Eduard Čech

Geometrie projective differentielle des correspondances entre deux espaces. I

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 2, 32--48

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123060`

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE DES CORRESPONDANCES ENTRE DEUX ESPACES. I.

EDUARD ČECH, Praha.

1. Une correspondance entre deux espaces linéaires à n dimensions S_n et S_n' est déterminée si l'on connait les expressions des coordonnées homogènes du point A de l'espace S_n, ainsi que celles des coordonnées homogènes du point correspondant B de l'espace S_n', en fonctions (que nous supposerons analytiques) de n paramètres $(u_1, \ldots, u_n) = (u)$ (coordonnées curvilignes) que nous nommerons *paramètres principaux* pour les discerner des paramètres secondaires dont nous parlerons plus loin (v. § 5). Nous supposerons que l'on a, pour toutes les valeurs considérées de (u)

$$\left[A \frac{\partial A}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial A}{\partial u_n}\right] \neq 0, \tag{1,1}$$

$$\left[B \frac{\partial B}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial B}{\partial u_n}\right] \neq 0. \tag{1,2}$$

Nous n'examinerons que des propriétés locales d'une correspondance.

Pour des valeurs données de (u), soit K une correspondance homographique entre S_n et S_n' telle que

$$KA = B. \tag{1,3}$$

Nous appellerons K *homographie tangente* à la correspondance donnée (correspondante aux valeurs choisies de (u)) si, pour chaque courbe régulière Γ de l'espace S_n issue du point A, les deux courbes Γ' et $K\Gamma$ ont un contact analytique du premier ordre (au moins) au point B, où Γ' et $K\Gamma$ sont les images de Γ respectivement dans la correspondance étudiée et dans l'homographie K. Pour trouver l'expression d'une homographie tangente, choisissons l'indice $i (1 \leqq i \leqq n)$ et varions le paramètre u_i en laissant fixes tous les autres paramètres $u_i (1 \leqq r \leqq n, r \neq i)$. Alors le point A décrit une courbe Γ_i de l'espace S_n et le point correspondant B décrit une courbe Γ_i' de l'espace S_n'. Outre Γ_i', nous avons encore dans S_n' l'image $K\Gamma_i$ de Γ_i dans l'homographie K. Condition nécessaire et suffisante pour le contact analytique de Γ_i' et $K\Gamma_i$ au point B est qu'il existe un nombre λ_i tel que l'on ait, pour les valeurs données de (u)

$$K \frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial B}{\partial u_i} + \lambda_i B. \tag{1,4}$$

Inversement, donnons nous arbitrairement n nombres λ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ et envisageons l'homographie K déterminée par les équations (1,3) et (1,4); K n'est pas singulière en vertu de (1,1) et (1,2). Il est facile de voir que K est une homographie tangente. En effet, une courbe Γ de l'espace S_n est donnée en exprimant les paramètres principaux en fonctions d'une variable auxilière t de façon que les (u) prennent les valeurs initiales données pour $t = t_0$. Les deux courbes Γ' et $K\Gamma$ ont alors un contact analytique en B, puisqu'on a pour $t = t_0$, en vertu de (1,3) et (1,4),

$$KA = B,\ K\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + \lambda B,\ \text{où}\ \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}.$$

On voit que l'homographie tangente n'est pas déterminée univoquement en fixant les valeurs de (u), car elle dépend encore de n paramètres arbitraires $\lambda_i (1 \leqq i \leqq n)$. Parmi les homographies tangentes, il existe toujours une (et une seule) *affinité tangente*. Si l'on emploie des coordonnées non homogènes, l'affinité tangente s'obtient évidemment en choisissant $\lambda_i = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n$.

2. Il est possible de fixer, pour les valeurs données de (u), une homographie tangente bien déterminée par voie intrinsèque. D'après (1,1) et (1,2), on peut soumettre les facteurs arbitraires de coordonnées homogènes des deux points A et B à la condition

$$\left[A\,\frac{\partial A}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial A}{\partial u_n}\right] = \left[B\,\frac{\partial B}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial B}{\partial u_n}\right] \tag{2,1}$$

qui est évidemment intrinsèque. L'homographie tangente particulière K_0, donnée par

$$K_0 A = B, \qquad K_0\frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial B}{\partial u_i},\ (1 \leqq i \leqq n) \tag{2,2}$$

est alors univoquement déterminée. Car il est clair, en premier lieu, que K_0 ne dépend nullement du choix des coordonnées curvilignes. En second lieu on a, en conséquence de (2,2),

$$K_0(\varrho A) = \varrho B \quad K_0\frac{\partial(\varrho A)}{\partial u_i} = \frac{\partial(\varrho B)}{\partial u_i},\ (1 \leqq i \leqq n)$$

pour chaque choix de ϱ, de manière que K_0 reste inaltérée en remplaçant A par ϱA parce que, pour ne pas violer la condition (2,1), on doit remplacer simultanément B par ϱB. A vrai dire, condition (2,1) reste inaltérée encore si, en ne pas changeant A, on remplace B par εB, où $\varepsilon^{n+1} = 1$, mais cela n'a point d'importance puisqu'il est clair qu'on peut, sans changer géométriquement (c'est-à-dire à un facteur de proportionalité près) l'homographie K_0, remplacer la condition (2,1) par la condition un peu plus générale

$$\left[A\frac{\partial A}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial A}{\partial u_n}\right] = c\left[B\frac{\partial B}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial B}{\partial u_n}\right], \tag{2,3}$$

où c est une constante. L'homographie K_0 qui vient d'être définie sera appelée *l'homographie locale* de la correspondance considérée (correspondante aux valeurs choisies des paramètres principaux).

