Ku konci praví autor, že dle jeho mínění přísluší účinek hlavně paprskům fialovým.

Roztažívosť rtuti mezi 0° a —39°C.

(*Ayrton and Perry, Phil. Mag. 22, p. 325., 1886.*)

Ježto se užívá teploměrů rtuťových i při měření temperatury níže 0°, jest důležito věděti, stahuje-li se rtuť úměrně temperatuře při ochlazování od 0° do bodu, kde se stává tuhou. Autoři zabývali se rozřešením této otázky i shledali, že stahování rtuti mezi 0° a —39° děje se zcela rovnoměrně (?), tak že křivka odpovídající změně objemu při různých temperaturách jest tu přímkou.

Nový způsob pozorování působení magnetu na kapaliny.

(*S. T. Morehead, Amer. Journ. of Science 34, p. 227., 1887.*)

Při demonstracích pokusů s diamagnetickými kapalinami dospěl autor ku následujícímu způsobu, který se liší od provedení Plückerova, zejména citlivostí svou. (Plücker naléval kapaliny na sklíčko hodinkové a stavil je na poly silného magnetu.) Kapalina nalévá se v malém množství do rourky skleněné od 4—5 *mm* vnitřního průměru, tak že tvoří krátký váleček. Rourka ta klade se horizontalně a mimo to kolmo ku silokřivkám co možná blízko k polům. Uzavře-li se proud magnetisaci způsobující, odpuzuje se zcela patrně kapalina v rouře; voda na př. odpuzuje se přibližně na $\frac{1}{2}$ *cm*, dřevěný líh (alkohol methylový) ještě dále. Tímto způsobem možno demonstrovati právě tak snadno i paramagnetismus kapalin.

Úlohy.

Řešení úlohy 13.

(Zaslal p. *Jos. Nosek,* stud. VIII. tř. g. v Jičíně.)

Nazveme-li poloměr koule r, výšku kužele v, stranu s a poloměr kruhové základny ϱ, jest povrch kužele

$$P = \pi\varrho^2 + \pi\varrho s;$$

z dané podmínky plyne úměra

$$v : (2r - v) = \pi\varrho s : \pi\varrho^2$$

aneb $2r : (2r - v) = \mathrm{P} : \pi v\,(2r - v)$,
tudíž $\mathrm{P} = 2\pi r \,.\, v$,
a rovná se tudíž povrch kužele vrchlíku kuželi opsanému.

Ježto $\varsigma^2 = v\,(2r - v)$, $s^2 = 2rv$,
obdržíme z prvé úměry $v^2 = 2r\,(2r - v)$,
z kteréž rovnice patrno, že základna kužele dělí k ní kolmý průměr koule zlatým řezem.

Řešíme-li poslední rovnici, obdržíme $v = r\,(-1 + \sqrt{5})$

a konečně $\mathrm{P} = 2\pi r^2\,(-1 + \sqrt{5}) = \frac{p}{2}\,(-1 + \sqrt{5})$.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Lubomír Čáp* z VIII. tř. a *Jaroslav Fridrich* ze VII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Otakar Trnka* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Aug. hrabě Wodzicki* v Kościelnikách, *Boh. Novák* z VIII. tř. g. v Táboře, *Jaroslav Chládek* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Josef Smrt* z VIII. tř. g. v Písku, *Jind. Balcar* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Ant. Doležal* z VIII. tř. a *Arnošt Rosa* ze VI. tř. g. v Chrudimi, *Karel Pagán* z VIII. tř. g. ve Slaném a *Frant. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 14.

(Podal p. *Jind. Balcar,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Poloměr základny při kuželi K budiž r, výška kužele v; potom jest obsah jeho

$$\mathrm{K} = \frac{1}{3}\,\pi r^2 v,$$

a ježto kužele K, K_1 jsou tělesa sobě podobná, jest

(1) $\mathrm{K} : \mathrm{K}_1 = \overline{tm}^3 : \overline{tn}^3 = 1 : \lambda^3$.

Bez porušení obecnosti můžeme předpokládati $tn < tm$, tedy $\lambda < 1$.

