Karel Zahradník

O průsecích kuželosečky s fokálou

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 1--9

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123102`

O průsecích kuželosečky s fokálou.

Dr. K. Zahradník.

Šest bodů u_h ($h = 1, 2 \ldots 6$) fokály leží na kuželosečce, aneb jinak řečeno, tvoří Pascalův šestiúhelník vepsaný fokále

$$\begin{aligned} x &= \frac{cu}{(a + bu)(1 + u^2)}, \\ y &= \frac{cu^2}{(a + bu)(1 + u^2)}, \end{aligned} \tag{1}$$

platí-li [1])

$$u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 = (u) = \varkappa^2, \tag{2}$$

kdež je

$$\varkappa = -\frac{a}{b}.$$

Parametry imaginárných kružných bodů jsou

$$u = \pm i.$$

Je-li tedy

$$u_5 = + i, \; u_6 = - i,$$

přejde relace (2) ve

$$u_1 u_2 u_3 u_4 = \varkappa^2, \tag{3}$$

kteráž vyjadřuje podmínku, kdy čtyry body fokály leží na kruhu.

Tři body fokály leží na přímce, vyhovují-li jejich parametry relaci:

$$u_1 u_2 u_3 = \varkappa. \tag{4}$$

---

[1]) Srovnej Dr. *Em. Weyr*: »Über Durchschnittpunkte von Focalen mit Kreisen und mit Lemniscaten«. Zpráva o zasedání kr. spol. nauk $^{13}/_{5}$ 1873 Praha. »Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung« ibid. $^{27}/_{4}$ 1870.

Z relací (2) a (4) plyne:

1. *Prodloužené strany Pascalova šestiúhelníku vepsaného fokále protínají fokálu v bodech tvořících opět Pascalův šestiúhelník.*

Je totiž

$$u_h u_{h+1} v_h = \varkappa, \qquad h = 1, 2 \ldots 5.$$
$$u_6 u_1 v_6 = \varkappa$$

Násobením těchto šest rovnic plyne vzhledem k rovnici (2)

$$(v) = \varkappa^2.$$

2. *Tangenciálné body vrcholů Pascalova šestiúhelníku vepsaného fokále tvoří opět Pascalův šestiúhelník.*

Je-li v_h tangenciálný bod bodu u_h, platí

$$u_h^2 v_h = \varkappa. \qquad h = 1, 2 \ldots 6.$$

Násobením obdržíme

$$(u)^2 (v) = \varkappa^6,$$

tudíž

$$(v) = \varkappa^2.$$

3. *Spojnice protilehlých vrcholů Pascalova šestiúhelníku vepsaného fokále protínají fokálu ve třech bodech ležících na přímce.*

Označíme-li u_{hk} průsek spojnice

$$\overline{u_h u_k}$$

s fokálou, bude

$$u_1 u_4 u_{14} = \varkappa$$
$$u_2 u_5 u_{25} = \varkappa$$
$$u_3 u_6 u_{36} = \varkappa,$$

z čehož násobením se zřetelem na rov. (2) plyne

$$u_{14} u_{25} u_{36} = \varkappa.$$

4. *Spojíme-li vrcholy Pascalova šestiúhelníku na fokále podvojmo s vrcholy Pascalova šestiúhelníku z tangenciálních bodů vrcholů a sice tak, by žádná spojnice netvořila tečnu fokály, obdržíme dalších šest průseků s fokálou, tvořící Pascalův šestiúhelník.*

Jsou-li u_h, v_h dva takové vrcholy a w_h průsek spojnice $\overline{u_h v_h}$ s fokálou, platí:

$$u_h v_h w_h = \varkappa \qquad (h = 1, 2 \ldots 6).$$

Násobením plyne se zřetelem, že je $(u) = \varkappa^2$, $(v) = \varkappa^2$, též

$$(w) = \varkappa^2.$$

5. ***Spojnice průseků protilehlých stran Pascalova šestiúhelníku s fokálou protínají fokálu v bodech, jež leží na jedné přímce.***

Je-li $\overline{u_1 u_2}$, $\overline{u_4 u_5}$ pár protilehlých stran, u_{12}, u_{45} průseky jejich s fokálou, v_{36} průsek spojnice $\overline{u_{12}, u_{45}}$ s fokálou, bude

$$u_1 u_2 u_{12} = \varkappa, \qquad u_4 u_5 u_{45} = \varkappa, \qquad u_{12} u_{45} v_{36} = \varkappa,$$

tudíž

$$u_1 u_2 u_4 u_5 u_{12} u_{45} = \varkappa^2,$$

tedy též

$$u_1 u_2 u_4 u_5 = \varkappa v_{36};$$

podobně platí pro ostatní páry

$$u_2 u_3 - u_5 u_6, \; u_3 u_4 - u_6 u_1$$

$$u_2 u_3 u_5 u_6 = \varkappa v_{41}$$

$$u_3 u_4 u_6 u_1 = \varkappa v_{52}.$$

Znásobíme-li poslední tři rovnice, obdržíme (rov. 2.)

