Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [VI.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 4, 345--353

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123112

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Užijeme-li jich nyní vzhledem k součinu $\mathbf{u} \times curl\, \mathbf{v}$, nabudeme z (97[a])

$$\mathbf{u} \times [\nabla \times \mathbf{v}] = \mathbf{u} \,.\, (\nabla \mathbf{v})_C - \mathbf{u} \,.\, (\nabla \mathbf{v}) \qquad (\mu)$$

čili

$$\mathbf{u} \times [\nabla \times \mathbf{v}] = (\nabla \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{u} - \mathbf{u} \,.\, (\nabla \mathbf{v}). \qquad (\mu')$$

Položíme-li v těchto rovnicích $\nabla_\mathbf{v} (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v})$ za $\mathbf{u} \,.\, (\nabla \mathbf{v})$, zjednáme si vzorce

$$\mathbf{u} \times curl\, \mathbf{v} = \mathbf{u} \,.\, (\nabla_C \mathbf{v}) - \nabla_\mathbf{v} (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}), \qquad (99^a)$$

$$\mathbf{u} \times curl\, \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{u} - \nabla_\mathbf{v} (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v})\ ^{*)}. \qquad (99^b)$$

Vzorci (93[b]) lze dáti jiný tvar, který se též vyskytuje ve spisech, pojednávajících o vektorové analysi. Poněvadž totiž dle (μ)

$$\mathbf{u} \,.\, (\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{u} \,.\, (\nabla_C \mathbf{v}) - \mathbf{u} \times [\nabla \times \mathbf{v}]$$

a podobně

$$\mathbf{v} \,.\, (\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{v} \,.\, (\nabla_C \mathbf{u}) - \mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{u}],$$

bude

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}) = {} & \mathbf{u} \,.\, (\nabla_C \mathbf{v}) + \mathbf{v} \,.\, (\nabla_C \mathbf{u}) \\ & - \mathbf{u} \times [\nabla \times \mathbf{v}] - \mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{u}], \end{aligned} \qquad (100^a)$$

což lze také psáti vzhledem k (μ')

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}) = {} & (\nabla \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \,.\, \mathbf{v} - \mathbf{u} \times [\nabla \times \mathbf{v}] \\ & - \mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{u}]\ ^{**)}. \end{aligned} \qquad (100^b)$$

---

*) Gibbs, Föppl a j. piší tyto vzorce ve formě

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v})_\mathbf{v} - \mathbf{u} \,.\, \nabla \mathbf{v}\,;$$

buďiž tuto připomenuto, že $\mathbf{u} \,.\, \nabla \mathbf{v}$ v tomto vzorci nemá téhož významu, v jakém byl výše zaveden a že se nerovná tudíž $\nabla_\mathbf{v} (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v})$.

**) Ve Wilson-Gibbsově »Vector Analysis« (pag. 158) mají tyto vzorce tvar

$$\nabla (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \,.\, \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \,.\, \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Zcela podobným výpočtem, kterým byl odvozen vzorec (93[a]), dospějeme ke vzorci

$$\frac{d\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]}{d\mathbf{r}}=\left[\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dr}-\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{u}}{dr}\right]\mathbf{r}_1 \qquad (101^a)$$

čili

$$\frac{d\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]}{d\mathbf{r}}=\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}-\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}. \qquad (101^b)$$

Poněvadž jednak části skalární, jednak části vektoriální dyadických výrazů na obou stranách rovnice (101[a]) se sobě rovnají, obdržíme po prvé

$$\frac{d\,.\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]}{d\mathbf{r}}=\left[\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dr}-\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{u}}{dr}\right].\,\mathbf{r}_1$$
$$=\left[\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right].\,\mathbf{r}_1-\left[\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{u}}{dr}\right].\,\mathbf{r}_1;$$

dle rovnice (14) jest $\left[\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right].\,\mathbf{r}_1=\mathbf{u}\,.\left[\frac{d\mathbf{v}}{dr}\times\mathbf{r}_1\right]$ a podobně lze vyjádřiti druhý člen na pravé straně, tudíž

$$\frac{d\,.\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]}{d\mathbf{r}}=\mathbf{u}\,\left[\frac{d\mathbf{v}}{dr}\times\mathbf{r}_1\right]-\mathbf{v}\,.\left[\frac{d\mathbf{u}}{dr}\times\mathbf{r}_1\right].$$

