

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Poznámka ku řešení trojúhelníka, dány-li jsou jeho strany

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 4, 269--271

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123070>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1898

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

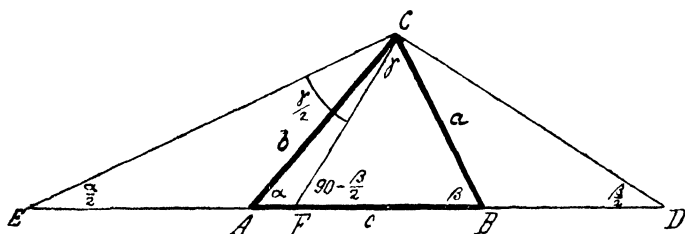
Poznámka ku řešení trojúhelníka, dány-li jsou jeho strany.

Napsal

Dr. Antonín Pleskot,
professor ve Valašském Meziříčí.

V následujícím chceme ukázati, kterak užitím věty sinusové možno zjednoti si jednotlivé funkce úhlů daného trojúhelníka, známy-li jsou jeho strany; při tom současně nalezneme některé identické vztahy, které platí o úhlech trojúhelníka.

Budiž ABC trojúhelník daný. Jeho strany necht' jsou a , b , c a úhly α , β , γ .



Stranu AB prodlužeme oběma směry a nanese na ni od bodu B směrem AB délku $BD = a$ a od bodu A směrem BA délku $AE = b$; konečně od bodu B směrem BA nanese délku $BF = a$.

Pak máme

$$ED = a + b + c,$$

$$EF = b + c - a,$$

a z rovnoramenného trojúhelníka EAC ,

$$EC = 2b \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Užitím věty sinusové v trojúhelníku EFC, v němž

$$\sphericalangle ECF = \frac{\gamma}{2},$$

plyne

$$(1) \quad \frac{b + c - a}{2b \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

Vyměníme-li ve vzorci tomto b za a a β za α , pak promění se v

$$(2) \quad \frac{a + c - b}{2a \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Ze součinu rovnic (1) a (2) plyne

$$\frac{a + c - b}{2a \cos \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{b + c - a}{2b \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}},$$

t. j.

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(a + c - b)(b + c - a)}{4ab}.$$

Píšeme-li $2s$ místo $a + b + c$, pak předcházející vzorec nabývá známé formy

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}.$$

Užijeme-li věty sinusové v trojúhelníku EDC, pak obdržíme

$$(3) \quad \frac{a + b + c}{2b \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Znásobíme-li rovnice (3) a (1), nabudeme

$$\frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4b^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b},$$

t. j.

$$\frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4bc} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

čili

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Poznámka.

Ze vzorců (1) a (3) možno známé identické vztahy pro úhly trojúhelníka vyvoditi.

Pro trojúhelník ABC platí

$$(4) \quad a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}, \quad c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (1), obdržíme

$$\frac{\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha}{\sin \beta \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

Píšeme-li v této relaci $2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$ místo $\sin \beta$, pak promění se v

$$\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha = 4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Dosadíme-li opět hodnoty a a b z rovnic (4) do rovnice (3) a píšeme-li $2 \sin \beta \cos \frac{\beta}{2}$ místo $\sin \beta$, pak nabude tvaru

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$