$$v_{36} v_{41} v_{52} = \varkappa.$$

6. *Proložíme-li vždy čtyřmi vrcholy Pascalova šestiúhelníku na fokále, tak zvolenými, že každá taková skupina čtyřbodová má s ostatními skupinami pouze dva body společné, na příklad*

$$u_1 u_2 u_3 u_4, \qquad u_3 u_4 u_5 u_6, \qquad u_5 u_6 u_1 u_2$$

kuželosečky — obdržíme na fokále dalších šest bodů, tvořících opět Pascalův šestiúhelník.

Kuželosečka body

$$u_1 u_2 u_3 u_4$$

proložená protíná fokálu v bodech

$$v_5, \; v_6;$$

platí tudíž

$$u_1 u_2 u_3 u_4 v_5 v_6 = \varkappa^2;$$

podobně platí

$$u_3 u_4 u_5 u_6 v_1 v_2 = \varkappa^2$$
$$u_5 u_6 u_1 u_2 v_3 v_4 = \varkappa^2.$$

Násobením těchto rovnic plyne se zřetelem k rovnici (2)

$$(v) = \varkappa^2.$$

7. *Každá kuželosečka dotýkající se ve dvou bodech*

$$u_1, u_2$$

fokály, protíná tuto v dalších dvou bodech

$$u', u''.$$

Spojnice jejich protíná fokálu v témž bodě, ve kterém je spojnice tangenciálních bodů

$$v_1, v_2$$

bodů

$$u_1, u_2$$

protíná.

Z

$$u_1^2 u_2^2 u' u'' = \varkappa^2, \qquad u_1^2 v_1 = \varkappa, \qquad u_2^2 v_2 = \varkappa$$

plyne

$$u' u'' = v_1 v_2.$$

Společný průsek spojnic $\overline{u'u''}$, $\overline{v_1 v_2}$ s fokálou je

$$w = \frac{\varkappa}{u'u''} = \frac{\varkappa}{v_1 v_2}.$$

8. *Kuželosečky dotýkající se v bodech* u_1, u_2 potažmo u_3, u_4 a u_5, u_6 *fokály protínají fokálu v bodech* u'_1 u'_2 *potažmo* u'_3, u'_4 a u'_5, u'_6. *Tvoří-li body* u_h *Pascalův šestiúhelník vepsaný fokále, platí totéž o bodech* u'_h, *a průseky spojnic* $\overline{u'_1 u'_2}$, $\overline{u'_3 u'_4}$, $\overline{u'_5 u'_6}$ *protínají fokálu v bodech* v_{12}, v_{34}, v_{56} *ležících na přímce.*

Platí totéž

$$u_1^2 u_2^2 u'_1 u'_2 = \varkappa^2$$
$$u_3^2 u_4^2 u'_3 u'_4 = \varkappa^2$$
$$u_5^2 u_6^2 u'_5 u'_6 = \varkappa^2$$

tudíž též

$$(u)^2 (u') = \varkappa^6$$

z čehož:

$$(u') = \varkappa^2.$$

Dále máme:

$$u'_1 u'_2 v_{12} = \varkappa$$
$$u'_3 u'_4 v_{34} = \varkappa$$
$$u'_5 u'_6 v_{56} = \varkappa.$$

Násobením plyne vzhledem k poslední rovnici

$$v_{12} v_{34} v_{56} = \varkappa.$$

9. *Proložíme-li třemi vrcholy Pascalova šestiúhelníku na fokále kuželosečku jakož i ostatními třemi vrcholy, obdržíme nových šest průseků s fokálou tvořících Pascalův šestiúhelník.*

10. *Čtyřmi body fokály lze proložiti dvě kuželosečky, které se dotýkají fokály. Body dotyku dělí tečny dvojného bodu fokály harmonicky.*

Parametry bodů dotyku plynou z rovnice (2) pro $u_5 = u_6 = u$ jako kořeny kvadratické rovnice a harmoničnost vysvítá tím, že součet parametrů bodů dotyku rovná se nulle.

