Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Drobnosti geometrické

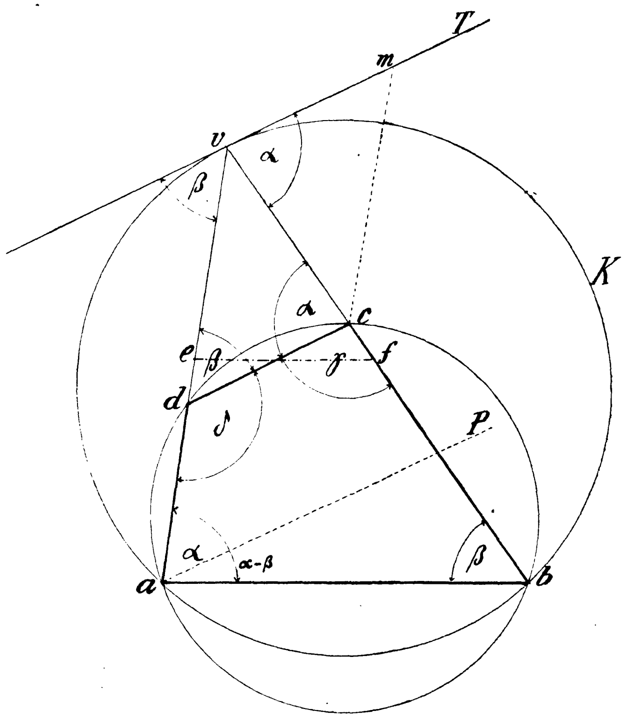
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 1, 101--105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123008

Drobnosti geometrické.

Podává **Václav Hübner**, professor na Král. Vinohradech.

1. *Sestrojiti čtyřúhelník vepsaný kruhu, je-li dána strana* $\overline{ab}$, *přilehlé úhly* α, β *a strana* $\overline{cd}$.



Obr. 1.

Ze strany $\overline{ab}$ a přilehlých úhlů α, β sestrojme $\triangle abv$, opišme jemu kružnici K, při vrcholu v sestrojme tečnu T, na níž přenesme délku $\overline{cd} = \overline{vm}$; učiníme-li $mc \parallel va$, $cd \parallel T$, jest $abcd$ žádaný čtyřúhelník.

Důkaz. Při tečně T vznikly úhly obvodové α, β.

Jak z obrazce patrno, jest $\sphericalangle vcd = \sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle vdc = \sphericalangle \beta$; ježto $\sphericalangle \beta + \sphericalangle \delta \lessgtr \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \gamma = 2R$, pročež jest $abcd$ čtyřúhelník do kruhu vepsaný.

Podobně řeší se úloha: daný trojúhelník protnouti příčkou určité délky tak, aby vznikl čtyřúhelník do kruhu vepsaný.

Považujeme-li $\triangle vab$ za hlavní řez šikmého kužele s kruhovou základnou, kruh K za hlavní řez koule opsané tomuto kuželi, tečnu T a za průmět roviny tečné sestrojené ke kouli v bodě v na tento hlavní řez, pak lze kruh čtyřúhelníku $abcd$ opsaný považovati za průmět hlavního kruhu koule, která protíná kužel v kruzích, jichž roviny jsou kolmé k hlavnímu řezu a průměty jich pak jsou $\overline{ab}$, $\overline{cd}$.

Z čehož plyne známé sestrojení řezu kruhového na šikmém kuželi s kruhovou základnou, jehož rovina jest k základně jeho nakloněna.

Rovina ta jest rovnoběžná s rovinou tečnou, kterou sestrojíme ke kouli opsané tomuto kuželi při vrcholu v.

Je-li $\alpha + \beta = 2R$, pak jest $va \parallel vb$ a plocha kuželová přejde tu v plochu válcovou; čtyřúhelník $abcd$ jest lichoběžník rovnoramenný. Rovina základny (ab) a řezu (cd) jest, jak známo, souměrná k rovině řezu normálního.

Jde-li o vyšetření krychlového obsahu K kužele ($abcd$), části to šikmého kužele obsaženého mezi základnou kruhovou a řezem kruhovým k ní nakloněným, pak jest $K = K_1 - K_2$, kdež K_1, K_2 značí obsahy kuželů (vab) a (vac). Je-li výška kužele (vab) $v = \overline{va}\, sin\, \alpha$, poloměr základny $r = \frac{\overline{ab}}{2}$ a výška kužele (vac) $v_1 = \overline{vc}\, sin\, \alpha$, poloměr základny $\varrho = \frac{\overline{cd}}{2}$, jest

$$K = \frac{1}{3} \pi\, sin\, \alpha\, (r^2 \,.\, \overline{va} - \varrho^2 \,.\, \overline{vc}).$$

Z $\triangle vab$ plyne, že

$$\overline{va} : \overline{ab} = sin\, \beta : sin\, (\alpha + \beta)$$

a z $\triangle vcd$,

$$\overline{vc} : \overline{cd} = sin\, \beta : sin\, (\alpha + \beta),$$

tudíž

$$\overline{va} = \frac{2r \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad \overline{vc} = \frac{2\varrho \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

pročež

$$K = \frac{2}{3}\pi \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}(r^3 - \varrho^3).$$

Ježto

$$\overline{va} - \overline{vc} = \frac{2 \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}(r-\varrho), \; r^3 - \varrho^3 = (r^2 + r\varrho + \varrho^2)(r-\varrho),$$

jest tedy

$$K = \frac{1}{3}\pi(r^2 + r\varrho + \varrho^2)(\overline{va} - \overline{vc}) \sin\alpha.$$