Abychom vyšetřili obsah kužele K′, položme $\sphericalangle \mathrm{MO} = \mathrm{R} - \alpha$; základna kužele K′ buď od základny K odchýlena o úhel $\beta < \alpha$. Jsou-li $2a$, $2b$ osy elliptické základny kužele K′, jest

$$2a = \overline{mn} = \frac{2r \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

protíná-li pak rovina, položená středem o ellipsy kolmo ku O, přímky M, N v bodech k, t, jest

$$b = \sqrt{\overline{ok}\,.\,\overline{ol}} = \sqrt{\frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha} \cdot \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}}$$

čili
$$b = r\sqrt{\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}}.$$

Poněvadž pak výška kužele K′

$$v' = \frac{v \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha},$$

jest obsah jeho

$$K' = \frac{1}{3}\pi a b v' = \frac{1}{3}\pi r^2 v \sqrt{\left[\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}\right]^3};$$

povšimneme-li však sobě, že jest

$$\overline{tn} : \overline{tm} = \sin(\alpha - \beta) : \sin(\alpha + \beta) = \lambda,$$

poznáváme, že

$$\text{(2)} \qquad K' : K = \sqrt{\lambda^3} : 1$$

a srovnáním úměr (1), (2) obdržíme ještě

$$\text{(3)} \qquad K : K' = K' : K_1.$$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi a *Jaroslav Chládek* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.

Řešení úlohy 15.

(Zaslal p. *Karel Kilingr,* stud. VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.)

Normální tvar rovnice kružnice jest

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + t^2 = 0,$$
$$t^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

kdež veličiny α, β, t a r mají význam známý.

Podmínečnou rovnici, aby přímka procházející počátkem, a jejíž odchylka od osy úseček jest φ, dotýkala se kružnice, lze psáti ve tvaru

$$t = \pm(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi),$$

jak se o tom promítnutím klikaté čáry do tečny snadno lze přesvědčiti.

Má-li se tedy kružnice dotýkati osy Y, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, a $t = \pm\beta$, $t^2 = \beta^2$, a tudíž $\alpha^2 = r^2$; aby se dále kružnice dotýkala přímky $72x + 65y = 0$,

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{72}{65}, \quad \cos\varphi = \pm\frac{65}{97}, \quad \sin\varphi = \mp\frac{72}{97},$$

$$t = \pm\left(\pm\frac{65}{97}\alpha \mp \frac{72}{97}\beta\right),$$

a dosadíme-li sem za $t = \pm\beta$, obdržíme

$$\beta = \pm\frac{65}{97}\alpha \mp \frac{72}{97}\beta,$$

odkudž plyne $$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{5}{13}, \ -\frac{13}{5}.$$

Poslední podmínkou jest, že kružnice má procházeti bodem (0,1), tedy

$$\beta^2 - 2\alpha + 1 = 0,$$

kteráž rovnice spojena s předešlou dává řešení

$$\alpha = r = 13, \ \frac{13}{25}, \ \frac{5(5\mp 2i\sqrt{11})}{13^2}, \quad \beta = 5, \ \frac{1}{5}, \ \frac{-5\pm 2i\sqrt{11}}{13},$$

tak že rovnice realných kružnic jsou:

$$(x-13)^2 + (y-5)^2 = 13^2,$$

$$\left(x-\frac{13}{25}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{13}{25}\right)^2.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Ladislav Tachecí* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze, *Jos. Stryhal* z VIII. tř. g. v Novém Bydžově, *Ant. Doležal* z VIII. tř., *Frant. Palata*, *Miloslav Jičínský* ze VII. tř. a *Arnošt Rosa* ze VI. tř. g. v Chrudimi, *Jar. Sobotka* z VIII. tř., *Václav Felix* a *Jar. Chládek* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Bohumil Novák* z VIII. tř. g. v Táboře, *Aug. hrabě Wodzicki* v Kościelnikách, *Jind. Balcar* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *D. Hříbal* z VIII. tř. g. v Domažlicích a *Frant. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 16.

(Podal p. *Arnošt Rosa*, stud. VI. g. v Novém Bydžově.)