Ze známé rovnice $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{v}}{dr}\,\mathbf{r}_1$ plyne, přihlédneme-li k částem vektoriálním,

$$\frac{d\times\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{v}}{dr}\times\mathbf{r}_1;$$

pročež

$$\frac{d\,.\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]}{d\mathbf{r}}=\mathbf{u}\,.\,\frac{d\times\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}-\mathbf{v}\,.\,\frac{d\times\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} \qquad (102^a)$$

čili

$$\mathit{div}\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]=\mathbf{u}\,.\,\mathit{curl}\,\mathbf{v}-\mathbf{v}\quad\mathit{curl}\,\mathbf{u}. \qquad (102^b)$$

Pokládáme-li opět v součinu $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ jeden činitel, na př. $\mathbf{u}$ za stálý, označujeme jeho částečnou divergenci $\mathit{div}_{\mathbf{v}}\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]$; poněvadž *curl* stálého vektoru se rovná nulle, obdržíme pro tuto divergenci vzorec

$$\mathit{div}_{\mathbf{v}}\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]=\mathbf{u}\,.\,\mathit{curl}\,\mathbf{v}$$

a podobně

$$div_{\mathbf{u}}\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}] = -\,\mathbf{v}\,.\,curl\,\mathbf{u}\,;$$

tudíž lze také dáti vzorci (102^a) tvar

$$div\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}] = div_{\mathbf{v}}\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}] + div_{\mathbf{u}}\,[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]. \qquad (102^c)$$

Po druhé povstane z rovnice (101^a)

$$\frac{d\times[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]}{d\mathbf{r}} = \left[\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right]\times\mathbf{r}_1 - \left[\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{u}}{dr}\right]\times\mathbf{r}_1. \qquad (\nu)$$

Hledíce k (16^a) píšeme

$$\left[\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right]\times\mathbf{r}_1 = (\mathbf{u}\,.\,\mathbf{r}_1)\,\frac{d\mathbf{v}}{dr} - \left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\,.\,\mathbf{r}_1\right)\mathbf{u}$$

aneb, použijeme-li v prvním členu na pravé straně vzorce (20^b), jakož i ve druhém členu rovnice $\frac{d\mathbf{v}}{dr}\,.\,\mathbf{r}_1 = \frac{d\,.\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, která vyplývá z rovnosti skalárních částí obou stran rovnice $\frac{d\mathbf{v}}{dr}\,\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, též

$$\left[\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right]\times\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}\,.\left(\mathbf{r}_1\,\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right) - \frac{d\,.\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{u}.$$

Jelikož (dle známé věty, že součin jest týž, násobíme-li vektor dyadou nebo sdruženou dyadu týmž vektorem)

$$\mathbf{u}\,.\left(\mathbf{r}_1\,\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right) = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\,\mathbf{r}_1\right).\,\mathbf{u}$$

a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dr}\,\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}},$$

bude

$$\left[\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right]\times\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\,.\,\mathbf{u} - \frac{d\,.\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{u}\,;$$

podobně

$$\left[\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{u}}{dr}\right]\times\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\,.\,\mathbf{v} - \frac{d\,.\,\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{v}.$$

Vložíce tyto hodnoty do rovnice (ν) obdržíme

$$\frac{d\times[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]}{d\mathbf{r}} = \frac{d\,.\,\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{v} - \frac{d\,.\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\,.\,\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\,.\,\mathbf{u}, \qquad (103^a)$$

kterouž rovnici lze také psáti ve tvaru

$$curl\,[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = (div\,\mathbf{u})\,\mathbf{v} - (div\,\mathbf{v})\,.\,\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})\,.\,\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})\,.\,\mathbf{u}\ ^{*}). \tag{103^b}$$