Pour un choix tout-à-fait arbitraire des facteurs des coordonées homogènes des points A et B on a toujours une équation de la forme (2,3) à cette différence près que c peut être variable avec les (u). L'homographie locale K_0 est alors donnée par les équations

$$K_0 A = \varrho B,\ K_0 \frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial(\varrho B)}{\partial u_i}\ (1 \leqq i \leqq n),$$

où la valeur de ϱ est donnée par

$$\left[A \frac{\partial A}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial A}{\partial u_n}\right] = \left[\varrho B,\ \frac{\partial(\varrho B)}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial(\varrho B)}{\partial u_n}\right],$$

ce qui donne $\varrho = c^{\frac{1}{n+1}}$. En changeant le facteur numérique inessentiel de K_0, on obtient

$$K_0 A = B,\ K_0 \frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial B}{\partial u_i} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial \log c}{\partial u_i} B (1 \leqq i \leqq n), \tag{2,4}$$

la valeur de c étant donnée par (2,3).

3. Dans ce paragraphe, supposons que $n = 1$, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une correspondance entre deux *droites*. Fixons les facteurs des coordonnées de A et B de manière à avoir (2,1), ou bien

$$\left[A \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\right] = \left[B \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u}\right]. \tag{3,1}$$

En différentiant, on obtient

$$\left[A\ \frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}u^2}\right] = \left[B \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}u^2}\right]. \tag{3,2}$$

Or, puisque $n = 1$, on a des relations de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}u^2} = \lambda A + \mu \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u},\quad \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}u^2} = \lambda' A + \mu' \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u} \tag{3,3}$$

et les équations (3,1) et (3,2) donnent

$$\mu = \mu'. \tag{3,4}$$

L'homographie locale K_0 est donnée par (2,2), ou bien

$$K_0 A = B,\quad K_0 \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u}, \tag{3,5}$$

et il résulte de (3,3) et (3,4) que

$$K_0 \frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}u^2} + (\lambda - \lambda') B. \tag{3,6}$$

Les équations (3,5) et (3,6) expriment qu'il a un contact analytique du second ordre entre le lieu du point B (image de A dans la correspondance considérée) et le lieu du point K_0A (image de A dans l'homographie K_0). Pour cette raison nous appellerons, pour $n = 1$, K_0 *l'homographie osculatrice* de la correspondance considérée (pour une valeur donnée de (u)).

4. Retournons au cas général de $n > 1$. Plus haut, nous avons donné une définition *analytique* de l'homographie locale K_0. Une définition géométrique de K_0, restreinte au cas $n = 2$, a été donnée par moi en 1931 dans l'ouvrage G. Fubini et E. Čech, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, p. 189. Pour n quelconque, une caractérisation géométrique projective de K_0 découle des considérations du § 11. Or il est intéressant d'observer une propriété caractéristique *centro-affine* de K_0, qui est bien simple. Nos espaces projectifs S_n et S_n' peuvent être envisagés comme des espaces dont les „points" sont les droites issues de l'origine dans deux espaces affines à $n + 1$ dimensions L_{n+1} et L_{n+1}'. En fixant d'une manière quelconque les facteurs des coordonnées homogènes de A et B et en considérant ces coordonnées comme des coordonnées non homogènes dans L_{n+1} et L_{n+1}', nous obtenous une correspondance entre L_{n+1} et L_{n+1}' en associant au point tA de L_{n+1} le point tB de L_{n+1}'. Cette correspondance entre deux espaces affines possède la particularité que l'image de chaque droite issue de l'origine est une droite issue de l'origine, la correspondance entre ces deux droites étant affine et l'image de l'origine étant l'origine. Une particularisation ultérieure de la correspondance entre L_{n+1} et L_{n+1}' est exprimée par la condition (2,1). Si elle est satisfaite, K_0 donnée par (2,2) est, en coordonnées non homogènes, *l'affinité tangente* à la correspondance entre L_{n+1} et L_{n+1}'. L'homographie locale de la correspondance entre S_n et S_n' résulte en projetant de l'origine cette affinité tangente. Il ne s'agit donc que de l'interprétation centro-affine de la condition (2,1) ce qui est presque évident. Condition (2,1) dit que le volume du $(n + 1)$-simplexe dans L_{n+1} dont les sommets sont l'origine et n positions infiniment voisines de A est égal, en négligeant les infiniment petits d'ordre $n + 1$, au volume de l'image du simplexe dans L'_{n+1}.

Les homographies locales seront dans ce qui suit seulement l'objet de quelques remarques occasionnelles. Pour cette raison on ne supposera pas en général la condition (2,1) remplie. Dans ce Mémoire et dans ceux qui allons suivre, nous étudierons d'une manière detaillée une homographie tangente quelconque K, donnée par les équations (1,3) et (1,4), où les λ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ sont des fonctions arbitrairement choisies des paramètres principaux.

5. Dans ce qui suit nous emploieront les méthodes puissantes créées par l'éminent géomètre M. E. Cartan. Dans l'espace S_n, nous choisissons un repère $A, A_1, \ldots, A_n$, dans l'espace S_n' un repère $B, B_1, \ldots, B_n$. Les premiers sommets A et B des deux repères forment toujours

un couple de points associés dans la correspondance étudiée entre S_n et S_n' de manière que les *rapports* des coordonnées homogènes de A et de B sont des fonctions bien déterminées des paramètres principaux (u), tandis que les facteurs de ces coordonnées restent arbitraires. En ce qui concerne les autres sommets $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$, outre les conditions évidentes

$$[AA_1, \ldots, A_n] \neq 0 \neq [BB_1, \ldots, B_n) \tag{5,1}$$

nous les soumettons encore à la condition que l'homographie K donnée par

$$KA = B,\ KA_1 = B_1, \ldots, KA_n = B_n \tag{5,2}$$

soit une *homographie tangente* à la correspondance envisagée. Les coordonnées homogènes de $A, A_1, \ldots, A_n, B, B_1, \ldots, B_n$ dépendent alors des n paramètres principaux et, en outre, d'un certain nombre de *paramètres secondaires*. Sans la condition relative à l'homographie K, le nombre des paramètres secondaires serait $2 + 2n(n + 1)$: les deux facteurs de A et B et toutes les coordonnées $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$. Si l'homographie tangente était (pour des valeurs données de (u)) univoquement déterminée, alors la condition relative à K diminuerait le nombre des paramètres secondaires de $n(n + 1)$ unités ($A, A_1, \ldots, A_n, B$ étant fixes, les coordonnées de $B_1, \ldots, B_n$ seraient complètement déterminées). En réalité, pour des valeurs données de (u), l'homographie tangente dépend encore de n constantes arbitraires, ce qui augmente de n unités le nombre des paramètres secondaires. En définitive, on a

$$2 + 2n(n + 1) - n(n + 1) + n = 2 + n(n + 2)$$

paramètres secondaires et le nombre de tous les paramètres (principaux et secondaires) est $n + 2 + n(n + 2) = (n + 1)(n + 2)$.