Jsou-li u', u'' parametry bodu dotyku, je

$$u'u'' = -\frac{\varkappa^2}{u_1 u_2 u_3 u_4} = \lambda, \qquad u' + u'' = 0.$$

Body dotyku kuželoseček se nemění, nemění-li se součin parametru těch čtyř bodů na fokále zvolených. Mění-li se λ, tvoří body dotyku kvadratickou involuci na fokále. Spojnice sdružených bodů obalují parabolu

$$(bx + ay - c)^2 - 4abxy = 0,$$

kteráž arci se nemění, když dva z daných bodů, na př. u_3, u_4, jsou imaginárné kružné body. Pak máme kruhy jdoucí dvěma body u_1, u_2 fokály a dotýkající se této v bodech u', u''. Označíme zde průseky spojnic $\overline{u_1 u_2}$, $\overline{u'u''}$ s fokálou v potažmo v', obdržíme

$$vv' = -1,$$

t. j. body v a v' vidíme z dvojného bodu fokály pod pravým úhlem. Spojnice takto sdružených bodů v, v' probíhají ohniskem [1]) fokály, jehož parametr je $v'' = -\varkappa$.

11. *Třemi body u_1, u_2, u_3 fokály můžeme proložiti tři kuželosečky, mající s fokálou dotyk trojbodový. Parametry*

---

[1]) Srovnej odstavec 18.

bodů dotyku $u'u''u'''$ těch kuželoseček leží s danými body opět na kuželosečce.

Parametry u', u'', u''' bodů dotyku plynou z rovnice (2), stavíme-li v ní

$$u_4 = u_5 = u_6 = u$$

jako kořeny rovnice

$$u^3 - \frac{\varkappa^2}{u_1 u_2 u_3} = 0.$$

Ty body dotyku leží s danými body na téže kuželosečce, neb je $u'u''u'''u_1 u_2 u_3 = \varkappa^2$.

Dokud se součin $u_1 u_2 u_3$ nemění, nemění se body trojbodového dotyku kuželoseček trojúhelníku $u_1 u_2 u_3$ opsaných.

Jsou-li dva z daných bodů imaginárné kružné body, na př.

$$u_2 = + i, \; u_3 = - i,$$

budou u', u'', u''' body oskulační kruhů oskulačních probíhajících bodem u_1 fokaly, a jelikož zde platí

$$u'u''u'''u_1 = \varkappa^2,$$

vychází (rov. 3.), že body oskulační kruhů oskulačních, probíhajících bodem u_1 fokály leží s bodem u_1 na témž kruhu Pravíme, že oskulační trojina u', u'', u''' je bodu u_1 přidružená. Tato věta byla nejdříve dokázána *J. Steinerem* [1]) pro kuželosečky; že platí též pro fokálu, dokázal *E. Weyr* [2]). Případ zvláštní pro $a = b$, tedy pro strophoidu, vyšetřil jsem na jiném místě [3]), a platí též pro lemniskatu [4]).

Jest jasno, že platí obecně pro křivky vzniklé inversí z kuželosečky, neb kruhu odpovídá opět kruh a kruhu oskulačnímu kruh oskulační.

---

[1]) *J. Steiner*: Creller, Journal für Math. Bd. 3?, pg. 300.

[2]) *Em. Weyr*: „Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung" Stb. d. böhm. Ges. d. Wissensch. $^{27}/_4$ 1870.

[3]) *Zahradník*: „Rationale ebene Curven dritter Ordnung." Grunert-Hoppes Archiv f. M. a Ph. Bd. 61., pag. 15.

[4]) *E. Weyr*: „Die Lemniscate in razionleer Behandlung." Abh. d. kg. böhm. Gesell. d. Wissensch. Prag 1·73.

Zahradník: „Zur Theorie der Lemniskate" Grunert-Hoppe, Archiv I. 16, pg. 327. (1899.)

Stavíme-li

$$u_1 u_2 u_3 = t,$$

můžeme psáti

$$u^3 t = \varkappa^2,$$

t. j. body trojbodového dotyku kuželoseček opsaných trojúhelníku $u_1 u_2 u_3$ na fokále tvoří trojinu oskulační kruhů křivosti přidruženou bodu

$$t = u_1 u_2 u_3.$$

12. *Dvěma body $u_1 u_2$ fokály lze proložiti čtyři kuželosečky mající s fokálou styk čtyřbodový.*

Parametry bodu dotyku plynou z rovnice (2) pro $u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = u$ jako kořeny rovnice

$$u^4 u_1 u_2 = \varkappa^2.$$

Jsou-li u_1, u_2 imaginárné body kruhové, přejde poslední rovnice ve

$$u^4 = \varkappa^2.$$

Kořeny této rovnice jsou parametry bodů dotyku kruhů majících s fokálou dotyk čtyřbodový. Tyto body jsou vrcholy fokály, z nichž dva jsou reelné, a jsou body dotyku tečen z bodů $+1$ a -1 na fokálu vedených.