Pokládáme-li, jak bylo již výše při symbolech ∇ a *div* učiněno, ve výraze $curl\,[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]$ vektor $\mathbf{u}$ za stálý, značíme jej $curl_{\mathbf{v}}\,[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]$, totiž jako částečný *curl*; pak jest $div\,\mathbf{u} = 0$, $\nabla\mathbf{u} = 0$, tudíž

$$curl_{\mathbf{v}}\,[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = -(div\,\mathbf{v})\,\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{v})\,.\,\mathbf{u} \tag{104^a}$$

a podobně

$$curl_{\mathbf{u}}\,[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = (div\,\mathbf{u})\,\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{u})\,.\,\mathbf{v}. \tag{104^b}$$

Pročež z rovnice (103^b) plyne

$$curl\,[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = curl_{\mathbf{v}}\,[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] + curl_{\mathbf{u}}\,[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]. \tag{103^c}$$

Vyvozených vzorců užijeme, abychom odvodili důležitou relaci, která má pro vektorovou analysis asi takový význam jako věta Taylorova pro skalární analysis.

Budiž $\mathbf{v}_0$ vektor v bodě $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ pole; i bude v neskonale blízkém bodě $M\,(x, y, z)$ příslušný vektor

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + d\mathbf{v}.$$

Dle (66) jest

$$d\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{r}.$$

Z rovnice (99^b) vychází

$$(\nabla\mathbf{v})\,.\,d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \times curl\,\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}\,(d\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}),$$

tudíž

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + d\mathbf{r} \times curl\,\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}\,(d\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}). \tag{105^a}$$

Rovnici tuto lze ještě jinak psáti; jestiť dle (93^b)

$$\nabla\,(d\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}}\,(d\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}) + \nabla_{d\mathbf{r}}\,(d\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}),$$

z čehož povstane

$$\nabla_{\mathbf{v}}\,(d\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}) = \nabla\,(d\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}) - \nabla_{d\mathbf{r}}\,(d\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}).$$

---

*) Jiný tvar této rovnice jest

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}\,.\,\nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}\,.\,\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla\,.\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\,.\,\mathbf{v}$$

(viz Wilson-Gibbs »Vector Analysis«, pag. 157, nebo Bucherer »Elemente der Vektor-Analysis«, pag. 30).

Jelikož jest $d\mathbf{r}$ průvodičem bodu M, platí dle (96)

$$\nabla_{d\mathbf{r}}(d\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}) = \mathbf{v};$$

pročež

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \nabla(d\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}) - \mathbf{v} + d\mathbf{r} \times curl\, \mathbf{v},$$

čili

$$\mathbf{v} = {}^1/_2\mathbf{v}_0 + {}^1/_2 d\mathbf{r} \times curl\, \mathbf{v} + {}^1/_2\nabla(d\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}). \qquad (105^b)$$

Vzorci (105^a) a (105^b) jest vektor $\mathbf{v}$ vyjádřen jako součet tří vektorů, z nichž každý má svůj zvláštní význam mechanický. Jak již bylo výše připomenuto, pohyb nekonečně malé koule z myšlené tekutiny, jejíž každá částice má jinou rychlost (nejvšeobecnější to pohyb útvaru proměnného), jest superposicí translace, rotace a deformace. Složka translační rychlostního vektoru $\mathbf{v}$ dána jest sčítancem $\mathbf{v}_0$, složka rotační sčítancem $\frac{1}{2} d\mathbf{r} \times curl\, \mathbf{v}$ (viz výklad vzorce (84)); význam třetího sčítance, za který můžeme pokládati v (105^a) součet $\frac{1}{2} d\mathbf{r} \times curl\, \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}(d\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v})$, poznáme touto úvahou:

Dle (99^b) pišme za $\frac{1}{2} d\mathbf{r} \times curl\, \mathbf{v}$ rozdíl

$$\tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}) \,.\, d\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}\nabla_{\mathbf{v}}(d\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}),$$

tudíž

$$\tfrac{1}{2} d\mathbf{r} \times curl\, \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}(d\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}) \,.\, d\mathbf{r} + \tfrac{1}{2}\nabla_{\mathbf{v}}(d\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}),$$

aneb, poněvadž dle (94^a)

$$\nabla_{\mathbf{v}}(d\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}) = d\mathbf{r} \,.\, \nabla\mathbf{v},$$

též

$$\tfrac{1}{2} d\mathbf{r} \times curl\, \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}(d\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}) \,.\, d\mathbf{r} + \tfrac{1}{2} d\mathbf{r} \,.\, (\nabla\mathbf{v}).$$

Položme nyní nekonečně malý průvodič

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k},$$

a použijme jednak vzorce (71^d), dle něhož

$$(\nabla\mathbf{v}) \,.\, d\mathbf{r} = \left(dx\frac{\partial v_x}{\partial x} + dy\frac{\partial v_x}{\partial y} + dz\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\mathbf{i}$$
$$+ \left(dx\frac{\partial v_y}{\partial x} + dy\frac{\partial v_y}{\partial y} + dz\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(dx\frac{\partial v_z}{\partial x} + dy\frac{\partial v_z}{\partial y} + dz\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k},$$

jednak vzorce (74^c), dle něhož

$$d\mathbf{r} \,.\, (\nabla\mathbf{v}) = \left(dx\frac{\partial v_x}{\partial x} + dy\frac{\partial v_y}{\partial x} + dz\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{i}$$
$$+ \left(dx\frac{\partial v_x}{\partial y} + dy\frac{\partial v_y}{\partial y} + dz\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(dx\frac{\partial v_x}{\partial z} + dy\frac{\partial v_y}{\partial z} + dz\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k};$$

i obdržíme

$$\tfrac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} + \tfrac{1}{2} d\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{v})$$

$$= \left(dx \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{2} dy \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} dz \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) \mathbf{i}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} dx \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + dy \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{2} dz \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right) \mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} dx \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} dy \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + dz \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathbf{k}.$$

Píšeme-li vektor $\tfrac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} + \tfrac{1}{2} d\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{v})$ ve formě $\xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k}$, budou tedy souřadnice

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{dz} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz, \\
\eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) dz. \qquad (106) \\
\zeta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz;
\end{aligned}$$

deformace, určená těmito rovnicemi, jest prostá, poněvadž vyhověno jest známým podmínkám $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{13}$, jež platí v tom případě o veličinách a_{mn} v rovnicích (56[b]) *).

Zavedených symbolů *div* a *curl* může býti ovšem použito též vzhledem k vektoru ∇v, který jsme poznali ve stati o poli skalárním; obdržíme tak výrazy *div* ∇v a *curl* ∇v. První z nich jest totožný se součinem $\nabla \cdot \nabla v$, za nějž jsme psali $\nabla^2 v$; druhý shoduje se se součinem $\nabla \times \nabla v$, který se rovná nulle. Pročež

$$curl\ \nabla v = 0,\quad div\ \nabla v = \nabla^2 v. \qquad (107)$$

Poznáváme z první této rovnice, že pole gradientů jest polem irrotationálním.

Naopak: každé pole irrotationální, jehož vektory $\mathbf{v}$ vyhovují tedy podmínce *curl* $\mathbf{v} = 0$, lze pokládati za pole gradientů, příslušející jistému poli skalárnímu w. Neboť je-li *curl* $\mathbf{v} = 0$, jest vždy

$$\mathbf{v} \cdot curl\ \mathbf{v} = 0;$$

z toho jde vzhledem k (90), že pole to jest komplex-lamellární. Lze tedy vektor $\mathbf{v}$ psáti ve tvaru $\lambda \nabla w$.