Je-li rovnice ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

jest rovnice tečný

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2,$$

tudíž úseky na osách $\frac{a^2}{x_1}$, $\frac{b^2}{y_1}$, a osami a tečnou omezený trojúhelník $$\triangle = \frac{a^2b^2}{2x_1y_1}.$$

Z podminečné rovnice

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$

a předcházející obdržíme vyloučením y_1

$$x_1^4 - a^2x_1^2 + \frac{a^6b^2}{4\triangle^2} = 0,$$

tedy $$x_1^2 = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4(\triangle^2 - a^2b^2)}{4\triangle^2}}.$$

z čehož patrno, že mimimum $\triangle$ nastane, je-li $\triangle = ab$; dále $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{b}{\sqrt{2}}$ a směrnice tečny $= -\frac{b}{a}$, t. j. tečna jest rovnoběžna ku přímce, jež koncové body velké a malé osy spojuje.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Bohumil Novák* z VIII. tř. g. v Táboře, *Jind. Balcar* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Ant. Doležal* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Ladislav Tachecí* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze, *Josef Smrt* z VIII. tř. g. v Písku a *Jaroslav Chládek* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.

Řešení úlohy 17.

(Podal p. *Bohumil Novák*, stud. VIII. tř. g. v Táboře.)

Jsou-li $(x_1 y_1)$ a $(x_2 y_2)$ souřadnice průsečíků přímky s parabolou, jejíž vrcholová rovnice jest

$$y^2 = 2px,$$

plyne z dané podmínky, že

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{k}, \text{ tedy } \frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{1}{k}\right)^2$$

a směrnice přímky

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1}{x_1(k+1)}.$$

Z těchto rovnic vypočteme

$$x_1 = \frac{2p}{(1+k)^2 tg^2\alpha}, \quad y_1 = \frac{2p}{(1+k)\,tg\alpha}$$

a najdeme ze známého vzorce výraz pro plochu úseče

$$\frac{1}{6}(k-1)^3 x_1 y_1$$

a konečně $$\frac{2}{3}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^3 \frac{p^2}{tg^3\alpha}.$$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Arnošt Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově a *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 18.

(Podal p. *Boh. Novák* z VIII. tř. g. v Táboře.)

Dány jsou shodné paraboly P_1, P_2 o společném vrcholu o; jich osy O_1, O_2 svírají úhel α. Zvolíme-li o počátkem soustavy pravoúhlé, O_1 pak osou úseček, bude rovnice paraboly P_1

(1) $$y^2 = 2px.$$

Obě paraboly protínají se mimo počátek v bodě $m(x_1, y_1)$, který leží na přímce M půlící úhel α; píšeme-li rovnici její

(2) $$y = Ax,$$

jest
$$A = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Z rovnic (1), (2) vypočítáme souřadnice bodu m
$$x_1 = \frac{2p}{A^2}, \quad y_1 = \frac{2p}{A}$$
a najdeme pak obsah plochy omezené oběma parabolami
$$\Pi = \frac{2}{3} x_1 y_1 = \frac{8p^2}{3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}.$$

V počátku o protínají se obě paraboly v úhlu α, v bodě m tvoří úhel $\varphi = 2(T_1M)$, značí-li T_1 tečnu sestrojenou k P_1 v bodě m. Směrnice této tečny jest
$$A_1 = \frac{A}{2},$$
a proto bude
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{A - A_1}{1 + AA_1} = \frac{A}{A^2 + 2},$$
aneb v jiné podobě
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\alpha}{3 + \cos\alpha}.$$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Jind. Balcar* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Aug.* hrabě *Wodzicki* v Kościelnikách, *Josef Smrt* z VIII. tř. g. v Písku a *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 19.

(Napsal *M. Lerch.*)

Výsledek obsažený v úloze 6. možno dle konvence právě učiněné vyjádřiti vzorcem

$$(1) \qquad \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \binom{\alpha}{\beta} \binom{x-\beta}{m} = \binom{x-\alpha}{m-\alpha},$$

a z tohoto máme

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \binom{x-\alpha}{m-\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \binom{x-\beta}{m} \sum_{\alpha=1}^{n} \binom{\alpha}{\beta}.$$

Číslo $\binom{\alpha}{\beta}$ je však součinitelem při x^{β} v rozvinutém polynomu pro mocnosť $(1+x)^{\alpha}$, a tedy bude $\sum_{\alpha=1}^{n} \binom{\alpha}{\beta} =$ koeff. při x^{β} ve výrazu $\sum_{\alpha=1}^{n} (1+x)^{\alpha} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1 - x}{x}$, a tedy má hodnotu $\binom{n+1}{\beta+1}$ pro $\beta > 0$, ale rovná se n pro $\beta = 0$, tudíž bude

