Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vilém Pexider

# Příspěvek k methodám infinitesimálního počtu

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 27 (1898), No. 4, 254--256

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123068

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = -\,\mathrm{C}\,l\left[1-\frac{h}{x_2}\right] = -\,\mathrm{C}l\,\frac{x_2-h}{x_2} = -\,\mathrm{C}l\,\frac{x_1}{x_2} = \mathrm{C}l\,\frac{x_2}{x_1}.$$

t. j.

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \mathrm{C}\,[lx_2 - lx_1]. \qquad \{lx = \log \mathrm{nat}\, x\}.$$

*Dodatek.* Kvadraturní formule (1) platí také pro případ irracionalního mocnitele $p$, jak z následující úvahy vyplývá.

Budiž irracionalní číslo $p$ určeno přibližně desetinným zlomkem a sice na $r$ míst desetinných, t. j.

$$\frac{a}{10^r} < p < \frac{a+1}{10^r}.$$

Kvadraturní formule (1) platí pro obě meze irrac. čísla $p$, neboť jsou to čísla lomená, při čemž možno voliti číslo $r$ libovolně velké. Z toho patrno, že ona formule platí také pro $\lim r = \infty$, t. j. pro irrac. číslo $p$.

---

# Příspěvek k methodám infinitesimálního počtu.

Napsal

**Jan Pexider** v Praze.

Nižší funkce transcendentní reálného i soujemného argumentu mají vesměs funkcionální rovnice, resp. hoví addičnímu theorému. Takováto základní funkce jest relace mezi funkčními hodnotami příslušnými třem argumentům, z nichž dva jsou libovolné a třetí určitou funkcí předchozích dvou. Theorému takového užiti lze k odvození derivační funkce, a sice následujícím způsobem.

---

následkem toho

$$l\,(1-x) = -\,(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ in inf.})$$

pro $\qquad -1 \leqq x < +1$

a tedy

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ in inf.} = -\,l\,(1-x).$$

Základní rovnice funkce derivuje se parciálně dle jednoho z argumentů $(v)$, jemuž se pak udělí taková hodnota $(v_0)$, aby onu určitou funkci obou argumentů redukoval na pouhý argument druhý $(z)$, načež vyskytnuvší se konstanta

$$\left[\frac{df(v_0)}{dv_0}\right]$$

se určí ze základního vzorce

$$\frac{df(z_0)}{dz_0} = \lim_{z=0} \frac{f(z_0+z) - f(z_0)}{z}$$

rozvedením funkce $f(z_0+z)$ v řadu.

Mějme na příklad funkcionální rovnici logarithmu

$$f(zv) = f(z) + f(v).$$

Její parciální derivací dle $v$ jest relace

$$f'(zv) \,.\, z = f'(v);$$

jest tudíž pro

$$v = 1,$$

$$f'(z) = \frac{f'(1)}{z}$$

a konstanta $f'(1)$ má patrně hodnotu

$$\lim_{z=0} \frac{lg_a(1+z) - lg_a 1}{z} = \lim_{z=0} \frac{1}{l\,a} \left\{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{l\,a};$$

derivací logarithmu o basi $a$ jest tedy

$$\frac{dlg_a z}{dz} = \frac{1}{l\,a} \cdot \frac{1}{z}.$$

Podobně pro arcus sinus.

Funkcionální rovnicí této funkce jest relace

$$f(v\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-v^2}) = f(v) + f(z)$$

— kdež symbol $\sqrt{\phantom{x}}$ je jednoznačný, positivní — a její derivací

$$f'(v\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-v^2})\left\{\sqrt{1-z^2} - \frac{zv}{\sqrt{1-v^2}}\right\} = f'(v),$$

z níž jde pro $v = 0$ vztah

$$f'(z) = \frac{f'(0)}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Konstantu $f'(0)$ určíme dle uvedeného vzorce limitací řady

$$f'(0) = \lim_{z=0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{3} + \ldots \right\} = 1;$$

proto derivace arcus sinusu jest

$$\frac{d \arcsin z}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Příkladem na addiční theorém buď funkce $\sin z$; tu platí

$$f(z + v) = f(z) \sqrt{1 - f(v)^2} + f(v) \sqrt{1 - f(z)^2},$$

kdež symbol $\sqrt{\ }$ jest opět jednoznačný, positivní; differencováním dle $v$ obdržíme

$$f'(z + v) = f'(v) \sqrt{1 - f(z)^2} - \frac{f(z) f(v) f'(v)}{\sqrt{1 - f(v)^2}}.$$

Pro $v = 0$ jest $f(v) = 0$; druhý člen tudíž odpadne a zbývá

$$f'(z) = f'(0) \sqrt{1 - f(z)^2},$$

kdež konstanta má hodnotu

$$f'(0) = \lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = \lim \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \ldots \right) = 1.$$

Derivace sinusu jest tudíž

$$\frac{d \sin z}{dz} = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \cos z.$$

Zcela obdobným způsobem lze z funkcionální rovnice, resp. z addičního theorému funkce odvoditi za jistých supposicí integrál příslušné funkce. K tomu hodlám se ještě vrátiti.