Vilém Jung

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených). [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 5, 230--235

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123080`

neboť nejen různí se jménem, které jest libovolno, ale různí se i rodem dle téže definice; poněvadž nedělitelno, násobeno souc kolikrátkoli chceme, je tak daleko toho, moci převyšovati rozlehlosť, že nemůže nikdy tvořiti než jedno a jediné nedělitelno, což jest přirozeno a nutno, jak jsme již ukázali. A poněvadž tento poslední důkaz zakládá se na definici oněch dvou věcí, nedělitelna a rozlehlosti totiž, ukončíme a shrneme demonstraci.

Nedělitelno je to, co nemá částice, a rozlehlosť je to, co má různé části oddělené.

(Dokončení.)

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených).

Podává

Vilém Jung,

s. professor při státní průmyslové škole v Brně.

(Pokračování.)

9. *Elliptická involuce na povrchové přímce plochy mimosměrek, její centrum a parametr; strikční křivka.*

Znamenejž

$$\begin{vmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = D, \quad \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = d,$$

$$^{k/4}D = D_k, \quad \text{na př.:} \quad \begin{vmatrix} A'_4 & A'_2 & A'_3 \\ A_4 & A_2 & A_3 \\ a_4 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = {}^{1|4}D = D_1,$$

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_k & D \\ a_k & d \end{vmatrix} = \beta_k, \quad \begin{vmatrix} A_k & D_i \\ a_k & d_i \end{vmatrix} = \gamma_{ki}, \quad \begin{vmatrix} D_k & D \\ d_k & d \end{vmatrix} = \delta_k.$$

Znamenejtež nyní x, y, z plynulé souřadnice bodů tečné roviny, x_1, y_1, z_1 souřadnice bodu dotyčného. Rovnice tečné roviny v bodě $(x_1 y_1 z_1)$ přímky (t) zní

$$\begin{vmatrix} A\,(xyz), & A'\,(x_1\,y_1\,z_1) \\ a\,(xyz), & a'\,(x_1\,y_1\,z_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Vyloučením veličin y_1, z_1 pomocí rovnic

$$A(x_1 y_1 z_1) = 0, \quad a(x_1 y_1 z_1) = 0$$

obdržíme pro rovinu tečnou

$$\begin{vmatrix} A(xyz), & Dx_1 + D_1 \\ a(xyz), & dx_1 + d_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvineme-li tento vzorec, máme pro tečnou rovinu rovnici

$$(\beta_1 x_1 + \gamma_{11})x + (\beta_2 x_1 + \gamma_{21})y + (\beta_3 x_1 + \gamma_{31})z + \beta_4 x_1 + \gamma_{41} = 0;$$

pro asymptotickou rovinu platí $x_1 = \infty$, pročež její rovnicí jest

$$\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 = 0.$$

Pro rovinu tečnou v bodě $(x_2 y_2 z_2)$ máme rovnici

$$(\beta_1 x_2 + \gamma_{11})x + (\beta_2 x_2 + \gamma_{21})y + (\beta_3 x_2 + \gamma_{31})z + \beta_4 x_2 + \gamma_{41} = 0.$$

Aby tečné roviny v bodech $(x_1 y_1 z_1)$ a $(x_2 y_2 z_2)$ byly k sobě kolmy, musí

$$\sum_1^3 [\beta_k x_1 + \gamma_{k1}) \cdot (\beta_k x_2 + \gamma_{k1})] = 0,$$

t. j. $$x_1 x_2 \sum_1^3 \beta_k^2 + (x_1 + x_2) \sum_1^3 \beta_k \gamma_{k1} + \sum_1^3 \gamma_{k1}^2 = 0.$$

Poslední rovnice znamená, že průmět řady dotyčných bodů na přímce (t) tečných rovin, k sobě kolmých, do osy X-ové jest v involuci 2-ho stupně, proto i řada na přímce (t) jest v involuci 2-ho stupně.

Budiž $$a x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0$$

analytickým výrazem pro jistou involuci 2-ho stupně, pak má její centrum souřadnici

$$x = -\frac{b}{a},$$

a parametr jest určen rovnicí

$$p^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}.$$

Značí-li ξ, η, ζ souřadnice centra involuce na přímce (t), platí dle toho

$$\xi = -\frac{\sum_1^3 \beta_k \gamma_{k1}}{\sum_1^3 \beta_k^2} = -\frac{\lambda_1}{\nu}, \qquad \eta = -\frac{\sum_1^3 \beta_k \gamma_{k2}}{\sum_1^3 \beta_k^2} = -\frac{\lambda_2}{\nu},$$

$$\zeta = -\frac{\sum_1^3 \beta_k \gamma_{k3}}{\sum_1^3 \beta_k^2} = -\frac{\lambda_3}{\nu}.$$

Těmito rovnicemi jsou určeny souřadnice centra involuce na přímce (t) jakožto funkce parametru t.