On a les équations fondamentales

$$\mathrm{d}A = \omega_{00}A + \omega_{01}A_1 + \ldots + \omega_{0n}A_n, \tag{5,3}$$

$$\mathrm{d}A_i = \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \ldots + \omega_{in}A_n \quad (1 \leqq i \leqq n), \tag{5,4}$$

$$\mathrm{d}B = \overline{\omega}_{00}B + \overline{\omega}_{01}B_1 + \ldots + \overline{\omega}_{0n}B_n, \tag{5,5}$$

$$\mathrm{d}B_i = \overline{\omega}_{i0}B + \overline{\omega}_{i1}B_1 + \ldots + \overline{\omega}_{in}B_n \quad (1 \leqq i \leqq n), \tag{5,6}$$

les $\omega_{ik}, \overline{\omega}_{ik}$ $(0 \leqq i, k \leqq n)$ étant des formes de Pfaff en tous les $(n + 1)$ . . $(n + 2)$ paramètres. Par différentiation extérieure, on en déduit les équations de structure

$$[\mathrm{d}\omega_{ik}] = [\omega_{i0}\omega_{0k}] + [\omega_{i1}\omega_{1k}] + \ldots + [\omega_{in}\omega_{nk}], \tag{5,7}$$

$$[\mathrm{d}\overline{\omega}_{ik}] = [\overline{\omega}_{i0}\overline{\omega}_{0k}] + [\overline{\omega}_{i1}\overline{\omega}_{1k}] + \ldots + [\overline{\omega}_{in}\overline{\omega}_{nk}], \tag{5,8}$$

$$(0 \leqq i, k \leqq n).$$

Parmi les $2(n + 1)^2$ formes de Pfaff $\omega_{ik}, \overline{\omega}_{ik}$, il en doit exister justement $(n + 1)(n + 2)$ linéairement indépendantes, de façon qu'il existe $n(n+1)$ relations linéaires que l'on obtient en exprimant que K soit une homographie tangente. Selon (5,2), (5,3) et (5,5) on a

$$KA = B,\ K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B + (\omega_{00} - \overline{\omega}_{00})B + (\omega_{01} - \overline{\omega}_{01})B_1 + \\ + \ldots + (\omega_{0n} - \overline{\omega}_{0n})B_n.$$

Pour que K soit une homographie tangente, il faut et il suffit que $K\,\mathrm{d}A - \mathrm{d}B$ soit proportionnel à B ce qui donne le premier groupe de n relations linéaires

$$\overline{\omega}_{01} = \omega_{01}, \ldots, \overline{\omega}_{0n} = \omega_{0n}. \tag{5,9}$$

Les n^2 relations linéaires restantes s'obtiennent par différentiation extérieure de (5,9). Mais auparavant introduisons des nouvelles formes de Pfaff en posant

$$\overline{\omega}_{ik} = \omega_{ik} + \tau_{ik} \quad (0 \leqq i, k \leqq n). \tag{5,10}$$

En outre posons, pour simplifier,

$$\omega_{01} = \omega_1, \ldots, \omega_{0n} = \omega_n, \tag{5,11}$$

de manière que les formules (5,3) et (5,5) s'écrivent

$$\mathrm{d}A = \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n, \tag{5,3)'}$$

$$\mathrm{d}B = \overline{\omega}_{00}B + \omega_1 B_1 + \ldots + \omega_n B_n. \tag{5,5)'}$$

Remarquons que, les valeurs des paramètres principaux (u) étant fixées, la position géométrique de A est bien déterminée et vice versa. Il en résulte, d'après (5,3)', que $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont *n combinaisons linéaires indépendantes des différentielles des n paramètres principaux.*

Ceci étant, la différentiation extérieure de (5,9) donne

$$\left.\begin{array}{l} [\omega_1\tau_{11} - \tau_{00}] + [\omega_2\tau_{21}] + \ldots + [\omega_n\tau_{n1}] = 0, \\ [\omega_1\tau_{12}] + [\omega_2\tau_{22} - \tau_{00}] + \ldots + [\omega_n\tau_{n2}] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\omega_1\tau_{1n}] + [\omega_2\tau_{2n}] + \ldots + [\omega_n\tau_{nn} - \tau_{00}] = 0. \end{array}\right\} \tag{5,12}$$

D'après le lemme bien connu de E. CARTAN, il résulte de (5,12) l'existence de n formes quadratiques en $\omega_1, \ldots, \omega_n$:

$$\Omega_i = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c^i_{rs}\omega_r\omega_s \quad (1 \leqq i \leqq n), \tag{5,13}$$

où l'on a donc

$$c^i_{rs} = c^i_{sr} \quad (1 \leqq i, r, s \leqq n)$$

telles que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\omega_r} = \sum_{s=1}^{n} c^i_{rs}\omega_s = \begin{cases}\tau_{ii} - \tau_{00} \text{ pour } i = r, \\ \tau_{ri} \text{ pour } i \neq r,\end{cases} \\ 1 \leqq i, r \leqq n. \tag{5,15}$$

(5,15) sont les n^2 ultérieures relations linéaires entre nos formes de Pfaff.

Les expressions Ω_i jouent un rôle fondamental dans la géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces. Nous en donnerons la signification géométrique au § 9.

