Antonín Pleskot

Poznámka ku řešení trojúhelníka, dány-li jsou jeho strany

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 4, 269--271

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123070

Poznámka ku řešení trojúhelníka, dány-li jsou jeho strany.

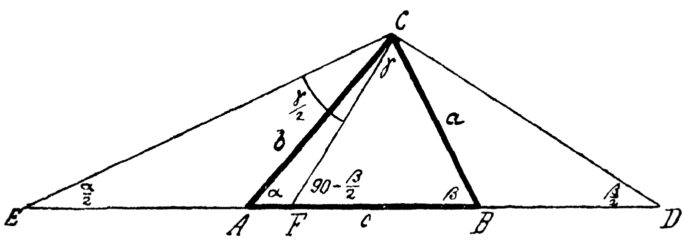
Napsal

Dr. **Antonín Pleskot**,

professor ve Valašském Meziříčí.

V následujícím chceme ukázati, kterak užitím věty sinusové možno zjednati si jednotlivé funkce úhlů daného trojúhelníka, známy-li jsou jeho strany; při tom současně nalezneme některé identické vztahy, které platí o úhlech trojúhelníka.

Budiž ABC trojúhelník daný. Jeho strany nechť jsou a, b, c a úhly α, β, γ.



Stranu AB prodlužme oběma směry a nanesme na ni od bodu B směrem AB délku BD $= a$ a od bodu A směrem BA délku AE $= b$; konečně od bodu B směrem BA nanesme délku BF $= a$.

Pak máme

$$ED = a + b + c,$$
$$EF = b + c - a,$$

a z rovnoramenného trojúhelníka EAC,

$$\mathrm{EC} = 2b \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Užitím věty sinusové v trojúhelníku EFC, v němž

$$\sphericalangle \mathrm{ECF} = \frac{\gamma}{2},$$

plyne

$$\frac{b + c - a}{2b \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}. \tag{1}$$

Vyměníme-li ve vzorci tomto b za a a β za α, pak promění se v

$$\frac{a + c - b}{2a \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \tag{2}$$

Ze součinu rovnic (1) a (2) plyne

$$\frac{a + c - b}{2a \cos \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{b + c - a}{2b \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}},$$

t. j.

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(a + c - b)(b + c - a)}{4ab}.$$

Píšeme-li $2s$ místo $a + b + c$, pak předcházející vzorec nabývá známé formy

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}.$$

Užijeme-li věty sinusové v trojúhelníku EDC, pak obdržíme

$$\frac{a + b + c}{2b \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}. \tag{3}$$

Znásobíme-li rovnice (3) a (1), nabudeme

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{c}{b},$$

t. j.

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}=\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

čili

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Poznámka.

Ze vzorců (1) a (3) možno známé identické vztahy pro úhly trojúhelníka vyvoditi.

Pro trojúhelník ABC platí

$$(4) \qquad a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (1), obdržíme

$$\frac{\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha}{\sin\beta\,.\,2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Píšeme-li v této relaci $2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ místo $\sin\beta$, pak promění se v

$$\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Dosadíme-li opět hodnoty a a b z rovnic (4) do rovnice (3) a píšeme-li $2\sin\beta\cos\frac{\beta}{2}$ místo $\sin\beta$, pak nabude tvaru

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$