Budiž (X, Y, Z) dotyčný bod roviny centralné, přímkou (t) stanovené.

Poněvadž jest rovina centralná kolmá k rovině asymptotické, platí následující vzorce:

$$\sum_1^3 [(\beta_k X + \gamma_{k1}) \beta_k] = 0,$$

$$\sum_1^3 [(\beta_k Y + \gamma_{k2}) \beta_k] = 0,$$

$$\sum_1^3 [(\beta_k Z + \gamma_{k3}) \beta_k] = 0.$$

Z toho obdržíme pro souřadnice dotyčného bodu roviny centralné:

$$X = -\frac{\sum_1^3 \beta_k \gamma_{k1}}{\sum_1^3 \beta_k^2}, \quad Y = -\frac{\sum_1^3 \beta_k \gamma_{k2}}{\sum_1^3 \beta_k^2}, \quad Z = -\frac{\sum_1^3 \beta_k \gamma_{k3}}{\sum_1^3 \beta_k^2}.$$

Avšak z předešlého patrno, že $X = \xi$, $Y = \eta$, $Z = \zeta$; t. j. dotyčný bod roviny centralné jest totožný s centrem involuce na příslušné přímce povrchové.

Geometrické místo středů involuce na všech povrchových přímkách nazývá se *strikční křivkou* plochy.

Má-li plocha mimosměrek řídící rovinu, jest její strikční křivkou dotyčná křivka válcové plochy, opsané ploše mimosměrek kolmo k rovině řídící.

Po krátké redukci plyne pro parametr průmětu involuce na ose

$$X \ldots p_x^2 = -\frac{\sum_1^3 \alpha_k^2}{\left(\sum_1^3 \beta_k^2\right)^2} \delta_1^2, \quad Y \ldots p_y^2 = -\frac{\sum_1^3 \alpha_k^2}{\left(\sum_1^3 \beta_k^2\right)^2} \delta_2^2,$$

$$Z \ldots p_z^2 = -\frac{\sum_1^3 \alpha_k^2}{\left(\sum_1^3 \beta_k^2\right)^2}\delta_3^2.$$

Pro parametr involuce na přímce (t) pak máme:

$$p^2 = -\frac{\sum_1^3 \alpha_k^2 \cdot \sum_1^3 \delta_k^2}{\left(\sum_1^3 \beta_k^2\right)^2},$$

z čehož patrno, že jest tato involuce elliptickou.

Ježto ale

$$\frac{\cos(tx)}{\alpha_1} = \frac{\cos(ty)}{\alpha_2} = \frac{\cos(tz)}{\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^3 \alpha_k^2}},$$

a položíme-li $\quad \sum_1^3 \alpha_k^2 = \mu, \quad \sum_1^3 \beta_k^2 = \nu,$

obdržíme: $\quad p\sqrt{-1} = \frac{\mu}{\nu}\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{\mu}{\nu}\frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{\mu}{\nu}\frac{\delta_3}{\alpha_3}.$

Mějme na mysli libovolný bod $m(x_1, y_1, z_1)$ na přímce (t), a budiž $c(\xi, \eta, \zeta)$ centrem involuce.

Pak možno psáti:

$$\overline{mc} = \frac{(x_1 - \xi)}{\cos(tx)} = \frac{x_1 \sum_1^3 \beta_k^2 + \sum_1^3 \beta_k \gamma_{k1}}{\sum_1^3 \beta_k^2} \cdot \frac{\sqrt{\sum_1^3 \alpha_k^2}}{\alpha_1} = \frac{\nu x_1 + \lambda_1}{\nu} \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{\alpha_1}.$$