6. Puisque nous employons des coordonnées homogènes, la multiplication de tous les points $A, A_1, \ldots, A_n$ par le même factuer scalaire $\varrho \neq 0$ et celle de tous les points $B, B_1, \ldots, B_n$ par le même facteur scalaire $\sigma \neq 0$ n'a aucune signification géométrique de façon qu'on peut remplacer la condition (5,1) par la condition plus forte

$$[AA_1, \ldots, A_n] = 1 = [BB_1, \ldots, B_n]. \tag{6,1}$$

Ceci sont deux relations fonctionnelles entre les paramètres qui diminuent le nombre des paramètres secondaires de deux unités à $n(n+2)$ et le nombre de tous les paramètres à $n(n+3)$. Les relations (6,1) conduisent à deux relations linéaires entre nos formes de Pfaff qui s'obtiennent en différentiant (6,1) ayant égard à (5,3) — (5,6). On obtient

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \ldots + \omega_{nn} = \overline{\omega}_{00} + \overline{\omega}_{11} + \ldots + \overline{\omega}_{nn} = 0, \tag{6,2}$$

d'où

$$\tau_{00} + \tau_{11} + \ldots + \tau_{nn} = 0. \tag{6,3}$$

La validité des relations (6,1)—(6,3) peut être supposée toujours, mais nous ne le ferons que quand cela simplifiera les formules.

Si, au lieu de

$$A, A_1, \ldots, A_n, B, B_1, \ldots, B_n$$

on introduit

$$\varrho A, \varrho A_1, \ldots, \varrho A_n, \sigma B, \sigma B_1, \ldots, \sigma B_n,$$

alors les formes de Pfaff $\omega_{ik}, \overline{\omega}_{ik}, \tau_{ik}$ $(0 \leqq i, k \leqq n; i \neq k)$, en particulier les $\omega_1, \ldots, \omega_n$ restent inaltérées. Les „formes diagonales“ $\omega_{ii}, \overline{\omega}_{ii}, \tau_{ii}$ $(0 \leqq i \leqq n)$, par contre, doivent être remplacées par

$$\omega_{ii} + \frac{d\varrho}{\varrho}, \ \overline{\omega}_{ii} + \frac{d\sigma}{\sigma}, \ \tau_{ii} + \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Les différences entre les formes diagonales $\omega_{ii} - \omega_{00}$, $\overline{\omega}_{ii} - \overline{\omega}_{00}$, $\tau_{ii} - \tau_{00}$ ne sont pas changées. Puisque les facteurs ϱ, σ n'ont aucune signification géométrique, nos formules contiendrons en général seulement les différences entre les formes diagonales de manière que, en général, les relations (6,1)—(6,3) n'introduisent aucune simplification.

7. En définissant c comme dans (2,3), on a évidemment

$$[A \, d_1 A, \ldots, d_n A] = c[B \, d_1 B, \ldots, d_n B],$$

où tous les $d_1, \ldots, d_n$ sont des symboles de différentiation. D'après (5,3), (5,5) et (5,9) on en obtient

$$[AA_1, \ldots, A_n] = c[BB_1, \ldots, B_n]$$

ce qui donne par différentiation

$$\frac{dc}{c} + \tau_{00} + \tau_{11} + \ldots + \tau_{nn} = 0. \tag{7,1}$$

Or pour l'homographie locale K_0 on a selon (2,4)

$$K_0 A = B,\ K_0\, \mathrm{d}A = \mathrm{d}B + \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}c}{c} B.$$

D'après (5,3)', (5,5)' et (7,1) on obtient donc

$$K_0 A = B,\ K_0(\omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n) = \omega_1 B_1 + \ldots + \omega_n B_n - \\ - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} (\tau_{ii} - \tau_{00}) B,$$

ce qui donne, d'après (5,15),

$$K_0 A = B,\ K_0 A_i = B_i - \frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n} c_{ri}^{r} B. \tag{7,2}$$

En particulier on a $K_0 = K$, K étant définie par (5,2), si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} (\tau_{ii} - \tau_{00}) = 0 \tag{7,3}$$

ou bien

$$\sum_{r=1}^{n} c_{ri}^{r} = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n. \tag{7,4}$$

Sous la supposition (6,3), donc en particulier sous la supposition (6,1), on peut donner à la condition (7,3) la forme très simple

$$\tau_{00} = 0. \tag{7,5}$$

8. Nous introduirons parfois un symbole de différentiation δ sous lequel les paramètres principaux sont considérés comme des constantes; δ est donc un symbole de différentiation par rapport aux paramètres secondaires seuls. On a

$$\delta u_1 = \ldots = \delta u_n = 0,$$

d'où

$$\omega_1(\delta) = \ldots = \omega_n(\delta) = 0. \tag{8,1}$$

Posons

$$\omega_{ik}(\delta) = e_{ik},\ \tau_{ik}(\delta) = t_{ik}, \\ (0 \leqq i, k \leqq n), \tag{8,2}$$

de manière que

$$e_{01} = \ldots = e_{0n} = t_{01} = \ldots = t_{0n} = 0. \tag{8,3}$$

D'après (5,15) on a

$$t_{ri} = \begin{cases} t_{00} \text{ pour } i = r, \\ 0 \text{ pour } i \neq r; \end{cases} \\ (1 \leqq i, r \leqq n). \tag{8,4}$$

9. Ces préliminaires posés, nous allons introduire une notion d'importance capitale dans la géométrie projective différentielle des corres-

pondances entre deux espaces. Les notations étant telles qu'au § 5, chaque système de valeurs de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ peut être considéré comme un système de coordonnées homogènes d'une droite

$$[A, \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n] = [A\ \mathrm{d}A] \tag{9,1}$$

de l'étoile A dans l'espace S_n et, en même temps, comme un système de coordonnées homogènes d'une droite

$$[B, \omega_1 B_1 + \ldots + \omega_n B_n] = [B\ \mathrm{d}B] \tag{9,2}$$

de l'étoile B dans l'espace S_n'; voir (5,3)' et (5,5)'. Nous parlerons simplement de la droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ dans S_n — c'est la droite (9,1) — et de la droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ dans S_n' — c'est la droite (9,2). Evidemment, si (9,1) est la tangente en A à une courbe Γ tracée dans S_n, (9,2) est la tangente en B à l'image Γ' de Γ dans la correspondance envisagée. Les deux droites (9,1) et (9,2) correspondent aussi l'une à l'autre dans l'homographie tangente K. Remarquons que, quoique (v. (1,4)) l'homographie tangente dépend de n constantes arbitraires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, la partie de l'homographie tangente relative aux étoiles A et B est déterminée sans ambiguité.