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \binom{x-\alpha}{m-\alpha} = n \binom{x}{m} + \sum_{\beta=1}^{\infty} (-1)^{\beta} \binom{n+1}{\beta+1} \binom{x-\beta}{m};$$

součet v pravo lze však též psáti takto:

$$-\sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} \binom{n+1}{\alpha} \binom{x+1-\alpha}{m} + \binom{x+1}{m} - (n+1) \binom{x}{m}$$

což dle (1) má hodnotu

$$-\binom{x-n}{m-n-1} + \binom{x+1}{m} - n \binom{x}{m} - \binom{x}{m}$$

a odtud plyne přímo výsledek pronešený.

Řešení úlohy této zaslal p. *Boh. Novák* z VIII. tř. gymn. v Táboře.

Řešení úlohy 20.

(Zaslal p. *Lad. St. Rybka,* stud. VII. tř. r. v Brně.)

Rozbor. Danému trojúhelníku vepsaný lichoběžník budiž MNPQ. Jeho rameno MN nechť se nalézá v základně AB, vrchol P ve straně BC a vrchol Q ve straně AC. Úhlem ANP $= \alpha$ budiž stanoven směr základen MQ, NP a délky druhých dvou stran buďtež MN $= a$, PQ $= b$.

Vyšetříme-li polohu vrcholů P a Q ve stranách BC a AC, bude jimi a směrem základen vepsaný lichoběžník stanoven. Za účelem tím učiňme QR || MN a QR = MN. Trojúhelník PQR jest dvěma stranami QR = MN = a, PQ = b a úhlem QRP = MNP = α stanoven, a jen umístění jeho vrcholů dosud neznáme. Známým úhlem PQR, jehož rameno QR má týž směr jako základna AB, jest směr strany PQ určen. Učiníme-li AE || QP a AE = QP = b, bude EP || AQ. Vrchol P ve straně BC lze tedy vyšetřiti určitou přímkou EP rovnoběžně s AC vedenou. Známými vrcholy A, E, P jest určen čtvrtý vrchol Q rovnoběžníka AEPQ, který jest zároveň druhým vrcholem lichoběžníka MNPQ.

Sestrojení. Na základně AB učiňme AD = a, a vyrýsujme úhel ADE = α. Z vrcholu A jakožto středu poloměrem AE = AE′ = b sestrojený kruhový oblouk protne přímku DE ve dvou bodech E a E′. Přímka EP rovnoběžně s AC vedená protíná stranu BC v bodu P. Sestrojíme-li rovnoběžku PQ s přímkou AE, bude tato protínati stranu AC v bodu Q. Vedeme-li konečně PN a QN rovnoběžně s přímkou DE až ku základně AB, obdržíme hledaný vepsaný lichoběžník MNPQ.

Podobně lze vepsati do trojúhelníka ABC ještě druhý lichoběžník M′N′P′Q′ pomocí přímky E′P′ || AC.

Důkaz. Že základny MQ a NP jsou směru daného, jest patrno, neboť $\sphericalangle$ ANP = ADE = α, i zbývá nám dokázati, že MN = a, PQ = b.

Dle sestrojení jest v rovnoběžníku AEPQ

$$AE = PQ = b,$$

a poněvadž též

$$\sphericalangle RQP = DAE, \quad \sphericalangle QPR = AED,$$

jest $\triangle PQR \cong \triangle ADE$,

a proto $QR = AD = a.$

V rovnoběžníku MNRQ jest

$$QR = MN,$$

tedy dle rovnice předešlé

$$MN = a.$$

Podobně lze dokázati, že

$$P'O' = b \text{ a } M'N' = a.$$

Omezení. Lichoběžník MNPQ lze vždy obdržeti, když příčka jdoucí vrcholem C rovnoběžně s půdicemi lichoběžníka, jakož i trojúhelník ADE padnou do vnitř trojúhelníka ABC. Trojúhelník ADE′ nalézá se pak mimo trojúhelník ABC, a v tomto případě obdržíme lichoběžník M′N′P′Q′ jen tehdy, když trojúhelník BD_1E_1, který jest souměrně sdružen s trojúhelníkem ADE′ dle středu strany AB padne též do vnitř trojúhelníka ABC. Další případy lze snadno vyšetřiti.

