Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 4, 436--440

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123107`

Úlohy.

Řešení úloh.

a) Z mathematiky.

Uloha 1.

Nekonečný periodický řetězec

$$z = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \,.\,.\; in\ inf.}}}}$$

nabývá šesteré hodnoty, když současně ve všech periodách permutujeme prvky a, b, c. Dokázati, že o hodnotách těch platí

$$z_1 \,.\, z_3 \,.\, z_5 = z_2 \,.\, z_4 \,.\, z_6.$$

Dr. *Marian Haas.*

Řešení zaslal p. *Jan Šlechta* ze VII. tř. vyšší reálky v Praze-III.

Položme

$$z_1 = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + z_1}}};$$

z toho pro z_1 kvadratická rovnice:

$$z_2^1\,(ab + 1) + z_1\,(a - b + c + m) - (bc + 1) = 0,$$

kde položeno $abc = m$.

Z obou kořenů této rovnice má platnost kořen s kladně vzatým diskriminantem k:

$$z_1 = \frac{-a + b - c - m + k}{2\,(ab + 1)},$$

$$\text{kdež } k = \sqrt{(a - b + c + m)^2 + 4\,(ab + 1)\,(bc + 1)}$$
$$= \sqrt{(a + b + c + m)^2 + 4},$$

kterýžto výraz pro všechny permutace prvků a, b, c jest konstantní, poněvadž je vůči nim symmetrický.

Permutováním obdržíme

$$z_2 = \frac{-a + c - b - m + k}{2\,(ac + 1)}$$

$$z_3 = \frac{-c + a - b - m + k}{2\,(ac + 1)}.$$

$$z_4 = \frac{-b + a - c - m + k}{2(ab + 1)}$$

$$z_5 = \frac{-b + c - a - m + k}{2(bc + 1)}$$

$$z_6 = \frac{-c + b - a - m + k}{2(bc + 1)}.$$

Součiny $z_1 \,.\, z_3 \,.\, z_5$ a $z_2 \,.\, z_4 \,.\, z_6$, shodujíce se v čitateli i jmenovateli, jsou si rovny a tedy platnost tvrzení dokázána.

Úloha 2.

Číslo šesticiferné psáno jest veskrze různými číslicemi; týmiž šesti a to vždy všemi číslicemi jest vyznačena jeho $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$ *a* $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$. *Které je to číslo?*

Prof. *Ant. Jeřábek.*

Řešení zaslal p. *Josef Jandásek* z VIII. tř. gymn. ve Strážnici.

Buď naše číslo $N = 12n$; potom jeho části jsou $10n$, $9n$, $4n$, $3n$, n.

Číslo $9n$ je psáno týmiž číslicemi jako n, je tedy n dělitelno devíti, číslo $10n$ je psáno týmiž ciframi a obsahuje tedy N nullu. Číslo $12n$ je šesticiferné, je tedy n pěticiferné a nemá nully. Najděme všechny pěticiferné skupiny různých číslic, jichž ciferný součet je dělitelný devíti. Jsou to:

1) 98721, 2) 98631, 3) 98541, 4) 98532, 5) 97641,
6) *97632*, 7) 97542, 8) 96543, 9) 87651, 10) 876,4,2,
11) 87543, 12) 84321, 13) 75321, 14) 65421.

Dá-li číslice obsažená v některé skupině, znásobená 3, 4, 9, 12 cifry, jež obsaženy jsou v té skupině, může číslo n jí končiti. Zkoumejme ku př. skupinu 6); n může končiti jen 3i; přidáme další cifru a zkoumáme opět součiny se 3i, 4i, 9i, 12i.

Přibeřme *2*; nacházíme $3 \,.\, 23 = 69$, $4 \,.\, 23 = 92$, $9 \,.\, 23 = 207$.

Přibéřeme další: 9. Jest pak $3 \,.\, 923 = 2769$, $4 \,.\, 923 = 3692$ atd.

Najdeme konečně $n = 076923,$

$3n = 230769,$

$4n = 307692,$

$9n = 692307,$

$12n = N = 923076.$

Řešení 2. zaslal p. *Rud. Malina* ze VII. třídy reálky v Novém Městě na Moravě.

Vlastnost žádanou má perioda desetinného zlomku, který povstane při dělení 1 : 13. ($\frac{1}{13} = 0{\cdot}\dot{0}7692\dot{3}$), neboť i periody desetinných zlomků $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{10}{13}$ a $\frac{12}{13}$ jsou jen cyklickými permutacemi základní periody. Klademe-li $0{\cdot}76923 = n$, jest hledané číslo: $12n = 923076$.

Úloha 3.

Kolik různých rovin určeno jest všemi možnými trojinami vrcholů a) pravidelného dvanáctistěnu, b) pravidelného dvacítistěnu? *rv.*

Řešení zaslal p. *Josef Jandásek* z VIII. tř. gymn. ve Strážnici.

α) Všech rovin určených možnými trojinami ze 20 vrcholů prav. dvanáctistěnu jest $C_{20}^3 = \binom{20}{3}$.