Ceci étant considérons, simultanément dans l'étoile A de l'espace S_n et dans l'étoile B de l'espace S_n', la transformation quadratique (en général non birationnelle!) portant la droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ dans la droite $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$, où les valeurs de $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ sont données par (5,13). Remarquons que, pour des valeurs données des paramètres principaux, notre transformation quadratique n'est pas encore complètement déterminée. Cependant, si l'on fait un choix de l'homographie tangente K et qu'on prenne les deux repères $A, A_1, \ldots, A_n$ et $B, B_1, \ldots, B_n$ de façon que K soit donnée par (5,2), alors la transformation quadratique est complètement déterminée. Cela résulte de la signification géométrique de la transformation; d'ailleurs, il est aisé de le vérifier par le calcul; v. § 10. Nous appellerons la transformation

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \rightarrow (\Omega_1, \ldots, \Omega_n) \tag{9,3}$$

la *transformation K-linéarisante* de la correspondance envisagée. Nous nommerons aussi la droite $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ la *droite K-linéarisante* de la droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Chaque droite particulière $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ pour laquelle $\Omega_1 = \ldots = \Omega_n = 0$ sera nommée *droite K-principale*; *droite caractéristique* est chaque droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ telle que

$$\Omega_1 : \ldots : \Omega_n = \omega_1 : \ldots : \omega_n.$$

Nous ne disons pas K-caractéristique, puisque la notion de droite caractéristique est indépendante du choix de K; il faut d'ailleurs considérer chaque droite K-principale comme une droite caractéristique particulière.

Passons à expliquer la signification géométrique de la transformation K-linéarisante! Si le point A décrit une courbe Γ dans l'espace S_n et le point correspondant B une courbe Γ' dans l'espace S_n', on a tout d'abord les équations

$$KA = B,\ K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B - \tau_{00}B \tag{9,4}$$

mettant en évidence le contact analytique du premier ordre des deux courbes Γ' et $K\Gamma$ au point initial B. En différentiant les équations (5,3)′ et (5,5)′ et ayant égard à (5,4) et (5,6), on obtient

$$\mathrm{d}^2A = (\mathrm{d}\omega_{00} + \omega_{00}{}^2 + \sum_{i=1}^{n}\omega_i\omega_{i0})A +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{d}\omega_i + \omega_i\omega_{i0} + \sum_{k=1}^{n}\omega_k\omega_{ki})A_i,$$
$$\mathrm{d}^2B = (\mathrm{d}\overline{\omega}_{00} + \overline{\omega}_{00}{}^2 + \sum_{i=1}^{n}\omega_i\overline{\omega}_{i0})B +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{d}\omega_i + \omega_i\overline{\omega}_{i0} + \sum_{k=1}^{n}\omega_k\overline{\omega}_{ki})B_i;$$

faisant usage de (5,2) et (5,10), on obtient

$$K\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B - \sum_{i=1}^{n}(\omega_i\tau_{00} + \sum_{k=1}^{n}\omega_k\tau_{ki})B_i - (\,.\,)B,$$

où le coefficient de B ne nous intéresse pas.

D'après (5,5)′ on peut aussi écrire

$$\mathrm{K}\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B - 2\tau_{00}\,\mathrm{d}B + \sum_{i=1}^{n}(\omega_i\tau_{00} - \sum_{k=1}^{n}\omega_k\tau_{ki})B_i - (\,.\,)B$$

et enfin, faisant usage de (5,15),

$$K\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B - 2\tau_{00}\,\mathrm{d}B - \sum_{i=1}^{n}\Omega_iB_i - (\,.\,)B. \tag{9,5}$$

Des équations (9,4) et (9,5) on voit d'abord que *condition nécessaire et suffisante pour le contact analytique du second ordre* des deux courbes Γ' et $K\Gamma$ au point initial B est que *la tangente* à Γ (ou a Γ') *soit une droite K-principale. Ensuite on voit que condition nécessaire et suffisante pour un contact géométrique du second ordre* des deux courbes Γ' et $K\Gamma$ au point initial B est que *la tangente* à Γ (ou à Γ') *soit une droite caractéristique*. Supposons enfin que la tangente à Γ (ou à Γ') ne soit pas caractéristique. Alors l'ordre précis de contact de Γ' et $K\Gamma$ au point initial B est égal a l'unité. Cependant, choisissons un point C différent de B sur la droite K-linéarisante de la tangente à Γ' de maniere que $[BC]$ est proportionnelle à $[B, \sum_{r=1}^{n}\Omega_iB_i]$; choisissons aussi, dans l'espace S_n', un hyperplan H qui ne passe pas par le point C. *Alors les projections des deux courbes Γ' et $K\Gamma$ ont un contact analytique du second ordre au point initial*, ce qui donne la signification géometrique cherchée de la droite K-linéarisante.

Pour le voir clairement, on peut choisir le système de référence de manière que C soit le point $(0, \ldots, 0,1)$ et que l'équation de H soit $x_{n+1} = 0$; alors la projection du point $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est simplement le point $(x_1, \ldots, x_n)$ et, le bar désignant l'omission de la dernière coordonnée, il résulte de (9,4) et (9,5) que

$$\overline{KA} = \overline{B},\quad \overline{K\mathrm{d}A} = \mathrm{d}\overline{B} - \tau_{00}\overline{B},$$
$$\overline{K\,\mathrm{d}^2A} = \mathrm{d}^2\overline{B} - 2\tau_{00}\,\mathrm{d}\overline{B} - (\,.\,)\overline{B},$$

ce qui met en évidence le contact analytique du second ordre des deux projections.