13. *Kuželosečky mající v průsecích přímky s fokálou styk čtyřbodový s fokálou protínají fokálu v dalších šesti bodech tvořících Pascalův šestiúhelník.*

Jsou-li v_1, v_2, v_3 průseky přímky s fokálou, bude

$$v_1^4 u_1 u_2 = \varkappa^2$$
$$v_2^4 u_3 u_4 = \varkappa^2$$
$$v_3^4 u_5 u_6 = \varkappa^2$$

Z čehož následkem relace $v_1 v_2 v_3 = \varkappa$ plyne násobením

$$(u) = \varkappa^2.$$

14. *Bodem u_1 fokály lze proložiti pět kuželoseček fokálu oskulujících. Oskulační body tvoří pětinu, kteráž s bodem jí přidruženým u_1 tvoří Pascalův šestiúhelník fokále vepsaný.*

Parametry bodů oskulačních plynou z rovnice (2), stavíme-li

$$u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = u$$

jako kořeny rovnice

$$u^5 u_1 = \varkappa^2.$$

Jelikož je součin kořenů

$$v_h \ (h = 1, 2 \ldots 5)$$

roven

$$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 = \frac{\varkappa^2}{u_1}$$

plyne ihned $u_1 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 = \varkappa^2$.

15. *Rozložíme-li průseky libovolné kuželosečky s fokálou na dvě skupiny trojbodové, a proložíme-li těmi skupinami kruhy, obdržíme na fokále další dva body příslušné kvadratické centrální involuci.*

Buďtež $u_1 u_2 u_3$ a $v_1 v_2 v_3$ takové dvě skupiny. Kruhy jimi proložené protínají fokálu v bodech

$$u = \frac{\varkappa^2}{u_1 u_2 u_3} \text{ resp. } v = \frac{\varkappa^2}{v_1 v_2 v_3}$$

tudíž je

$$uv = \varkappa^2.$$

Střed té involuce je průsek w spojnice $\overline{uv}$ s fokálou, totiž

$$w = \frac{1}{\varkappa} = -\frac{b}{a}.$$

Souřadnice jeho jsou

$$x = -\frac{a^2 bc}{a^4 - b^4}, \ y = \frac{ab^2 c}{a^4 - b^4}.$$

Spojnice uv má rovnici

$$[b(\varkappa^2 - 1)\varkappa^2 x - a(\varkappa^2 - 1)y + \varkappa^2 c] - (u + v)[ax + b\varkappa^2 y] = 0,$$

kteráž za příčinou libovolnosti faktoru $(u + v)$ probíhá bodem pevným, daným rovnicemi

$$b(\varkappa^2 - 1)\varkappa^2 x - a(\varkappa^2 - 1)y + \varkappa^2 c = 0$$
$$ax + b\varkappa^2 y = 0.$$

Řešíme-li a stavíme-li do výsledku $\varkappa = -\frac{a}{b}$, obdržíme opět dřívější hodnoty pro x a y.

Parametry dvojných bodů involuce jsou

$$u = \pm \varkappa = \mp \frac{a}{b}.$$

Jeden dvojný bod příslušný parametru $+\varkappa$, je reálný úběžný bod fokály, druhý odpovídající parametru $-\varkappa = \frac{b}{a}$ má souřadnice

$$x = \frac{1}{2}\frac{bc}{a^2+b^2}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{ac}{a^2+b^2}$$

a to je ohnisko fokály, společný to tangenciálný bod v imaginárných kružných bodů, neb platí

$$(+i)^2 v = (-i)^2 v = \varkappa$$

tedy $v = -\varkappa$.

O sestrojování vzorců empirických.

Píše **V. Láska.**

I.

Pozorování fysikální dává nám číselný materiál vyjadřující v nejjednodušším případu vzájemnou závislost dvou veličin u a v. Vyjádření oné závislosti v tvaru funkce, t. j. rovnicí

$$F(u_1, v) = 0$$

bývá pak jedním z hlavních úkolů vědy. Všeobecně v příručkách uváděná methoda zakládá se na parabolických vzorech interpolačních. Nebude tedy od místa, podáme-li methodu novou a všeobecnější, založenou na známých větách geometrie polohy.

Budiž dána řada hodnot

$$\begin{array}{llll} u_1 & u_2 & u_3 & \ldots \\ v_1 & v_2 & v_2 & \ldots \end{array}$$

odvozených empiricky. Veličinami u, v stupňujme dvě přímky, U a V. Tím obdržíme dvě řady bodové, jež bude lze uvésti do polohy perspektivní, když dvojpoměr čtyř libovolných bodů jedné řady rovnati se bude dvojpoměru bodů sdružených řady druhé.

Máme-li čtyři hodnoty

$$\begin{array}{llll} u_\varkappa & u_\lambda & u_\mu & u_\nu \\ u_\varkappa & u_\lambda & u_\mu & u_\nu \end{array}$$