---

*) Viz Dr. A. Seydler: »Theoretická mechanika«, pag. 182.

Jest však za příčinou podmínky *curl* **v** $= 0$ dle (86[a])

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z};$$

toť jsou známé podmínečné rovnice*), aby výraz $v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$ byl úplným differenciálem skalární veličiny w. Je-li pak

$$v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = dw, \tag{89^b}$$

jest dle rovnice (89[a]) $\lambda = 1$, t. j. pole irrotationální vektorů **v** souvisí se skalárním polem w tak, že vektor **v** jest v každém bodu gradientem w.

Skalární veličina w jest známa pode jménem *potenciál*, pole vektorové, jemuž přísluší skalární pole potenciálů (tedy každé pole irrotationální), zove se také *polem potenciálním*. W. Thomson jmenuje je polem *lamellárním*, poněvadž je lze rozvrhnouti soustavou hladin v nekonečně tenké vrstvy (lamelly), na nichž vektory **v** (jako gradienty) kolmo stojí, jsouce co do velikosti nepřímo úměrny ke tloušťce příslušné vrstvy.

Přejdeme-li dále k funkcím vektorovým, můžeme mluviti na tomto místě (obmezíme-li se totiž na případy, v nichž veličina, k níž se operator vztahuje, jest skalárem, jako *div* **v**, nebo vektorem, jako *curl* **v**) jenom o ∇ *div* **v**, *div curl* **v**, *curl curl* **v** a ∇ *curl* **v**.

Co se týče především druhého z těchto výrazů, lze snadno dokázati, že se rovná nulle. Neboť

$$div\ curl\ \mathbf{v} = \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{v}],$$

což dle (14) jest rovno $[\nabla \times \nabla] \cdot \mathbf{v}$; ale skalární součin tří vektorů, jehož dva činitelé jsou stejny, má hodnotu nullu, pročež

$$div\ curl\ \mathbf{v} = 0. \tag{108}$$

Divergence curlu kteréhokoli vektoru rovná se nulle.

Z toho jde, že pole curlů, příslušející libovolnému poli vektorovému, jest polem solenoidálním.

První a třetí z uvedených výrazů souvisí spolu relací, kterou odvodíme takto:

---

*) Viz Studnička: „Základové vyšší mathematiky", díl třetí, p. 206.

Vyjděme od rovnice (16[b]), dle níž lze psáti

$$\nabla_c \times [\nabla_c \times \mathbf{v}] = (\nabla_c \cdot \mathbf{v}) \nabla_c - (\nabla_c \cdot \nabla_c) \mathbf{v}\,^*); \qquad (\xi)$$

na pravé straně jest však, umístíme-li skalární součin $(\nabla_c . \mathbf{v})$ za vektor,

$$(\nabla_c \cdot \mathbf{v}) \nabla_c = \nabla_c (\nabla_c \cdot \mathbf{v}).$$

Vzhledem k rovnici (78′) (pod čarou) jest $\nabla_c . \mathbf{v} = \nabla . \mathbf{v} = div\, \mathbf{v}$; vztahujeme-li pak ∇_c ke skaláru $div\, \mathbf{v}$, můžeme jej nahraditi operatorem ∇, tudíž

$$(\nabla_c . \mathbf{v}) \nabla_c = \nabla_c (\nabla . \mathbf{v}) = \nabla\, div\, \mathbf{v}.$$

Poslední člen rovnice (ξ) jest dle (20[b])

$$(\nabla_c . \nabla_c) \mathbf{v} = \nabla_c . (\nabla_c \mathbf{v});$$

vzhledem k rovnici (67[c]), totiž

$$\nabla_c \mathbf{v} = \nabla v_x \mathbf{i} + \nabla v_y \mathbf{j} + \nabla v_z \mathbf{k},$$

bude

$$\nabla_c . (\nabla_c \mathbf{v}) = \nabla_c . (\nabla v_x \mathbf{i}) + \nabla_c . (\nabla v_y \mathbf{j}) + \nabla_c . (\nabla v_z \mathbf{k})$$
$$= (\nabla_c . \nabla v_x) \mathbf{i} + (\nabla_c . \nabla v_y) \mathbf{j} + (\nabla_c . \nabla v_z) \mathbf{k}.$$