Des équations (9,4) et (9,5) il résulte

$$K[A\ \mathrm{d}A\ \mathrm{d}^2A] = [B\ \mathrm{d}B\ \mathrm{d}^2B] - [B\ \mathrm{d}B\sum_{i=1}^{n}\Omega_iB_i]. \tag{9,6}$$

Si la droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ est caractéristique, l'équation (9,6) est simplement

$$K[A\ \mathrm{d}A\ \mathrm{d}^2A] = [B\ \mathrm{d}B\ \mathrm{d}^2B]. \tag{9,6$'$}$$

Donc pour les courbes Γ dont la tangente au point A est caractéristique, l'image Γ' de Γ a un point d'inflexion en B si et seulement si Γ a un point d'inflexion en A et, si l'inflexion n'a pas lieu, les plans osculateurs à Γ en A et à Γ' en B correspondent l'un a l'autre dans l'homographie tangente; il s'agit ici seulement de la partie de l'homographie tangente relative aux deux étoiles A et B qui est indépendante des constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ figurant dans (1,4). L'état des choses est complètement différent si la tangente à Γ en A n'est pas caractéristique. Pour une droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ non caractéristique, il existe un plan

$$[A, \sum_{i=1}^{n}\omega_iA_i,\ \sum_{i=1}^{n}\Omega_iA_i] \tag{9,7}$$

dans l'espace S_n et le plan correspondant

$$[B, \sum_{i=1}^{n}\omega_iB_i,\ \sum_{i=1}^{n}\Omega_iB_i] \tag{9,8}$$

dans l'espace S_n'; chacun de ces deux plans joint la droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de l'espace considéré avec la droite K-linéarisante de la droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Chacun des deux plans (9,7) et (9,8) sera nommé *plan linéarisant* de la droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$; nous disons linéarisant au lieu de K-linéarisant parce que cette notion est indépendante du choix de l'homographie tangente K. Ceci étant, on déduit de (9,6) le résultat suivant: (9,1) *et* (9,2) *étant un couple de droites correspondantes non caractéristiques, si Γ parcourt l'ensemble des courbes de l'espace S_n passant par A dans la direction* (9,1), *son image Γ' parcourt l'ensemble des courbes de l'espace S_n' passant par B dans la direction* (9,2). *Si Γ a un point d'inflexion en A, alors le plan osculateur à Γ' en B est le plan linéarisant de* (9,2); *inversement, si Γ' a un point* *d'inflexion en B, alors le plan osculateur à Γ en A est le plan linéarisant de* (9,1). *Pour toutes les courbes Γ ayant en A la tangente fixe* (9,1) *et dont le plan osculateur en A est le plan linéarisant de la tangente, les courbes Γ' correspondantes ont en B la tangente et le plan osculateur fixe, le plan osculateur étant le plan linéarisant de la tangente. Cependant, si Γ parcourt l'ensemble des courbes ayant en A la tangente* (9,1) *et le plan osculateur fixes de manière que le plan osculateur soit différent du plan linéarisant de la tangente* (ce qui exige $n \geq 3$) *l'ensemble des images Γ' de Γ, tout en ayant en B une tangente fixe* (9,2), *a en B le plan osculateur variable dans un sous-espace linéaire à trois dimensions de S_n'. Ce plan osculateur décrit un faisceau dont l'axe est la tangente* (9,2); *le plan linéarisant de* (9,2) *fait partie du faisceau;* il correspond aux courbes Γ ayant une inflexion en A.

10. Pour voir comment la transformation K-linéarisante dépend du choix de l'homographie tangente, nous choisissons une homographie tangente fixe K et supposons que les repères $A, A_1, \ldots, A_n$ et $B, B_1, \ldots \ldots, B_n$ soient tels que K soit donnée par (5,2). Il résulte de (1,4), (5,3)' et (5,5)' que l'homographie tangente K^* la plus générale est donnée par

$$K^*A = B,\ K^*A_i = B_i - \mu_i B \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n \tag{10,1}$$

de manière que

$$(K^* - K)A = 0,\ (K^* - K)A_i = -\mu_i B\ (1 \leqq i \leqq n).$$

Il en résulte que

$$(K^* - K)\,\mathrm{d}A = -\sum_{i=1}^{n}\mu_i\omega_i \cdot B,$$

$$(K^* - K)\,\mathrm{d}^2A = -(\,.\,)B,$$

ou la valeur de $(\,.\,)$ ne nous intéresse pas. Aux équations (9,4) et (9,5) correspondent alors les équations

$$K^*A = B,\ K^*\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B - (\tau_{00} + \sum_{i=1}^{n}\mu_i\omega_i)B,$$

$$K^*\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B - 2(\tau_{00} + \sum_{i=1}^{n}\mu_i\omega_i)\,\mathrm{d}B -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(\Omega_i - 2\omega_i\sum_{k=1}^{n}\mu_k\omega_k)B_i - (\,.\,)B.$$

On en déduit aisément que la transformation K^*-linéarisante est donnée par

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\Omega_1 - 2\omega_1\vartheta, \ldots, \Omega_n - 2\omega_n\vartheta), \tag{10,2}$$

où

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{n}\mu_i\omega_i. \tag{10,3}$$

11. Il résulte de (5,13) et (9,3) que la transformation K-linéarisante est donnée par

$$\omega_i \rightarrow \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} c_{rs}^{i} \omega_r \omega_s \quad (1 \leqq i \leqq n) \tag{11,1}$$

où $c_{rs}^{i} = c_{sr}^{i}$, l'homographie tangente K étant donnée par (5,2). En considérant les ω_i comme des quantités contrevariantes, c_{rs}^{i} est un tenseur à deux indices r, s covariantes et à un indice i contrevariant. Le tenseur c_{rs}^{i}, symmétrique dans les deux indices covariants, n'est pas univoquement déterminé par la correspondance entre les espaces S_n et S_n'. Même pour un choix bien défini de l'homographie tangente K, on peut encore remplacer c_{rs}^{i} par

$$\lambda c_{rs}^{i}; \tag{11,2}$$

et si on remplace l'homographie tangente (5,2) par une autre homographie tangente (10,3), il résulte de (5,13), (10,2) et (10,3) qu'il faut remplacer c_{rs}^{i} par

$$c_{rs}^{i} - \delta_r^i \mu_s - \delta_s^i \mu_r, \tag{11,3}$$

ou δ_r^i est le symbole de Kronecker ($\delta_i^i = 1$, $\delta_r^i = 0$ pour $i \neq r$).

