František Kadeřávek

O zvláštní ploše sborcené. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 21--29

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123101`

Těmito rovnicemi jest křivka L stanovena; průmět její L_2 dostaneme, vyloučíme-li z nich souřadnici y, má tedy L_2 rovnici

$$xz^2 + 4pr^2(px - z) = 0,$$

z níž je patrno, že počátek souřadnic jest bodem obratu, osa $Z \equiv R_2$ její asymptotou a úběžný bod osy $X \equiv X_{12}$ isolovaným bodem dvojným.

Obdobně lze obdržeti rovnici versiery. Zvolíme-li však $X \equiv X_{12}$ a $R_2 \equiv Y$ za osy souřadnic (obr. 2.), bude

$$\frac{s_2 p_1}{s_1 p_1} = \frac{2r}{r_1 p},$$

a položíme li $r_1 p_1 = x$, $p_1 s_2 = y$, obdržíme rovnici křivky L_2

$$\frac{y}{\sqrt{x(2r - x)}} = \frac{2r}{x},$$

čili

$$xy^2 = 4r^2(2r - x).$$

O zvláštní ploše sborcené.

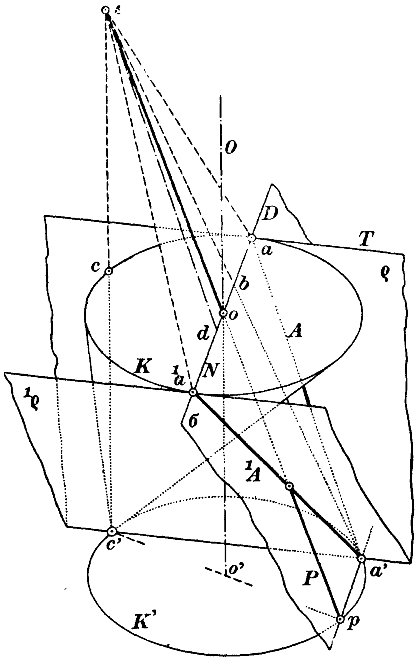
Frant. Kadeřávek, assistent české techniky v Praze.

Budiž dán rotační válec **V** o ose O kolmé k průmětně π a na něm svítící bod s. Jest vyšetřiti sborcenou plochu vyplněnou paprsky, které se od daného válce pouze jedenkráte odrazily a to v bodech jeho půdorysné stopy K.

Daná plocha jest dle roviny (sO) souměrna a abychom sestrojili některou její površku, veďme bodem s (viz znázorňující obr. 1ª i obr. 1., kde sestrojen toliko půdorys, protože nárysu k následnímu netřeba) libovolný paprsek, protínající kružnici K v bodě a, ve kterémž sestrojme normálu N daného válce, s bodu s spusťme na ni kolmici $\overline{sb}$, kterouž prodlužme o touž délku do bodu a'; pak spojnice $\overline{aa'} \equiv A$ jest odražený paprsek, a tedy žádaná površka. Jeť úhel $\overline{saN} = NA$, a paprsek A jest v rovině (sN), jak toho zákony odrazu vyžadují. Ale bod a' spadá rovněž do daného válce a má od průmětny π touž vzdálenost jako bod s, z čehož plyne, že

1. uvažovaná sborcená plocha obsahuje kružnici K daného válce, ležící v rovině $\pi' \| \pi$ v téže vzdálenosti jako bod s od π.

Z obr. 1. plyne velmi jednoduchá konstrukce půdorysů površek dané plochy. Je třeba pouze vésti bodem s_1 libovolný



Obr. 1. a)

paprsek $\overline{s_1 a'_1}$ a jeho průsečík a'_1 s kružnicí K'_1 spojiti s průsečíkem a_1 téže kružnice a přímky N_1 jdoucí středem o_1 kolmo k $\overline{s_1 a'_1}$. Přímka $\overline{a_1 a'_1} \equiv A_1$ jest již žádaným půdorysem. Dále vidno, že $\overset{\frown}{s_1 a_1} = \overset{\frown}{a_1 a'_1}$, z čehož plyne, že

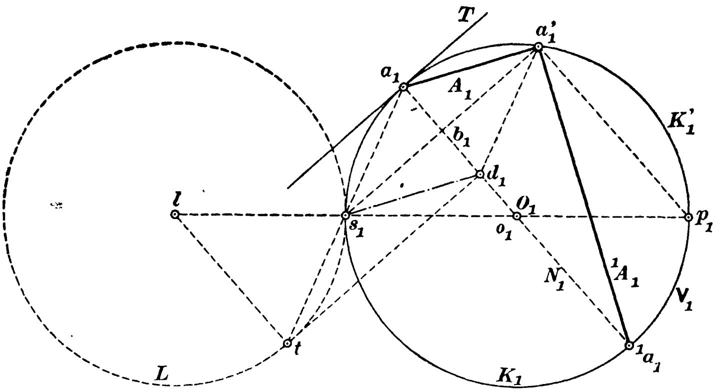
2. danou plochu lze též vytvořiti spojnicemi bodů a a a' pohybujících se v kružnicích K a K' rychlostmi, jichž poměr jest 1 : 2.

