Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Marian Haas

Pravidelné mnohoúhelníky a číslo Ludolfovo

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 1, 81--84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123011

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Pravidelné mnohoúhelníky a číslo Ludolfovo.

Dr. Marian Haas.

A.

Obsah pravidelného n-úhelníka do kružnice o poloměru r vepsaného měří, jak známo,

$$P_n = \frac{nr^2}{2} \cdot sin \frac{360^0}{n}$$

čili

$$P_n = nr^2 \, sin \frac{180^0}{n} \cdot cos \frac{180^0}{n}. \tag{1}$$

Pro $2n$-úhelník do téže kružnice vepsaný pak máme

$$P_{2n} = nr^2 \, sin \frac{180^0}{n}. \tag{2}$$

Dělením obou rovnic odvodíme

$$P_n = P_{2n} \, cos \frac{180^0}{n}.$$

Kladouce $2n$, $4n$, $8n$, .. $2^\omega n$ na místě n, zjednáme si řadu rovnic

$$P_n = P_{2n} \, cos \frac{180^0}{n}$$

$$P_{2n} = P_{4n} \, cos \frac{180^0}{2n}$$

$$P_{4n} = P_{8n} \, cos \frac{180^0}{4n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{mn} = P_{2mn} \, cos \frac{180^0}{mn},$$

kde psáno k vůli stručnosti $2^\omega = m$.

Součin těchto rovnic po náležitém zkrácení dává

$$P_n = P_{2mn} \cos \frac{180^0}{n} \cdot \cos \frac{180^0}{2n} \cos \frac{180^0}{4n} \ldots \cos \frac{180^0}{mn}. \quad (3)$$

Roste-li m do nekonečna, přechází poslední mnohoúhelník v kružnici, jejíž obsah

$$P_\infty = \pi r^2.$$

Dosadíme-li ještě

$$P_n = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{360^0}{n},$$

dostaneme vztah platný pro libovolné celistvé $n \geqq 3$

$$\frac{n}{2} \sin \frac{360^0}{n} = \pi \cos \frac{180^0}{n} \cdot \cos \frac{180^0}{2n} \cdot \cos \frac{180^0}{4n} \ldots \text{in inf.},$$

který se dá psáti též ve formě

$$\frac{n}{\pi} = \frac{2}{\sin \frac{360^0}{n}} \cdot \cos \frac{180^0}{n} \cdot \cos \frac{180^0}{2n} \cdot \cos \frac{180^0}{4n} \ldots \text{in inf.}$$

Dosadivše sem

$$n = 3, \sin \frac{360^0}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

zjednáme si především

$$\frac{3}{\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos 60^0 \cos 30^0 \cos 15^0 \cos \frac{15^0}{2} \ldots \text{in inf.}$$

a poněvadž

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2}, \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

máme rovnici

$$\frac{3}{\pi} = \cos 15^0 \cos \frac{15^0}{2} \cos \frac{15^0}{4} \ldots \text{in inf.},$$

která se obyčejně dokazuje jinak a naznačuje cestu, kterak beze znalosti vyšší analyse vypočítati lze Ludolfinu počítáním funkcí úhlů polovičních.

Podobně pro $n = 4$ plyne vztah

$$\frac{2}{\pi} = \cos 45^0 \cos \frac{45^0}{2} \cos \frac{45^0}{4} \ldots \text{in inf.}$$

Konečně pro

$$n = 5,\ cos\ 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

dostaneme

$$\frac{5}{\pi} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} cos\ 9^0\ cos\ \frac{9^0}{2}\ cos\ \frac{9^0}{4} \ldots \text{ in inf.}$$

B.

Vzorce 1) a 2) uvedené povýšíme na druhou mocninu a odečteme. Dostaneme

$$P_{2n}^2 - P_n^2 = n^2 r^4\ sin^4 \frac{180^0}{n},$$

ze kteréžto rovnice jako základní odvodíme řadu nových dosazujíce $2n$, $4n$, $8n$, ... $2^{\omega} . n$ na místě n.

$$P_{4n}^2 - P_{2n}^2 = 2^2 n^2 r^4\ sin^4 \frac{180^0}{2n}$$

$$P_{8n}^2 - P_{4n}^2 = 4^2 n^2 r^4\ sin^4 \frac{180^0}{4n}$$

. . . .

$$P_{2mn}^2 - P_{mn}^2 = m^2 n^2 r^4\ sin^4 \frac{180^0}{mn},$$

kde značí opět $2^{\omega} = m$.

Do součtu všech těchto rovnic

$$P_{2mn}^2 - P_n^2 = n^2 r^4 \left\{ sin^4 \frac{180^0}{n} + 2^2\ sin^4 \frac{180^0}{2n} + \ldots m^2\ sin^4 \frac{180^0}{mn} \right\} \tag{4}$$

zavedeme opět $m = \infty$, čímž poslední mnohoúhelník přejde v kružnici, jejíž plocha

$$P_\infty = \pi r^2.$$

Dosadíme-li také za P_n příslušnou hodnotu, zjednáme si po snadné úpravě vzorec

$$\frac{\pi^2}{n^2} = \frac{1}{4} sin^2 \frac{360^0}{n} + sin^4 \frac{180^0}{n} + 2^2\ sin^4 \frac{180^0}{2n}$$

$$+ 4^2\ sin^4 \frac{180^0}{4n} \ldots \text{ in inf.},$$

platný pro celistvá $n \geqq 3$.

Řada na pravé straně jest absolutně konvergentní, poněvadž podíl dvou sousedních členů se blíží mezné hodnotě $\frac{1}{4}$.

Pro $n = 3$ dostaneme rovnici

$$\frac{\pi^2}{9} = \frac{3}{16} + sin^4 60^0 + 2^2 sin^4 30^0 + 4^2 sin^4 15^0$$
$$+ 8^2 sin^4 \frac{15^0}{2} + \ldots \text{ in inf.}$$

nebo vzhledem na

$$sin\, 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ sin\, 30^0 = \frac{1}{2}.$$

$$\pi^2 = 9 + 144 \left(sin^4 15^0 + 2^2 sin^4 \frac{15^0}{2} + 4^2 sin^4 \frac{15^0}{4} + \ldots \right).$$

Kladouce $n = 4$ zjednáme si

$$\pi^2 = 4 + 16 \left\{ sin^4 45^0 + 2^2 sin^4 \frac{45^0}{2} + 4^2 sin^4 \frac{45^0}{4} + \ldots \text{in inf.} \right\}.$$

Konečně $n = 5$ vede ke vzorci

$$\pi^2 = 100\, sin^2 18^0 + 400 \left\{ sin^4 9^0 + 2^2 sin^4 \frac{9^0}{2} + \right.$$
$$\left. + 4^2 sin^4 \frac{49^0}{4} \ldots \text{ in inf.} \right\}.$$

Společné tečny dvou kuželoseček.

Podává **Jos. Kálal**, skut. učitel v Příboře.

Z různých poloh, jež mohou zaujímati dvě kuželosečky, vyjměme onu, ve které hlavní jich osy splývají v jednu přímku, nebo máme-li na mysli kružnici, kdy střed její nachází se s hlavní osou kuželosečky v jedné přímce. V této zvláštní poloze můžeme sestrojiti společné tečny obou kuželoseček užitím deskriptivní geometrie.

Vytkneme-li v prostoru bod v, jsou jím a danými kuželosečkami stanoveny dvě plochy kuželové, a společné jich tečné roviny sekou rovinu řídicích křivek v hledaných tečnách. Kdyby podařilo se nám najíti v prostoru takový bod v, aby zmíněné