Avšak dle (78′) a (107) obdržíme

$$\nabla_c . \nabla v_x = \nabla . \nabla v_x = div\, \nabla v_x = \nabla^2 v_x,$$

a podobně

$$\nabla_c . \nabla v_y = \nabla^2 v_y, \quad \nabla_c . \nabla v_z = \nabla^2 v_z;$$

i můžeme psáti přihlížejíce ku vzorci (40)

$$(\nabla_c . \nabla_c) \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \mathbf{i}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \mathbf{k}, \qquad (109^a)$$

čili

$$(\nabla_c . \nabla_c) \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \mathbf{k}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \mathbf{k}\right) + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \mathbf{k}\right).$$

---

*) Wilson a Gibbs (»Vector Analysis«, pag. 169) z důvodu již naznačeného vycházejí od rovnice

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}] = (\nabla . \mathbf{v}) \nabla - (\nabla . \nabla) \mathbf{v}.$$

Jelikož dle (57)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathbf{j}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathbf{k}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x},$$

lze položiti

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\mathbf{i}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}\mathbf{j}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}\mathbf{k}=\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2};$$

pročež

$$(\nabla_c \cdot \nabla_c)\,\mathbf{v}=\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}. \qquad (109^b)$$

Mezi pravou stranou tohoto vzorce a pravou stranou vytčeného již vzorce (40), totiž

$$\nabla^2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

shledáváme zřejmou podobnost; i jsme oprávněni psáti za $\nabla_c \cdot {}_c$, anebo za jemu (vzhledem ke vzorci 78′) rovný součin $\nabla \cdot \nabla$ kratčeji ∇^2. Značí nám tedy $\nabla^2\,\mathbf{v}$ vektor, daný rovnicí

$$\nabla^2\mathbf{v}=\nabla^2 v_x\mathbf{i}+\nabla^2 v_y\mathbf{j}+\nabla^2 v_z\mathbf{k}. \qquad (110)$$

Pak lze dáti rovnici (ξ) tvar

$$\nabla_c\times[\nabla_c\times\mathbf{v}]=\nabla\, div\,\mathbf{v}-\nabla^2\mathbf{v};$$

jelikož dle (79′) $\nabla_c\times\mathbf{v}=-curl\,\mathbf{v}$, tudíž $\nabla_c\times[\nabla_c\times\mathbf{v}]$ $=-curl\,(-curl\,\mathbf{v})=curl\,curl\,\mathbf{v}$, místo čehož můžeme užíti označení $curl^2\,\mathbf{v}$, obdržíme konečně důležitou rovnici

$$curl^2\,\mathbf{v}=\nabla\, div\,\mathbf{v}-\nabla^2\mathbf{v}\ {}^{*)}. \qquad (111)$$

Je-li pole solenoidální, jest $\nabla\, div\,\mathbf{v}=0$, tudíž

$$curl^2\,\mathbf{v}=-\nabla^2\mathbf{v}; \qquad (112)$$

je-li pole irrotationální, jest $curl^2\,\mathbf{v}=0$, tedy

$$\nabla\, div\,\mathbf{v}=\nabla^2\mathbf{v}; \qquad (113)$$

a je-li pole beze zdrojů a bez vírů, jest

$$\nabla^2\mathbf{v}=0. \qquad (114^a)$$

(Pokrač.)

---

*) Analytický důkaz této rovnice nalézá se ve spise: „Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität von Dr. A. Föppl“, I. vyd. pag. 58 anebo II. vyd. pag. 89.