Sestrojme v bodě a kružnice K tečnu T; rovina ϱ určená touto tečnou a površkou A jest tečnou rovinou dané plochy v bodě a a protíná rovinu π' kružnice K' v přímce $\overline{a'c'}$, kdež

c' jest souměrný bod k bodu s dle π a tedy pevný bod. Z toho však vidno, že

3. dané plochy dotýká se podél kružnice K kužel o vrcholu c' souměrném k s dle π.

K bodu c' vytkněme si na kružnici K' diametrálně protilehlý bod p, pak zajisté, vzhledem k pravosti úhlů $s_1 b_1 O_1 = c'_1 a'_1 p_1 = R$ jest $\overline{pa'} \parallel \overline{oa}$, kdež o značí střed kružnice K. Z toho plyne druhá, rovněž jednoduchá konstrukce površek dané plochy: třeba body p a o v rovinách π' a π vésti dvé rovnoběžek, pak spojnice jejich průsečíků a' a a s kružnicemi K' a K jest žádaná površka. Z toho však zřejmo, že



Obr. 1.

4. každá površka dané plochy protíná přímku $\overline{op}$ a poněvadž táž leží v rovině souměrnosti dané plochy, vidno, že:

5. přímka $\overline{op}$ jest dvojnou přímkou dané sborcené plochy.

Přímka $\overline{ao}$ protíná však K ještě v bodě ${}^1a$, i jest též $\overline{{}^1aa'} \equiv {}^1A$ povrchová přímka uvažované plochy, z čehož vyplývá, že

6 kterákoli rovina dvojnou přímkou $\overline{op}$ plochy vedená protíná touž ještě ve dvou přímkách, protínajících se na kružnici K'; jest tedy K' dvojnou křivkou dané plochy.

Z dosud uvedeného vidno, že danou sborcenou plochu možno též určiti přímkou $\overline{op}$ a kružnicemi K a K' co útvary řídícími, z kteréhož určení následuje, že daná plocha je stupně čtvrtého, protože kružnice K a K' mají dva úběžné imaginární body společny a přímka $\overline{op}$ seče kružnici K'.

Abychom vyšetřili řídící kužel dané sborcené plochy, sestrojme půdorys A_1 libovolné površky A prvým způsobem, (obr. 1. $\overline{o_1 a_1} \perp \overline{s_1 a_1'}$, $\overline{o_1 a_1} \times K_1 \equiv a_1$, $\overline{a_1 a'_1} \equiv A_1$), dále sestrojme kružnici $L \cong K_1$ a této se v bodě s_1 dotýkající a označme střed její písmenou l. Učiníme-li ještě $\overline{a_1 b_1} = \overline{b_1 d_1}$ a prodloužíme-li přímku $\overline{a_1 s_1}$ až k průsečíku t s kružnicí L, pak

$$\overline{s_1 a_1} \# \overline{d_1 a'_1} \# \overline{t s_1},\ \overline{a_1 a'_1} \# \overline{s_1 d_1},\ \overline{s_1 a'_1} \# \overline{t d_1} \perp \overline{l t}.$$

Ježto $\overline{lt}$ je poloměr kružnice L, jest $\overline{td_1}$ tečnou téže křivky a bod d_1 bodem úpatnice kružnice L pro pól o_1. Poněvadž však možno $\overline{s_1 d_1}$ pokládati za půdorys přímky rovnoběžně k površce A bodem s vedené a bod d za její půdorysnou stopu, vidno, že