On peut se débarasser de l'indétermination (11,3) du tenseur c_{rs}^{i} en supposant que K soit l'homographie locale. Ceci est exprimé par la condition

$$\sum_{r=1}^{n} c_{ri}^{r} = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n. \tag{7,4}$$

Les équations (7,4) expriment une propriété algébrique invariante de la transformation K-linéarisante relative au cas ou K est l'homographie locale; il serait aisé d'énoncer cette propriété en termes purement géométriques, ce qui fournit une interprétation de la notion d'homographie locale. Pour $n = 2$, nous sommes conduits à une notion classique. En effet, pour $n = 2$, (11,1) est ce qu'on appelle une correspondance (1,2) entre deux faisceaux de droites. Les droites caractéristiques sont données par l'équation cubique

$$\begin{vmatrix} c_{11}{}^1\omega_1{}^2 + 2c_{12}{}^1\omega_1\omega_2 + c_{22}{}^1\omega_2{}^2\omega_1 \\ c_{11}{}^2\omega_1{}^2 + 2c_{12}{}^2\omega_1\omega_2 + c_{22}{}^2\omega_2{}^2\omega_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{11,4}$$

Or on vérifie sans peine que, pour $n = 2$, les équations (7,4) signifient tout simplement que la transformation (11,1) est la *polarité par rapport à la forme cubique* apparaissant dans l'équation (11,4). Les conditions (7,4) constituent donc une généralisation de la notion de polarité par rapport à une forme cubique binaire. Il semble que cette généralisation n'a pas été étudiée jusqu'a présent.

12. Disons encore quelques mots sur le cas simple $n = 1$. Nous avons déjà vu au § 3 que l'homographie locale est, pour $n = 1$, l'homo-

graphie osculatrice. Supposons que les repères A, A_1; B, B_1 soient tels que l'homographie osculatrice soit donnée par

$$KA = B, \ KA_1 = B_1. \tag{12,1}$$

Condition pour qu'il en soit ainsi est (7,3) pour $n = 1$, c'est-à-dire

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0. \tag{12,2}$$

Les équations fondamentales (5,3)—(5,6) sont alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1, \ \mathrm{d}B = (\omega_{00} + \tau_{00})B + \omega_1 B_1, \\ \mathrm{d}B &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1, \ \mathrm{d}B = (\omega_{10} + \tau_{10})B + (\omega_{11} + \tau_{00})B_1. \end{aligned} \tag{12,3}$$

Par différentiation extérieure de (12,2) on obtient $[\omega_1\tau_{10}] = 0$, d'où il résulte que $\tau_{10} = \alpha\omega_1$ et $t_{10} = 0$. En outre on a $[\mathrm{d}\omega_1] = [\omega_{00} - \omega_{11}\omega_1]$, $[\mathrm{d}\tau_{10}] = [\tau_{10}\omega_{00} - \omega_{11}]$, ce qui donne $\delta\omega_1 = -(e_{11} - e_{00})\omega_1$, $\delta\tau_{10} = (e_{11} - e_{00})\omega_1$ et par suite

$$\delta(\tau_{10}\omega_1) = \delta(\alpha\omega_1^2) = 0.$$

L'expression $\tau_{10}\omega_1 = \alpha\omega_1^2$ *a donc la même valeur pour chaque choix de repères satisfaisant à* (12,2); nous la nommerons *élement différentiel projectif* de la correspondance entre deux droites. Pour une correspondance homographique l'élément différentiel projectif s'évanouit identiquement. Inversement, si $\tau_{10} = 0$, on déduit de (12,1) et (12,3) que

$$\mathrm{d}K \,.\, A = \tau_{00}B, \ \mathrm{d}K \,.\, A_1 = \tau_{00}B_1;$$

on en conclut que l'homographie K est fixe, si on néglige un facteur numérique inessentiel. Comme $KA = B$ la correspondance envisagée coincide alors avec l'homographie K.

13. Retournons au cas général de $n > 1$. Le cas le plus simple est celui ou chaque droite issue de A est une droite caractéristique. Si cela a lieu pour chaque position de A, alors, puisque les inflexions se conservent dans les directions caractéristiques, l'image de chaque droite est une droite. Il est bien connu que ceci entraîne (pour $n > 1$!) que la correspondance est homographique. Nous allons le vérifier par le calcul. Notre supposition signifie que tous les déterminants de la matrice

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & \dots & \Omega_n \\ \omega_1 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}$$

sont identiquement nuls. Il s'ensuit l'existence d'une forme de Pfaff

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \omega_i$$

telle que

$$\Omega_i = 2\omega_i\vartheta \ \text{pour} \ 1 \leq i \leq n.$$

Mais alors on voit de (10,2) qu'il existe une homographie tangente K telle que chaque droite issue de A est K-principale. Si l'on choisit les repères de manière que K ait la forme (5,2), on a $\Omega_i = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n$. On peut encore supposer la validité de (6,3). Ensuite il résulte de (5,15) que $\tau_{ik} = 0$ pour $1 \leqq i, k \leqq n$ ainsi que $\tau_{00} = 0$. Les équations de structure (5,7) et (5,8) donnent alors

$$[\tau_{i0}\omega_k] = 0 \text{ pour } 1 \leqq i, k \leqq n. \tag{13,1}$$

Puisque $n > 1$, nous avons pour chaque i $(1 \leqq i \leqq n)$ au moins deux valeurs différentes de k telles que $[\tau_{i0}\omega_k] = 0$. Ceci exige que $\tau_{i0} = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n$. En résumé, on a $\tau_{ik} = 0$ pour $0 \leqq i, k \leqq n$. Or en différentiant (5,2) on obtient, dans tous les cas,

$$\mathrm{d}K \,.\, A = \tau_{00}A, \ \mathrm{d}K \,.\, A_i = \tau_{i0}A + \sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}A_k$$

de sorte que, dans le cas actuel, on a $\mathrm{d}K \,.\, X = 0$ pour chaque point X, ce qui veut dire que l'homographie K est fixe. Puisque $KA = B$, la correspondance donnée est homographique.

Dans la suite de ce Mémoire, nous allons étudier successivement différents types de correspondances entre deux espaces définies par des propriétés diverses des transformations K-linéarisantes.

*

Výtah. — Résumé.

Projektivní diferenciální geometrie korespondencí mezi dvěma prostory. I.