Budiž ψ úhel tečné roviny v bodě $(x_1 y_1 z_1)$ s rovinou asymptotickou, tak že máme:

$$\cos\psi = \frac{\sum_1^3 (\beta_k x_1 + \gamma_{k1})\beta_k}{\sqrt{\sum_1^3 (\beta_k x_1 + \gamma_{k1})^2}\sqrt{\sum_1^3 \beta_k^2}} = \frac{\nu x_1 + \lambda_1}{\sigma},$$

$$\sin\psi = \sqrt{1 - \cos^2\psi} = \frac{\sqrt{\nu \sum_1^3 (\gamma_{k1}^2) - \lambda_1^2}}{\sigma},$$

avšak

$$\nu \sum_1^3 (\gamma_{k1}^2) - \lambda_1^2 = (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{31}^2)\,\nu - \lambda_1^2$$
$$= (\beta_1 \gamma_{21} - \beta_2 \gamma_{11})^2 + (\beta_2 \gamma_{31} - \beta_3 \gamma_{21})^2 + (\beta_3 \gamma_{11} - \beta_1 \gamma_{31})^2,$$
$$\beta_1 \gamma_{21} - \beta_2 \gamma_{11} = \begin{vmatrix} A_1 & D \\ a_1 & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2 & D_1 \\ a_2 & d_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_2 & D \\ a_2 & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_1 & D \\ d_1 & d \end{vmatrix} = -\alpha_3 \delta_1,$$

proto

$$\cot \psi = \frac{\nu x_1 + \lambda_1}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \cdot \delta_1^2}} = \frac{\nu x_1 + \lambda_1}{\delta_1 \sqrt{\mu}}.$$

Tak že obdržíme:

$$p \sqrt{-1} \cot \psi = \frac{\nu x_1 + \lambda_1}{\nu} \frac{\sqrt{\mu}}{\alpha_1} = \overline{mc};$$

zavedeme-li úhel φ roviny tečné s centralnou rovinou, t. j. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, dospějeme ku známé větě

$$\overline{mc} = p \sqrt{-1} \operatorname{tg} \varphi.$$

Odvození její stalo se tu jen mimochodem způsobem vzhledem ku její jednoduchosti příliš obšírným.

Velmi jednoduše odvodíme tuto větu následovně:

Budiž: Rovina asymptotická A, bod dotyčný a_∞,
„ centralná C, „ „ c,
„ tečná M, „ „ m,
„ „ M′, „ „ m'.

Bod dotyčný roviny centralné jest centrem involuce. Vzdálenosť tohoto centra od dotyčného bodu tečné roviny, půlící pravý úhel roviny asymptotické a centralné, udává nám prostou hodnotu parametru involuce.

Svazek tečných rovin jest projektivný s řadou bodů dotyčných, proto

$$(MM'CA) = (mm'ca_\infty) = (mm'c).$$

Ježto C $\perp$ A, platí

$$\sphericalangle(MC) = \varphi, \quad \sphericalangle(MA) = \varphi - \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle(M'C) = \varphi',$$
$$\sphericalangle(M'A) = \varphi' - \frac{\pi}{2},$$

bude: $$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} : \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{\overline{mc}}{\overline{m'c}},$$

čili $$\operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\overline{mc}}{\overline{m'c}},$$

t. j. $$\frac{\overline{mc}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\overline{m'c}}{\operatorname{tg}\varphi'} = \text{Const.}$$

Pro $\varphi = \frac{\pi}{4}$ jest dle definice předeslané $\overline{mc} = p$; a ježto $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, platí obecně

$$\frac{\overline{mc}}{\operatorname{tg}\varphi} = p, \quad \text{čili} \quad \overline{mc} = p \operatorname{tg}\varphi.$$

(Dokončení.)

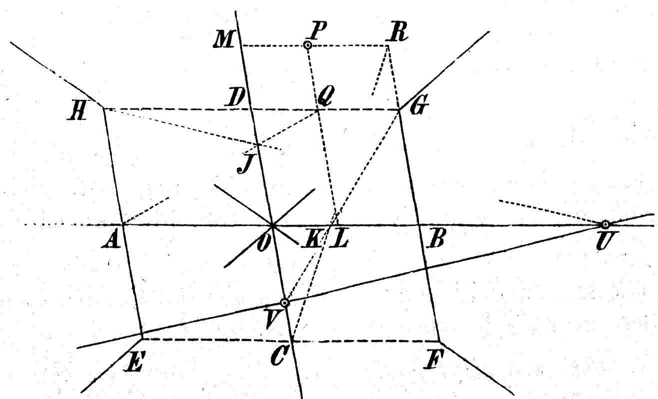
Sestrojení polár kuželoseček.

Žákům středních škol podává

Josef Novotný,
professor v Přerově.

(Dokončení.)

6. *Jest sestrojiti poláru bodu P k hyperbole, objeví-li se průsečíky s dvojinou sdružených průměrů na nákresně.*



Obr. 5.

Sestrojení. Bodem P (obr. 5) sestrojme rovnoběžky se sdruženými průměry, ty protnou bližší strany opsaného rovnoběž-