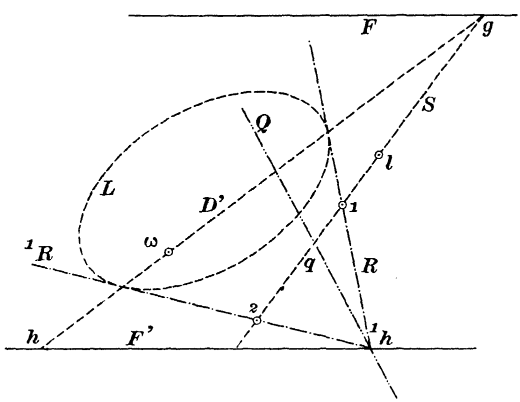
7. **půdorysná stopa řídícího kužele dané plochy, jehož vrchol je v bodě s, je úpatnicí kružnice L shodné s K a této se v bodě s_1 dotýkající pro střed o kružnice K co pól.**

Površky A a ${}^1A$ dané plochy možno též obdržeti, jak ze znázorňujícího obr. 1ª patrno, co průsečnice roviny $\sigma \equiv (Dp)$ s tečnými rovinami ϱ a ${}^1\varrho$ kužele (Kc') podél jeho povrchových přímek $\overline{c'a}$ a $\overline{c'{}^1a}$ procházejících koncovými body a a ${}^1a$ průměru D kružnice K.

8. **I možno danou plochu vytvořiti dvěma projektivními svazky rovinovými, z nichž jeden je prvé, druhý druhé třídy.**

Tohoto způsobu vytváření dané plochy možno užíti k sestrojení řezu dané plochy s danou rovinou φ. Protínáť rovina φ kužel $(c'K)$ v kuželosečce L (obr. 2.), roviny π a π' v přímkách F a $F' \parallel F$ a roviny (Dc') a σ v přímkách D' a S protínajících se s přímkou F v témž bodě g, průsečíku to přímky D s φ. Vyhledejme ještě průsečíky ω a l přímek $\overline{c'o}$ a P s rovinou φ (ω jest pólem přímky F' vzhledem k L, protože $\overline{c'o}$ jest průměr kužele $(c'K)$ příslušný rovině π'); pak přímka D' jdoucí bodem ω protíná kuželosečku L v bodech, jichž tečny R a ${}^1R$, protínající se v bodě ${}'h$ na F', jsou totožny s průsečnicemi rovin ϱ

a $^1\varrho$ s rovinou φ a protínají tudíž přímku S v bodech 1, 2 hledané průsečné křivky U. Dána-li v rovině φ přímka Q a je-li vyhledati průsečíky této s křivkou U, uvažme, že řada pólů F (^1h . . .) jest projektivná se svazkem polár ω (D' . . .), kterýž svazek je perspektivný se svazkem l (S. . .); proto je i řada Q (q . . .), již tento svazek na přímce Q vytýká projektivní s řadou F (^1h . . .), z čehož vidno, že spojnice $\overline{q^1h}$ vytvořují



Obr. 2.

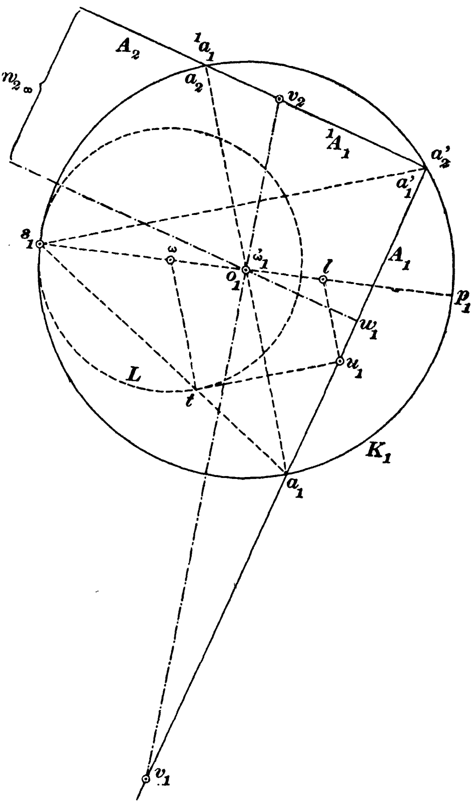
svazek druhé třídy, obalující kuželosečku x, jejíž společné tečny s křivkou L, jichž jest čtvero, protínají přímku Q v hledaných bodech křivky U. Z toho vyplývá, že

9. kterákoli přímka Q seče danou plochu ve čtyřech bodech, čímž podán nový důkaz, že daná sborcená plocha jest stupně čtvrtého.

Z právě odvozeného sestrojení křivky U dospěli bychom jednoduchou úvahou k výsledku, že

10. roviny rovnoběžné s π protínají danou plochu v závitnicích Pascalových.