Řešení úlohy této zaslali pp.: *V. Vodička* ze VII. tř. české v. r. v Praze, *Břetislav Tolman* ze VI. tř. a *Jind. Balcar* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Arnošt Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově, *Bohumil Novák* z VIII. tř. g. v Táboře, *Fr. Šoreys* ze VII. tř. a *Boh. A. Pavlousek* ze VI. tř. g. v Ml. Boleslavi, *Aug.* hrabě *Wodzicki* v Kościelnikách, *Frant. Palata* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Václav Felix* ze VII. tř. a *Jaroslav Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.

Řešení úlohy 21.

(Podal p. *Břetislav Tolman,* stud. VI. tř. v Hradci Králové.)

Budiž úhel CED $= \varphi$ a DE $=$ CE $= x$. V trojúhelnících CDE, BCE, ACE jest dle Carnotovy poučky

$$m^2 = 4x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$a^2 = 2x(2x + c) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{c^2}{4},$$

$$b^2 = 2x(2x - c) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{c^2}{4};$$

dosadíme-li hodnoty tyto do podmínky

$$m^2 = a^2 - b^2,$$

obdržíme po krátké redukci

$$x = c.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Aug.* hrabě *Wodzicki* v Kościelnikách, *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Václav Felix* a *Jaroslav Chládek* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Jind. Balcar* ze VII. tř. r. v Hradci Králové a *Arnošt Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově.

Řešení úlohy 22.

(Zaslal p. *Václav Felix,* stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.)

Pokládejme O za počátek a OD za osu X pravoúhlé soustavy souřadnic.

Tečna AC má rovnici

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - r = 0,$$

kdež $\sphericalangle DOA = \varphi$, a $OA = OD = r$.

Střed E strany AB má souřadnice

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad y_1 = 0.$$

Položíme-li do rovnice tečny AC, $x = r$, obdržíme souřadnice vrcholu C

$$x_2 = r, \quad y_2 = \frac{r(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Ježto $\frac{EM}{CM} = \lambda = -\frac{1}{2}$, bude bod M míti souřadnice

$$(1) \qquad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} = \frac{r(1+2\cos\varphi)}{3},$$

$$(2) \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} = \frac{r(1-\cos\varphi)}{3\sin\varphi}.$$

Z rovnic posledních můžeme vyloučiti úhel φ rovnicí

$$(3) \qquad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

a tím obdržíme rovnici měř. místa bodu M.

Dle rovnic (1) a (2) jest

$$\cos\varphi = \frac{3x-r}{2r}, \quad \sin\varphi = \frac{r(r-x)}{2ry}.$$

Dosadíme-li hodnoty tyto do rovnice (3), obdržíme snadnou redukcí $\quad r^2(r-x)^2 + 3y^2(x-r)(3x+r) = 0,$

odkudž

$$x - r = 0,$$

$$y^2 = \frac{r^2(r-x)}{3(3x+r)}.$$

Hledaná křivka jest stupně třetího, bod D jest jejím vrcholem a $3x - r = 0$ její asymptotou.

Řešení úlohy této zaslal též p. *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Roleslavi.

Řešení úlohy 23.

(Zaslal p. *Frant. Císař,* stud. VII. tř. r. vyš. r. g. na Malé Straně v Praze.)

1. Kružnice K′ opsaná trojúhelníku pravoúhlému ACP obsahuje vrchol B pravého úhlu CBP. Sestrojíme-li poloměry AO′, BO′ a středovou přímku OO′, která na společné tetivě AB obou kruhů stojí kolmo, bude

$$(1) \qquad \sphericalangle AO'O = \sphericalangle APB,$$

neboť každý z nich rovná se polovině úhlu středového AO'B. Vedeme-li ještě tetivu AM kolmo stojící na OP, bude v kružnici K dle známé věty o úhlech obvodových

$$\sphericalangle MNB = \sphericalangle MAB,$$

a protože AP a MN jsou spolu rovnoběžny, jest též

$$\sphericalangle MNB = \sphericalangle APB,$$

tedy $$\sphericalangle MAB = \sphericalangle APB. \qquad (2)$$

Dle (1) a (2) jest

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle AO'O,$$

a poněvadž ramena AB a OO' těchto sobě rovných úhlů stojí na sobě kolmo, jest AO' $\perp$ AM, a protože též OP $\perp$ AM, jest

$$AO' \parallel OP.$$

Že však CO' = PO', jest AC = OA.