Ale celé skupiny těchto rovin jsou nahrazeny vždy jedinou rovinou:

α) 12 stěn a 12 rovin rovnoběžných se stěnami obsahuje vždy 5 vrcholů; tím ubývá

$$24\left[\binom{5}{3} - 1\right] \text{ rovin;}$$

β) všech 30 hran tvoří 15 párů rovnoběžek; ke každým dvěma rovnoběžným hranám přísluší čtyři s nimi rovnoběžné stěnové úhlopříčny. Tím ke každému páru rovnoběžných hran náleží 5 nových čtyřbodových rovin a ubývá tedy tím

$$15 . 5\left[\binom{4}{3} - 1\right] \text{ rovin;}$$

γ) mimo to jest tu 20 šestibodových rovin obsahujících po třech hranách; tím ubývá

$$24\left[\binom{6}{3} - 1\right] \text{ rovin.}$$

Je tedy celkový počet různých rovin určených všemi vrcholy pravidelného 12tistěnu:

$$k_{12} = \binom{20}{3} - 24\left[\binom{5}{3} - 1\right] - 75\left[\binom{4}{3} - 1\right] - 20\left[\binom{6}{3} - 1\right]$$
$$= 1140 - 216 - 225 - 380 = 319.$$

b) V pravidelném dvacetistěnu jest vrcholů 12; mimo trojbodové roviny přichází tam 12 rovin 5tibodových a 15 rovin 4 bodových. Jest tedy počet všech různých rovin

$$k_{20} = \binom{12}{3} - 12\left[\binom{5}{3} - 1\right] - 15\left[\binom{4}{3} - 1\right]$$
$$= 220 - 108 - 45 = 67.$$

Poznámka. Tím současně řešeny duálné úlohy: V kolika bodech protínají se roviny stěn pravidelného dvacetistěnu a dvanáctistěnu?

Úloha 4.

Řešiti celistvými kladnými čísly rovnici:

$$(5x - 2y)^{2x+3y-65} = \pm 1.$$

Ant. Lochmann.

Řešení zaslal p. *Rud. Schwarz* ze VII. tř. reálky v Kutné Hoře.

1) $(5x - 2y)^{2x+3y-65} = 1.$

Tu buď *a*) $2x + 3y - 65 = 0$ nebo

b) $5x - 2y = 1.$

Řešením rovnice *a*) obdržíme

$$x = 7 + 3t \qquad y = 17 - 2t;$$

řešením rovnice *b*) dostaneme

$$x = 7 + 2u, \qquad y = 17 + 5u.$$

2) $(5x - 2y)^{2x+3y-65} = -1.$

Zde současně

$$5x - 2y = -1$$

a

$$2x + 3y - 65 = 2m + 1 \quad \text{(číslo liché)};$$

z toho

$$x = 3 + 4v, \qquad y = 8 + 10v.$$

Vymezení hodnot t, u, v, pro které kořeny budou kladné, jest dobře známo.

Úloha 5.

Kolik existuje různých tvarů trojúhelníka, ve kterých všechny tři úhly obsahují celistvé počty stupňů? Tý.

Řešení zaslal p. *Rudolf Hanák* ze VII. tř. reálky v Prostějově.

Úlohu lze řešiti variacemi; jedná se tu o variace s opakováním 180 prvků druhé třídy (třetí úhel totiž je určen rovnicí $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$). Při tom každý tvar trojúhelníka opakuje se 2 . 6kráte. Tedy

$$n = \frac{V'^{II}_{180}}{2 \cdot 6} = \frac{180^2}{12} = 2700.$$

Jest tedy 2700 různých tvarů trojúhelníka, kde úhly jsou vyjádřeny cel. počtem stupňů; z nich jest 1 rovnostranný, 89 rovnoramenných a 45 pravoúhlých.

Úloha 6.

Sestrojiti trojúhelník, jsou-li dány: u_c, v_c, r.

Prof. *Ant. Jeřábek.*

Řešení zaslal p. *Rudolf Novotný* z VIII. tř. g. v Kyjově.

Rozbor. Označme vrcholy trojúhelníka A, B, C; patu výšky v_c písmenem D; bod, ve kterém symmetrála úhlu γ protíná stranu c, budiž E; průsečík prodloužené této symmetrály s kružnicí opsanou F a střed této kružnice O.

Jak známo, protínají se osa úhlu a osa prot. strany na kružnici opsané (bod F). Jest tedy $\triangle\, OFC$ rovnoramenný, ve kterém $\overline{OF} = \overline{OC}$ a tedy též $\sphericalangle\, OFC = \sphericalangle\, OCF$. Poněvadž pak $\overline{OF} \perp c$, $CD \perp c$, tedy $\overline{OF} \parallel \overline{CD}$; platí tedy též $\sphericalangle\, OFC = \sphericalangle\, ECD = \sphericalangle\, ECO$. V trojúh. ECD známe přeponu $\overline{EC} = u_c$ a odvěsnu $CD = v_c$. Z toho plyne:

Sestrojení. Sestrojíme $\triangle\, EDC$, úhel ECD přeneseme na druhou stranu od ramene CE. Na nové rameno tohoto úhlu přeneseme $\overline{CO} = r$. Tím dostaneme střed kružnice opsané a můžeme ji sestrojiti. Průsečíky její s přímkou $\overline{ED}$ jsou vrcholy A a B. Úloha je jednoznačná.

— — — —