K témuž výsledku však můžeme dospěti následní, pro další výhodnou cestou: Na půdorysu A_1 (obr. 3.) libovolné površky dané plochy vytkněme bod u_1 dělící úsečku $\overline{a_1 a'_1}$ v poměru $m : n$. Bod u_1 jest půdorysem jednoho bodu průsečné křivky dané plochy s rovinou φ rovnoběžnou s π a dělící vzdálenost rovin π a π' v poměru $m : n$. Označme průsečík osy O s rovinou φ písmenou ω', veďme $\overline{u_1 t} \parallel \overline{a'_1 s_1}$ až k průsečíku t s přímkou $\overline{a_1 s_1}$ a body t a u_1 rovnoběžky $\overline{t\omega} \parallel \overline{u_1 l} \parallel \overline{a'_1 \omega'_1}$. Jejich průsečíky l a ω s průměrem $\overline{s_1 p_1}$ dělí úsečky $\omega'_1 p_1$ a $\omega'_1 s_1$ rovněž



Obr. 3.

v poměru $m : n$, a jsou proto, probíhá-li přímka A plochu, body pevnými. Bod t popisuje při tom kružnici L o středu ω a poloměru $\overline{\omega t}$ a bod u_1 půdorys U_1 průsečné křivky U roviny φ s danou plochou, úpatnici to kružnice L pro pól l. Jeť vzhledem k souměrnosti dle osy $\overline{a_1 \omega'_1}$ úhel $l u_1 t = u_1 t \omega = R$ a tudíž $\overline{u_1 t}$ tečnou kružnice L.

Průsečíkem s' přímek $\overline{t\omega}$ a $\overline{ls'} \parallel \overline{u_1 t}$ jde normála křivky U_1 příslušná bodu u_1 *); pro dělící poměr 1 : 2 spadne však bod l na kružnici L a úhel lts_1 co obvodový nad průměrem jest pravý. Proto i jemu dle $\overline{a_1 \omega'_1}$ souměrný úhel $s'v_1 a'_1$ jest $= R$. V tomto případě půdorys A_1 kterékoli přímky A dané plochy dotýká se půdorysu průsečné křivky.

11. I jest půdorysný obrys dané plochy rovinný, ležící v rovině rovnoběžné s π a dělící vzdálenost rovin π a π' v poměru 1 : 2; protože pól l spadá na příslušnou kružnici L, jest uvažovaný obrys kardioidou C.

Prodlužme $\overline{a_1 o_1}$ až k průseku ${}^1a_1$ s kružnicí K_1, pak $\overline{a'_1 {}^1a_1}$ jest též co průmět druhé, bodem a' procházející površky ${}^1A$ tečnou kardoidy C_1 **), avšak přímku $\overline{a'_1 {}^1a_1}$ možno považovati za centrálný průmět A_2 površky A na rovinu π' ze středu ${}^1o$ úsečky $\overline{oo'}$ omezené oběma středy kružnic K a K'. Je tedy pro střed ${}^1o$ centrálný obrys plochy na rovině π' kardioida ${}^1C_2 \backsimeq C$. Označíme-li w_2 úběžný bod průmětu A_2, pak dvojpoměr $(a'_2 a_2 v_2 w_2) = -2$, kdež v_2 značí dotyčný bod přímky A_2 s kardioidou ${}^1C_2$; poněvadž však bod w_1 co půdorys onoho bodu přímky A, který (leží v rovině rovnoběžné s π a procházející bodem ${}^1o$) rozpoluje úsečku $\overline{aa'}$ i půlí její průmět $\overline{a_1 {}^1a_1}$, jest vzhledem k danému dvojpoměru, rovnému $(a'_1 a_1 v_1 w_1)$, $\overline{a'_1 v_1} = \overline{a'_1 a_1}$, z čehož vidno, že

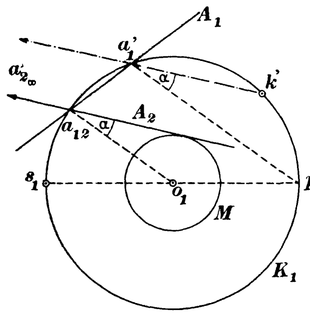
12. skutečný obrys ${}^1C$ dané plochy pro střed ${}^1o$ úsečky oo jest kardioida trojnásobné velikosti kardioidy C v rovině rovnoběžně s π bodem s vedené. Bod s jest jejím bodem úvratu.