2. Je-li tečna T stálá a tětiva MN proměnliva, pak vrchol B pravého úhlu CBN, jehož rameno BC otáčí se kolem stálého bodu C, jest proměnlivým bodem kružnice K, a proto obaluje proměnlivé rameno PN hyperbolu mající O za střed, A za vrchol a C za ohnisko. Přímka NP jest tedy tečnou této hyperboly, jak bylo dokázati.

Téhož výsledku lze se dodělati přímo použitím analytické geometrie. Budiž O počátkem a OA osou X pravoúhlé soustavy souřadnic. Rovnice tečny daného kruhu jest

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - r = 0,$$

kdež $\sphericalangle AOM = \varphi$ a OA = OM = r. Souřadnice bodů N a P jsou

$$x' = r\cos\varphi, \quad y' = -r\sin\varphi; \quad x'' = r, \quad y'' = \frac{r(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Přímka PN má rovnici

$$y + r\sin\varphi = \frac{\sin^2\varphi + 1 - \cos\varphi}{(1-\cos\varphi)\sin\varphi}(x - r\cos\varphi).$$

Přiměřeným upravením rovnice této obdržíme

$$\sin^2\varphi\,[(x-2r)^2 + y^2] - 2\sin\varphi\,(2x-r)y + 3(x^2-r^2) = 0.$$

Diskriminant této rovnice, která vzhledem ku $\sin\varphi$ jest kvadratická, jest rovnicí hledané křivky obalové.

I obdržíme tedy

$$(2x-r)^2y^2 - 3(x^2-r^2)[(x-2r)^2+y^2] = 0$$

nebo $$y^2(x-2r)^2 - 3(x^2-r^2)(x-2r)^2 = 0,$$

odkudž $$x - 2r = 0,$$

$$3x^2 - y^2 = 3r^2,$$

čili
$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{3r^2} = 1.$$

Rovnice tato značí tedy dříve již obdrženou hyperbolu, jejíž asymptoty s osou X svírají úhly $\pm 60^0$.

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Jind. Balcar* ze VII. tř. r. v Hradci Králové a *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 24.

(Zaslal p. *Frant. Šoreys,* stud. VII. tř. g. v Ml. Boleslavi.)

1. Daná ellipsa a tětiva MN mají rovnice

(1) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

(2) $$ux + vy - 1 = 0.$$

Rovnici přímek, které spojují počátek O s body M, N, v nichž přímka MN a ellipsa se protínají, obdržíme, učiníme-li předešlé rovnice pomocnou proměnnou stejnoměrnými a vyloučíme-li pak tuto proměnnou z obou rovnic. Dle toho jest

(3) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2(ux + vy)^2 = 0$$

rovnicí přímek OM, ON. Rovnici obdrženou můžeme též psáti takto:
$$a^2(1 - b^2v^2)\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2a^2b^2uv\frac{y}{x} + b^2(1 - a^2u^2) = 0.$$

Dle podmínky stojí přímky OM, ON vzájemně na sobě kolmo, a proto součin jejich směrnic $\left(\frac{y}{x}\right)$, které jsou kořeny rovnice poslední, jest
$$\frac{b^2(1 - a^2u^2)}{a^2(1 - b^2v^2)} = -1$$

nebo

(4) $$a^2b^2(u^2 + v^2) = a^2 + b^2.$$

Rovnice kolmice OP spuštěné s počátku O na přímku MN jest

(5) $$vx - uy = 0.$$

Rovnici geom. místa bodu P obdržíme, vyloučíme-li u, v z rovnic (2), (4), (5). Řešením rovnic (2), (5) bude
$$v = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

a dle rovnice (4)
$$a^2b^2(x^2 + y^2) = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)^2,$$

odkudž
$$x^2 + y^2 = 0;$$
$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2 b^2.$$

Rovnice předposlední značí přímky isotropické,*) které jsou jednou částí místa geometrického, a z rovnice poslední jest patrno, že geom. místem bodu P jest kružnice vepsaná do rovnoběžníka vrcholy ellipsy určeného.