EDUARD ČECH, Praha.

Korespondence mezi dvěma n-rozměrnými lineárními prostory S_n a S_n' je určena, jsou-li homogenní souřadnice sobě příslušných bodů A v prostoru S_n a B v prostoru S_n' vyjádřeny jako funkce n parametrů $(u_1, \ldots, u_n) = (u)$. Při daných (u) nazveme *tečnou kolineací* dané korespondence každou kolineaci K mezi oběma prostory S_n a S_n', pro kterou platí při pevných (u) a při pevně zvolených $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda)$

$$KA = B, \ K\frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial B}{\partial u_i} + \lambda_i B \ (1 \leqq i \leqq n). \tag{1}$$

Při daných (u) závisí tedy tečná kolineace ještě na n parametrech (λ). Charakteristická vlastnost každé tečné kolineace jest, že realisuje analytický styk obou prostorů; to znamená, že pro každou křivku Γ prostoru S_n jdoucí bodem A obrazy křivky Γ při dané korespondenci a při kolineaci K mají mezi sebou v bodě B analytický styk. Mezi tečnými kolineacemi K je význačná *lokální kolineace* K_0, která je při daných (u) jednoznačně určena. Jestliže faktory homogenních souřadnic jsou zvoleny tak, že

$$\left[A\frac{\partial A}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial A}{\partial u_n}\right]=\left[B\frac{\partial B}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial B}{\partial u_n}\right], \tag{2}$$

potom pro lokální kolineaci K_0 platí jednoduše

$$K_0A=B,\ K_0\frac{\partial A}{\partial u_i}=\frac{\partial B}{\partial u_i}\ (1\leqq i\leqq n). \tag{3}$$

Pro $n=1$ lokální kolineace jest *oskulační kolineací*, t. j. realisuje analytický styk druhého řádu obou prostorů (přímek); naproti tomu pro $n>1$ při obecné volbě (u) neexistuje oskulační kolineace. Pro $n=1$ za předpokladu (2) platí rovnice tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}u^2}=pA+r\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u},\quad \frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}u^2}=qB+r\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u};$$

výraz $(q-p)\,\mathrm{d}u^2$ je diferenciální invariant dané korespondence mezi dvěma přímkami, který nazývám jejím *projektivním diferenciálním elementem*; je roven nule pouze pro projektivní korespondence a vyskytne se v pokračování tohoto článku.

Budiž nyní $n>1$. Při daných (u) budiž $(v_1,\ldots,v_n)=(v)$ jednak přímka $\left[A,\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial A}{\partial u_i}\right]$ trsu A v prostoru S_n, jednak přímka

$$\left[B,\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial B}{\partial u_i}\right]$$

trsu B v prostoru S_n'. Kterákoli tečná kolineace K převádí přímku (v) trsu A v přímku (v) trsu B. Je-li zvolena určitá tečná kolineace K, daná rovnicemi (1), potom v každém z obou trsů přiřadíme přímce (v) přímku $(w_1,\ldots,w_n)=(w)$, kde

$$w_i=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(b_{rs}^{i}-a_{rs}^{i})v_rv_s+2v_i\sum_{r=1}^{n}\lambda_rv_r\ (1\leqq r\leqq n),$$

jestliže

$$\frac{\partial^2A}{\partial u_r\partial u_s}=\sum_{i=1}^{n}a_{rs}^{i}\frac{\partial A}{\partial u_i}+\alpha_{rs}A,$$
$$\frac{\partial^2B}{\partial u_r\partial u_s}=\sum_{i=1}^{n}b_{rs}^{i}+\beta_{rs}B,$$
$$(1\leqq r,s\leqq n).$$

Přechod od přímky (v) k přímce (w) nazývám K-linearisující transformací; přímku (w) nazývám K-linearisující přímkou přímky (v). Geometrický význam K-linearisující transformace je tento. Budiž Γ křivka prostoru S_n jdoucí bodem A. Buďtež Γ' a $K\Gamma$ obrazy křivky Γ při dané korespondenci a při kolineaci K; oba obrazy mají v bodě B společnou tečnu (v); budiž (w) K-linearisující přímka této společné tečny. Zvolme na přímce (w) libovolný bod $C \neq B$ a promítněme obě křivky Γ' a $K\Gamma$ se středu C do libovolné nadroviny. Potom oba průměty mají v průmětu bodu B analytický styk druhého řádu.

K-linearisující transformace závisí na volbě tečné kolineace K. Volíme-li za K specielně lokální kolineaci, potom jest

$$\sum_{i=1}^{n} c_{is}^{i} = 0 \text{ pro } 1 \leq s \leq n.$$

V následujících článcích budeme probírati takové korespondence mezi dvěma prostory, jejichž K-linearisující transformace mají určité geometrické vlastnosti.

LA DUALITÉ DANS LES ESPACES (*F*) ET (*LF*).

JEAN DIEUDONNÉ, Nancy.

L'objet de la conférence était le mémoire écrit par J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ qui sera publié dans les Annales de Grenoble en 1950.

*

Výtah. — Résumé.

Dualita v prostorech (*F*) a (*LF*).

JEAN DIEUDONNÉ, Nancy.

Přednáška se týkala práce, kterou napsali J. DIEUDONNÉ a L. SCHWARTZ a která bude uveřejněna v Annales de Grenoble v roce 1950.

NOVĚJŠÍ PRÁCE O MARKOVOVÝCH ŘETĚZECH A PŘÍBUZNÝCH ÚLOHÁCH.

BOHUSLAV HOSTINSKÝ, Brno.

V dnešní přednášce se pokusím podati přehled hlavních směrů v bádání o theorii Markovových řetězů a o příbuzných úlohách za posledních patnáct let. R. 1934 jsem uveřejnil v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky dva referující články (**63**, 167; **64**, 94) z tohoto oboru; přítomný referát je jejich pokračováním.[1])

Markovův řetěz s konečným počtem eventualit. Konáme neomezenou řadu pokusů, z nichž každý má za výsledek jednu z *r* even-

[1]) Čísla v hranatých závorkách odkazují k připojenému bibliografickému seznamu.