 14, str. 15.[17])

---

[17]) Překlad do světového jazyka této práce v Bull. Int. ještě nevyšel.