2. Hledejme dříve vztah mezi souřadnicemi (x, y) bodu L a parametry u, v. Za účelem tím vylučme y z rovnice (2), (3), i bude $x^2(a^2u^2 + b^2v^2) - 2a^2ux - a^2b^2v^2 = 0$.

Jsou-li (x, y) souřadnice bodu L, jest dle rovnice poslední

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2 u}{a^2u^2 + b^2v^2}, \tag{6}$$

kdež x_1, x_2 jsou abscissy bodů M, N předposlední rovnicí určených.

Jsou-li y_1, y_2 pořadnice bodů M, N, lze podobně obdržeti

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b^2 v}{a^2u^2 + b^2v^2}. \tag{7}$$

Vyloučíme-li z rovnic (4), (6), (7) proměnné parametry u, v, doděláme se geom. místa bodu L.

Z rovnic (6), (7) obdržíme napřed
$$\frac{u}{v} = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$
odkudž
$$\frac{u^2}{u^2 + v^2} = \frac{b^4x^2}{b^4x^2 + a^4y^2},$$
$$\frac{v^2}{u^2 + v^2} = \frac{a^4y^2}{b^4x^2 + a^4y^2}.$$

Spojením rovnic těchto s rovnicí (4) bude
$$u^2 = \frac{b^4(a^2 + b^2)x^2}{a^2b^2(b^4x^2 + a^4y^2)},$$
$$v^2 = \frac{a^4(a^2 + b^2)y^2}{a^2b^2(b^4x^2 + a^4y^2)}.$$

Z rovnic těchto a rovnice (6) lze snadno u, v vyloučiti, a výsledek eliminace rozpadá se ve dvě rovnice, a to

*) Přímky imaginarné, jejichžto rovnice jsou $x + iy = 0$, $x - iy = 0$, nazývají se přímkami isotropickými.

$$b^4x^2 + a^4y^2 = 0,$$
$$(a^2 + b^2)(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = a^2b^2(b^4x^2 + a^4y^2).$$

Jedna část místa geom. skládá se ze dvou přímek imaginárních, a část druhá jest křivkou stupně čtvrtého, která dle obou os ellipsy jest souměrně položena, a jejížto bod osamělý jest ve středu ellipsy.

Řešení úlohy této zaslal též p. *Jind. Balcar*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.

Správné řešení úlohy 7., 8., 9., 11. a 12. zaslal též p. *Emil Batík*, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Osmá (XV.) výroční zpráva slovanské zemské vyšší realné školy v Prostějově za šk. rok 1887–88 obsahuje článek: *Některá řešení rovnic trinomických provedená na tvaru* $x^n - (a+1)x + a = 0$. Napsal s. prof. *Jos. Souček.*

Některé úlohy tak zv. arithmetiky národohospodářské vedou jak známo k řešení trinomických rovnic; mají tudíž rovnice tyto praktickou důležitosť, a jejich analysa stále ještě jest předmětem badání, a to tím spíše, ježto dosud nepodán způsob řešení, jenž by v praxi zdomácněl, tak že se tu téměř výhradně počítá tak zvanou „regula falsí“.

Již důkladný literární přehled, jejž pan auktor článku svému předeslal, svědčí o přípravě a píli, s kterou se práce této podjal. A byl to zajisté jen ohled ku škole, že omezil se pan auktor při výboru method pouze na řešení elementární, jichž uvádí čtvero, a to: *a*) rozbor Gaussův k vyhledání kořenů real. a imaginarních, *b*) řešení Farkas-Tetmajerovo nekonečnými řadami, *c*) Åstrandovo řešení algorithmy, řetězci podobnými, a *d*) řešení Güntherovo, zdokonalené Schewenem a Hofmannem. Každou z těchto method řešen tu číselný příklad, vyhovující rovnici $x^n - (a+1)x + a = 0$, jíž nabudeme v počtu úsporovém při vypočítávání procent. (Viz Dra F. J. Studničky Příspěvek k arithmetice národohospodářské, roč. III., str. 101.) Za nejspůsobilejší k číselnému počítání pokládá pan auktor methodu poslední, ač i tato, jak již svrchu řečeno, má cenu spíše theoretickou. Každému však, jenž seznámiti se chce s předními ele-