Neméně zajímavy jsou obrysy dané plochy s bodů dvojné křivky K'. Sestrojme si druhým způsobem půdorys A_1 libovolné površky A $[\overline{o_1 a_1} \parallel \overline{p_1 a'_1}\ ;\ \overline{a_1 a'_1} \equiv A_1]$ a (obr. 4.) promítněme tuto s bodu k' kružnice K' do roviny π. Centrálný průmět A_2 pro-

*) Jarolímek-Procházka: Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické, str. 347.

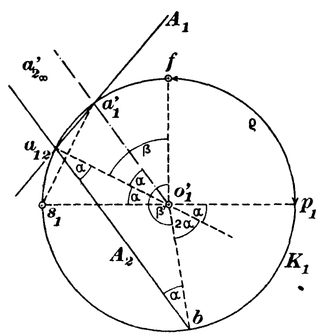
**) Úhel $a_1 a'_1 {}^1a_1 = R$, z čehož vidno, že K_1 jest orthoptický kruh (sr. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven p. 30.) kardioidy C_1. Každá tečna je jím rozdělena na dvě úsečky v poměru 1 : 2, jak z předchozího odstavce plyne.

chází stopou a přímky A na rovině π a jest rovnoběžný se spojnicí $\overline{a'_1 k'}$. Ale úhel $k'a'_1 p_1 = \alpha$ jest co obvodový nad stálým obloukem $\widehat{k'p_1}$ stálý, proto je i úhel, který svírá A_2 s poloměrem $\overline{a_1 o_1}$, stálý, rovný α. Obalují tedy veškery průměty po-



Obr. 4.

vršek dané plochy na rovinu π z bodu k'_1 kružnici M. soustřednou s K'_1, z čehož vidno, že:



Obr. 5.

13. kužely dané ploše s bodů dvojné kružnice K opsané jsou druhého stupně.

V obr. 5. sestrojen půdorys A_1 libovolné površky načež sestrojen centrálný obraz A_2 téže površky na rovinu π pro střed o' kružnice K' co centrum promítání. (A_2 bodem a_1 rovnoběžně k $a_1 o'_1$.) Úhel $a_1 o'_1 s_1$ označen písmenou α a vyhledány body f a b, průsečíky to přímek $\overline{o'_1 f} \perp \overline{s_1 o'_1}$ a A_2 s kružnicí K_1.

Jak z obrazu vidno, je úhel $\beta = fo'_1 a_1 = R - \alpha$ a úhel $\beta' = fo_1 b = 3R - 3\alpha = 3\beta$; pohybují se tedy body a_1 a b v kružnici K_1 v témž směru rychlostmi poměru 1 : 3, obalují proto jejich spojnice A_2 epicykloidu o dvou úvratech, tak zvanou nefroidu, pro niž jest K_1 kružnicí opsanou. Promítáme-li danou plochu s obecného bodu osy O na rovinu kolmou k této, pak promítají se kružnice K a K' do dvou soustředných kružnic, v nichž pohybují se průměty bodů a a a v témž směru rychlostmi, jichž poměr jest 1 : 2, i obalují jejich spojnice, průměty to površek, evoluty Paskalových závitnic. (Pokrač.)

Strojení plochy druhého stupně za podmínky dotyku čtyřbodového s kuželosečkou.

Napsal dr. **Jos. Kounovský.**

1. Pro sestrojení plochy druhého stupně dané devíti body byla podána celá řada konstrukcí, hlavně pro případ zcela obecné polohy daných bodů, t. j. takové, kdy dá se vždy toliko třemi danými body položiti rovina.

Chceme v následujícím řešiti speciální konstrukce plochy stupně druhého $\mathbf{P}^2$, do jejíhož určení devíti body vchází podmínka čtyřbodového dotyku dané kuželosečky v daném bodě. Patrně řez plochy $\mathbf{P}^2$ rovinou dané kuželosečky musí s ní v bodě daném míti tento čtyřbodový dotyk a byl by dalším pátým bodem určen. Uvažovaná oskulace vyššího stupně nahrazuje tudíž čtyři body dané v téže rovině; dalších pět prvků dlužno ještě voliti. Jako zvláštní případ vystupuje pak úloha sestrojiti plochu druhého stupně procházející daným bodem a dotýkající se dvou daných kuželoseček v daných bodech dotykem čtyřbodovým.

Všecky známé konstrukce plochy $\mathbf{P}^2$ neřeší problém všeobecně, mnohé omezují se na úlohu, určiti na paprsku jedním z devíti daných bodů procházejícím druhý jeho průsečík s danou plochou. Nejvšeobecnější řešení určuje prostorovou soustavu polární, jejíž plochou direkční jest daná $\mathbf{P}^2$.