Jelikož

$$\triangle vab \sim \triangle vcd,$$

jest

$$\overline{va} : \overline{vc} = \overline{vb} : \overline{vd}$$

a

$$(\overline{va} - \overline{vc}) : (\overline{vb} - \overline{vd}) = \overline{va} : \overline{vb} = \sin\beta : \sin\alpha,$$

tudíž

$$(\overline{va} - \overline{vc}) \sin\alpha = (\overline{vb} - \overline{vd}) \sin\beta.$$

Učiníme-li $\overline{ve} = \overline{vc}$, $\overline{vf} = \overline{vd}$, pak jest $\overline{ae} = \overline{va} - \overline{vc}$, $\overline{bf} = \overline{vb} - \overline{vd}$; z poslední rovnice jde, že $\overline{ef} \parallel \overline{ab}$ a ježto $\triangle vdc \cong \triangle vef$, jest $\overline{dc} = \overline{ef}$. Obsah kužele $(abcd)$ lze tudíž nahraditi komolým kuželem $(abef)$, jehož základny jsou spolu rovnoběžné; $\left.\begin{matrix}\text{nejkratší}\\\text{nejdelší}\end{matrix}\right\}$ strana = rozdílu $\left\{\begin{matrix}\text{nejkratších}\\\text{nejdelších}\end{matrix}\right\}$ stran kuželů (vab) a $vcd)$.

Dodatek. Odchylka rovin kružnic (ef), (cd) jest $= \alpha - \beta$, pročež $P \parallel \overline{dc} \parallel T$. Tečnu T může zastupovati přímka P, čímž předešlé konstrukce lze zjednodušiti.

2. V indické knize cilpa-çadras, v níž uložena jest geometrie indická, uvádí se, kterak se daný čtverec promění ve stejný kruh.

Ze středu o čtverce $abcd$ opíše se poloviční úhlopříčkou $\overline{od}$ oblouk $\widehat{de}$, $(oe \perp cd)$, na to se rozdělí $\overline{me}$ na tři stejné díly a $\overline{of}$ jest pak poloměr hledaného kruhu.

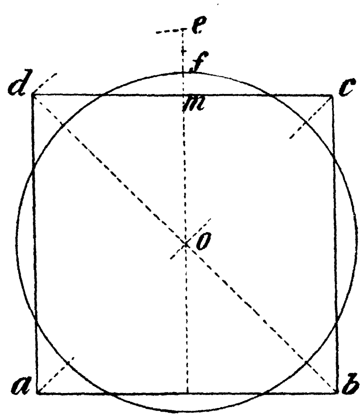
Jak z obrazce vidno, jest

$$\overline{of} = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\,\overline{me} \quad (a \text{ značí délku strany čtverce}),$$

$$\overline{me} = \overline{oe} - \overline{om} = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2},$$

tudíž

$$\overline{of} = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{6} - \frac{a}{6} = \frac{a(2+\sqrt{2})}{6}.$$



Obr. 2.

Plocha čtverce *abcd*

$$P = a^2,$$

plocha kruhu

$$K = \pi\,\frac{a^2}{36}\,(2+\sqrt{2})^2 = \frac{\pi a^2}{18}\,(3+2\sqrt{2});$$

klademe-li za $\sqrt{2}$ zbližnou hodnotu $\frac{17}{12}$ a za $\pi \doteq \frac{22}{7}$, obdržíme

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{18} \doteq \frac{3+\frac{17}{6}}{18} = \frac{35}{108}$$

a

$$\frac{\pi}{18}\,(3+2\sqrt{2}) \doteq \frac{35}{108}\cdot\frac{22}{7} \doteq \frac{55}{54},$$

tudíž

$$P \doteq K.$$

V úloze této klade se $\frac{4}{5}$ úhlopříčky čtverce na roveň průměru stejného se čtvercem kruhu. Pak jest

$$K = \frac{8}{25} \pi a^2$$

a

$$\pi \frac{8}{25} \doteq \frac{22}{7} \cdot \frac{8}{25} \doteq \frac{176}{175},$$

tudíž

$$P \doteq K.$$

Mosaika.

V době, kdy tyto řádky dostanou se Vám, mladí přátelé, do rukou, budete již v plném proudu svých studií a prací školních a jen tak někdy vzpomenete sobě na prázdniny, kde a jak jste je strávili. Meteorologicky byly celkem méně příznivé než jindy; červenec i srpen měl málo pěkných, teplých dnů, a mnoho dnů chladných a deštivých. Zajímavým — ovšem smutně zajímavým — byl den 6. srpna. K večeru strhla se bouře spojená s vichrem místy velice prudkým. V Praze, kde jsem tehda dlel, nebyl vichr značný a nenadělal mnoho škod. Za to ve východních Čechách, zejména v okolí Vysokého Mýta, Chrasti, Chrudimě, řádil orkán s prudkostí u nás na štěstí neobvyklou, a způsobil velmi veliké škody. Naše illustrované časopisy přinášely pohledy z krajin, jež byly touto pohromou postiženy. Ale skutečnost působila dojmem daleko větším než obraz a popis. Měl jsem příležitost ještě v září, tedy čtyři neděle později, spousty, jež orkán v oněch krajinách způsobil, viděti. Nejvíce utrpělo stromoví, hlavně v lesích, kde vývraty byly rozsáhlé. Také vedle cest stromy ovocné byly přelámány anebo vyvráceny. Při tom bylo podivné, že na četných místech vedle stromu vyvráceného zůstal státi strom obalený ovocem, zejména jablky. Každý by očekával, že vítr, když jeden strom vyvrátí, druhým alespoň tak otřese, že ovoce z největší části srazí. Patrně tvořily se smršti velmi úzké víry malého průřezu. Kde působily na velkých plochách, ukázal se jich účinek silou ohromnou. Ve